exercices de mathématiques
oraux x-ens
algèbre 3

Serge Francinou
Hervé Gianella
Serge Nicolas

CASSINI

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
ORAUX X-ENS

Enseignement des mathématiques

1. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités I*
2. J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*
3. M. Cottrell, V. Genon-Catalot, Ch. Duhamel, Th. Meyre, *Exercices de probabilités*
4. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
5. J.-Y. Ouvrard, *Probabilités II*
6. G. Zémor, *Cours de cryptographie*
7. A. Szpirglas, *Exercices d'algèbre*
8. B. Perrin-Riou, *Algèbre, arithmétique et Maple*
10. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 1*
11. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 1*
12. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 2*
13. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Analyse 2*
14. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices des oraux X-ENS, Algèbre 3*
15. H. Krivine, *Exercices de mathématiques pour physiciens*
16. J. Jacod, Ph. Protter, *L'essentiel en théorie des probabilités*
17. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*
18. É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*
19. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2002 et 2003 (MP)*
20. D. Perrin, *Mathématiques d'école*
21. B. Randé, *Problèmes corrigés. Concours 2004 (MP)*
22. P. Bourgade, *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*
23. V. Prasolov, *Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire*

SERGE FRANCINOU
HERVÉ GIANELLA
SERGE NICOLAS

Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures

Algèbre. Tome III

Deuxième édition, revue et augmentée

CASSINI

Serge Francinou, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques, est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Marcelin Berthelot.

Hervé Gianella, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques, est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Saint-Louis.

Serge Nicolas, ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de Mathématiques, est actuellement professeur en classe préparatoire au lycée Henri IV.

ISBN 978-2-84225-092-8

Table des matières

Chapitre 3. Formes quadratiques **189**

Introduction

Cet ouvrage est le troisième tome d'algèbre d'un recueil d'exercices de mathématiques destiné à la préparation des oraux des concours d'entrée aux Écoles normales supérieures et à l'École polytechnique. Trois volumes sont consacrés à l'algèbre et trois à l'analyse.

La vocation première des Écoles normales est de former des chercheurs ou des enseignants-chercheurs. Le concours d'entrée vise donc à détecter les qualités scientifiques du candidat, son aptitude à la recherche. À l'oral, on jugera avant tout la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche. On ne sera pas surpris que les exercices posés aient un contenu mathématique riche, qu'ils soient très éloignés du simple exercice technique, d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif. Ils pourraient apparaître excessivement difficiles, si on perdait de vue le déroulement concret de l'épreuve. L'oral des ENS est un long dialogue (l'épreuve dure environ cinquante minutes, comme d'ailleurs à l'École polytechnique) entre le candidat et l'examinateur, qui tout au long de l'épreuve fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion du candidat et tester ses réactions. Il est d'ailleurs impossible de rendre pleinement compte dans un recueil d'exercices du caractère oral de l'épreuve.

L'École polytechnique, quant à elle, est plus généraliste. Les exercices posés au concours sont de facture plus classique et, en règle générale, l'examinateur intervient moins. C'est au candidat de montrer sa maîtrise du programme dans la résolution d'un exercice dont la difficulté est cependant très variable. Certains sont proches des exercices d'ENS. Les énoncés circulent d'ailleurs d'un concours à l'autre, ou peuvent même être repris d'exercices d'Olympiades.

Les énoncés qui figurent dans ce recueil, ont été donnés entre 1996 et 2006. Ils sont extraits pour l'essentiel des listes publiées chaque année par la RMS (*Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* aux éditions Vuibert jusqu'en 2003 et désormais *Revue de la filière Mathématiques* aux éditions e.net) dont nous remercions les auteurs pour l'aide précieuse qu'ils apportent ainsi aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires. Il s'agit de versions communiquées par les étudiants, reflétant la compréhension que ceux-ci ont eue de l'exercice et le déroulement conjoncturel de leur oral, comme le montrent les variations d'une année à l'autre pour un même exercice. Nous n'avons pas hésité à les modifier, pour rectifier des erreurs, compléter un énoncé quand manifestement l'exercice s'est arrêté avant que le résultat que l'examinateur avait en vue ne soit atteint, ou ajouter des indications.

Nous avons choisi de laisser quelques énoncés «bruts», ceux pour lesquels nous estimons qu'une démarche naturelle (qui peut être longue et ardue) permet de conduire à la solution. Pour d'autres exercices, nous avons pris la liberté de rajouter des questions intermédiaires, qui auraient pu être celles posées par l'examinateur. Quitte à perdre en concision, nous avons tenu à rédiger les solutions les plus pédagogiques possible, essayant d'exposer clairement les idées et démarches de raisonnement, sans escamoter les détails ou calculs qui peuvent paraître évidents. On évite autant que possible l'introduction d'une astuce ou d'un objet *ad hoc* permettant d'atteindre rapidement la solution. S'il n'y a pas moyen d'expliquer l'origine de cette astuce, c'est que l'exercice est peu intéressant et que l'étudiant en tirera peu de profit.

À l'intérieur de chaque chapitre, les exercices ont été regroupés thématiquement et à l'intérieur de chaque thème, souvent par ordre de difficulté croissante. Ainsi regroupés, ils apparaîtront plus accessibles, car plongés dans leur contexte mathématique, éclairés par d'autres exercices voisins. Les introductions historiques qui ouvrent chaque chapitre, outre leur intérêt propre, visent au même but. Enfin, nous avons agrémenté les énoncés de quelques remarques préliminaires. Sans faire de rappels de cours systématiques, nous avons énoncé, voire redémontré, certains résultats : lemmes classiques, intervenant dans la résolution d'un grand nombre d'exercices, ou résultats au contraire à la lisière du programme, mais utiles, pour lesquels des éclaircissements étaient nécessaires. On trouvera aussi des remarques de synthèse ou des généralisations qui, nous l'espérons, pourront amener le candidat curieux à approfondir ses connaissances. Les quelques indications bibliographiques ont le même objectif.

Le lecteur ne tirera profit de ce livre que s'il cherche des solutions personnelles des exercices avant d'en étudier les corrigés. Une bonne connaissance du cours est indispensable. En effet, les théorèmes du programme fournissent bon nombre de schémas de démonstration. Rappelons aussi quelques démarches générales qui peuvent faciliter l'appréhension des exercices difficiles :

▹ l'étude de cas particuliers permet souvent d'entrevoir les idées qu'il faudra mettre en œuvre dans la résolution du cas général. Ce peut être l'étude du problème pour les petites dimensions, dans un exercice de géométrie euclidienne, ...

▹ le renforcement des hypothèses peut aboutir à un problème plus simple : pour un exercice sur les matrices symétriques positives on peut commencer par le cas où la matrice est définie positive et chercher à prolonger ensuite au cas général, par exemple à l'aide d'un passage à la limite.

▷ dans l'étude des problèmes géométriques on attachera une grande importance au choix des coordonnées (cartésiennes ou barycentriques) et on préservera le plus possible les symétries du problème.

Au-delà des étudiants en classe préparatoire, ces ouvrages intéresseront aussi les candidats au CAPES et à l'Agrégation, qui y trouveront matière à réviser les principales notions du programme, ainsi que des exemples pour nourrir un développement pour leur oral.

Ce troisième tome est consacré à la géométrie. Le premier chapitre concerne les aspects géométriques des espaces euclidiens et il pourra être abordé en grande partie dès la première année en classe préparatoire. Le second est consacré aux endomorphismes symétriques, thème très riche comme le montre le nombre d'exercices. Ces deux premiers chapitres se terminent à chaque fois par quelques exercices plus anciens consacrés aux espaces hermitiens. En effet, le programme des classes préparatoires a été nettement allégé sur ce point lors de la dernière réforme. Nous avons toutefois tenu à garder ces énoncés pour nos nombreux lecteurs agrégatifs et en espérant peut-être un retour en grâce futur des espaces hermitiens (cela est souvent souhaité dans les rapports de concours des Écoles normales supérieures). Le chapitre trois est consacré aux formes quadratiques, une section également assez réduite dans les programmes actuels. Nous avons rédigé les solutions en tenant compte des connaissances au programme (par exemple en ce qui concerne la signature) et indiqué clairement les quelques exercices qui dépassent les résultats exigibles des candidats. Enfin le dernier chapitre est dédié à la géométrie affine euclidienne dans toute sa richesse (géométrie du triangle, coniques, problèmes d'extrema, isométries, convexité,...). Nous avons mis un grand nombre de figures pour éclairer les solutions. Les énoncés sont tous formulés dans un espace réel, voire dans $\mathbb{R}^n$, ce qui n'amène pas vraiment une perte de généralité et simplifie souvent la rédaction des solutions. Nos lecteurs connaissant la théorie des espaces affines n'auront aucun mal à placer chaque énoncé dans le contexte naturel qui est le sien.

Si vous souhaitez nous contacter pour nous faire part de vos remarques, vous pouvez envoyer un courriel à l'adresse *fgn.cassini@free.fr*.

Chapitre 1

Espaces euclidiens. Espaces hermitiens

Nous ne pourrions commencer ce chapitre sans y évoquer l'important héritage que constitue la géométrie élémentaire. Développée depuis les Grecs, elle a laissé dans ce domaine des Mathématiques des notions fondamentales telles que distance, orthogonalité, angle... et le vocabulaire associé qui dépasse le cadre des espaces de dimension 2 et 3 pour s'appliquer à des espaces de dimension n, et même de dimension infinie dans le cas des espaces fonctionnels. On retiendra que la traduction d'un problème abstrait sur les espaces euclidiens en termes de géométrie classique, à l'aide d'une figure par exemple, est souvent une source puissante d'inspiration.

Bien évidemment, la conscience du produit scalaire sous-jacent à la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est très récente puisqu'elle s'appuie sur le concept de vecteurs apparu véritablement à la fin du XIX^e *siècle. C'est plutôt à travers l'étude des formes quadratiques, vues pendant des siècles comme polynômes homogènes de degré 2, que vont se faire les plus grandes avancées, façonnant les outils de l'algèbre linéaire moderne : déterminant, valeurs propres, rang, forme bilinéaire... Le point de vue analytique s'appuyant sur un système de coordonnées fut dominant depuis Descartes et Fermat jusqu'à ce que la théorie des espaces de Hilbert au* XX^e *siècle fasse faire un pas de plus dans l'abstraction, nous donnant la notion générale de forme sesquilinéaire sur un espace de dimension quelconque.*

La première série d'exercices porte sur des calculs algébriques de base avec la norme et le produit scalaire. Ce dernier sera presque toujours noté $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$.

1.1. Bornes d'une fonction où intervient le produit scalaire

Soit E un espace euclidien et $(a, b) \in \mathrm{E}^2$. Déterminer les bornes supérieures et inférieures sur $\mathrm{E}\backslash\{0\}$ de

$$f : x \longmapsto \frac{\langle x, a\rangle\langle x, b\rangle}{\|x\|^2}.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Si a ou b est nul, f est identiquement nulle et les bornes valent 0. Supposons a et b non nuls et considérons un plan P contenant a et b. On a $f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ et donc

$$\sup_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} f(x) = \sup_{\|x\|=1} f(x)$$

et il en va de même pour la borne inférieure. On note p la projection orthogonale sur P. On a $\langle x, a\rangle = \langle p(x), a\rangle$ et l'égalité analogue pour b. Ainsi, pour x vecteur unitaire, on a $f(x) = \langle p(x), a\rangle\langle p(x), b\rangle$ et donc

$$\sup_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} f(x) = \sup_{\substack{e\in \mathrm{P}\\ 0<\|e\|\leqslant 1}} \langle e, a\rangle\langle e, b\rangle,$$

puisque $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ et que chaque $e \in \mathrm{P}$ non nul de norme plus petite que 1 est l'image par p d'un vecteur unitaire. Il en va de même pour la borne inférieure.

Munissons P d'une orientation quelconque et notons θ l'angle orienté entre a et b. Pour e non nul dans P, on a donc en notant φ l'angle orienté entre a et e,

$$\begin{aligned}\langle e, a\rangle\langle e, b\rangle &= \|a\|\,\|e\|\cos\varphi\|b\|\,\|e\|\cos(\theta-\varphi)\\ &= \frac{\|a\|\|b\|\|e\|^2}{2}\left(\cos\theta + \cos(2\varphi-\theta)\right).\end{aligned}$$

Lorsque e parcourt le disque unité de P privé de 0, la quantité $\|e\|$ décrit $]0, 1]$ et φ décrit tous les réels modulo 2π. On en déduit que

$$\boxed{\sup_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} f(x) = \frac{\|a\|\|b\|(\cos\theta+1)}{2} = \frac{\langle a, b\rangle + \|a\|\|b\|}{2}}$$

et

$$\boxed{\inf_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} f(x) = \frac{\|a\|\|b\|(\cos\theta-1)}{2} = \frac{\langle a, b\rangle - \|a\|\|b\|}{2}}. \ \triangleleft$$

L'énoncé suivant peut s'interpréter de la manière suivante : étant donné n boules ouvertes de rayon 1 deux à deux disjointes dans un espace euclidien, que dire du rayon d'une boule qui les contient toutes ?

1.2. Boule contenant n points à distances mutuelles supérieures à 2

Soit E un espace euclidien et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$, vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \|x_i - x_j\| \geqslant 2.$$

Soit B une boule fermée de rayon R contenant tous les x_i. Montrer que

$$\mathrm{R} \geqslant \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

En remplaçant éventuellement les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ par $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$, où x_0 est le centre de la boule B, on peut supposer que celui-ci est 0. On a alors $\|x_i\| \leqslant \mathrm{R}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour minorer R, il nous faut tenir compte de toutes les conditions d'écartement entre les x_i. La quantité la plus simple qui tienne compte de tous les écarts est

$$\mathrm{S} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \|x_i - x_j\|^2.$$

Nous prenons les normes au carré sinon il serait impossible de simplifier la somme. Développons les carrés scalaires de S :

$$\mathrm{S} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle,$$

ce qui donne

$$\mathrm{S} = 2n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - 2\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 \leqslant 2n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

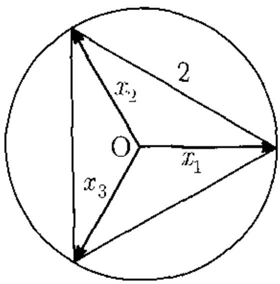
On a donc $\mathrm{S} \leqslant 2n^2\mathrm{R}^2$. Mais par hypothèse, on a

$$\mathrm{S} \geqslant \sum_{i \neq j} 4 = 4(n^2 - n) = 4n(n-1).$$

On en déduit que $2n\mathrm{R}^2 \geqslant 4n(n-1)$ ce qui conduit bien à

$$\boxed{\mathrm{R} \geqslant \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}}. \quad \triangleleft$$

Regardons si la minoration obtenue est optimale. Pour placer n points vérifiant $\|x_i - x_j\| \geqslant 2$ *(pour* $i \neq j$*) dans une boule de centre* 0 *et de rayon* $\mathrm{R}_n = \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n}}$ *il est nécessaire, d'après la solution de l'exercice, que tous les* x_i *aient pour norme* R_n *et que* $\|x_i - x_j\| = 2$ *pour tout couple* (i, j) *avec* $i \neq j$. *Les vecteurs* $x_1, \dots, x_n$ *forment alors ce que l'on appelle un n-simplexe régulier. C'est un objet qui n'existe que si la dimension de* E *est supérieure ou égale à* $n-1$ *(on pourra notamment se reporter aux exercices 1.20 et 1.27). Par exemple pour former un triangle équilatéral (cas* $n = 3$*) il faut au moins que* $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$. *Inversement, si par exemple* $\dim \mathrm{E} = 2$, *et si les vecteurs* x_1, x_2, x_3 *forment un triangle équilatéral de côté* 2, *il est facile de vérifier que le rayon du cercle circonscrit à ce triangle équilatéral est* $\mathrm{R}_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



Le lecteur pourra montrer plus généralement que le rayon de la sphère circonscrite à un n-simplexe régulier de côté 2 *est bien* R_n. *Autrement dit, la minoration de l'exercice est optimale dès que la dimension de l'espace euclidien dépasse* $n-1$.

L'énoncé suivant est très classique et prouve que l'on peut construire en dimension n des familles de vecteurs de cardinal $n+1$ *faisant entre eux un angle obtus.*

1.3. Familles obtusangles

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ pour $i \neq j$.

1. Montrer que $p-1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que l'on ne peut trouver plus de $n+1$ vecteurs réunissant ces conditions.

3. Montrer que l'on peut en trouver $n+1$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Par symétrie on peut se contenter de montrer que la famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i = 0$. On sépare dans cette somme les coefficients positifs et négatifs. On pose $\mathrm{I} = \{i \in [\![1, p-1]\!], \lambda_i > 0\}$ et $\mathrm{J} = [\![1, p-1]\!] \setminus \mathrm{I}$, ces ensembles pouvant être vides. On a alors $\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i u_i = -\sum_{j \in \mathrm{J}} \lambda_j u_j$ et donc

$$\left\| \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i u_i \right\|^2 = -\left\langle \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i u_i, \sum_{j \in \mathrm{J}} \lambda_j u_j \right\rangle = -\sum_{i \in \mathrm{I}, j \in \mathrm{J}} \lambda_i \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle \leqslant 0.$$

On en déduit que $\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i u_i = \sum_{j \in \mathrm{J}} \lambda_j u_j = 0$. On obtient ensuite, en multipliant scalairement par u_p,

$$0 = \left\langle \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i u_i, u_p \right\rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \langle u_i, u_p \rangle.$$

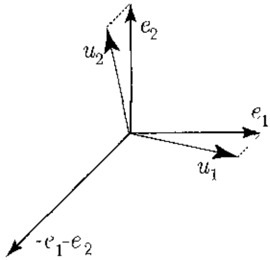
Or tous les termes de la somme sont négatifs. On en déduit que, pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\lambda_i \langle u_i, u_p \rangle = 0$ et donc $\lambda_i = 0$, puisque $\langle u_i, u_p \rangle < 0$. On montre de même que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \mathrm{J}$. La famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est donc libre.

2. Si l'on peut trouver p vecteurs réunissant ces conditions, la question 1 montre que $p-1$ d'entre eux forment une famille libre et ainsi $p - 1 \leqslant n$, soit $p \leqslant n+1$. On ne peut pas trouver plus de $n+1$ vecteurs réunissant ces conditions.

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et λ un réel. On pose $u_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} e_i$. Les produits scalaires $\langle e_k, u_{n+1} \rangle$ valent tous -1 et pour $i \neq j$ les produits scalaires $\langle e_i, e_j \rangle$ sont nuls. On va un peu déformer les vecteurs e_k en leur ajoutant un multiple de u_{n+1} pour obtenir des produits strictement négatifs (voir la figure ci-après en dimension 2).

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $u_i = e_i + \lambda u_{n+1}$ où λ est un réel à choisir. On a, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \lambda^2 \|u_{n+1}\|^2 + \lambda \langle u_{n+1}, e_i \rangle + \lambda \langle u_{n+1}, e_j \rangle = n\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(n\lambda - 2)$$



et
$$\langle u_i, u_{n+1}\rangle = \lambda\|u_{n+1}\|^2 + \langle e_i, u_{n+1}\rangle = \lambda n - 1.$$
Il suffit donc de prendre $0 < \lambda < \dfrac{1}{n}$ pour que la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ convienne. $\triangleleft$

L'exercice suivant, qui regroupe des questions posées à plusieurs oraux, donne différentes caractérisations des normes euclidiennes. L'une des plus importantes est l'identité du parallélogramme : si x, y sont deux vecteurs d'un espace euclidien E *on a facilement*
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
en développant les carrés scalaires de gauche.

1.4. Caractérisation des normes euclidiennes

Soit $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé réel. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) la norme $\|\ \|$ est euclidienne *i.e.* provient d'un produit scalaire ;

(ii) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;

(iii) pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, l'application $t \longmapsto \|x+ty\|^2$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 ;

(iv) la restriction de $\|\ \|$ à tout plan P inclus dans E est euclidienne ;

(v) $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{H}(x) = \{y \in \mathrm{E},\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\}$ est un ensemble stable par homothétie.

(École polytechnique, École normale supérieure)

$\triangleright$ **Solution.**

Notons tout d'abord que le point (i) implique facilement tous les autres. Le point (ii) est l'identité du parallélogramme vérifiée par toute norme euclidienne. L'implication $(i) \Longrightarrow (iii)$ découle du fait que si $\|\ \|$

provient du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, alors la quantité $\|x+ty\|^2$ se développe en $\|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2$. L'implication $(i) \Longrightarrow (iv)$ est triviale. Enfin $(i) \Longrightarrow (v)$ résulte du fait que $\mathrm{H}(x)$ n'est autre que le sous-espace $x^\perp$. On s'intéresse donc surtout aux réciproques.

• Montrons tout d'abord que $(ii) \Longrightarrow (i)$. On va voir que c'est l'implication la plus importante, car il est assez facile d'obtenir l'identité du parallélogramme à partir des conditions (iii), (iv) et (v).

Si la norme $\|\ \|$ provient d'un produit scalaire, celui-ci est nécessairement défini par

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

On définit donc $\langle\ ,\ \rangle$ par l'expression ci-dessus et nous allons montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E. On se donne x, x', y des vecteurs de E.

- Il est déjà clair que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

- On va montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire. La symétrie permet de se limiter à la linéarité à gauche. On va commencer par regarder $\langle 2x, y\rangle$. Par définition on a

$$\langle 2x, y\rangle = \left\|x + \frac{y}{2}\right\|^2 - \left\|x - \frac{y}{2}\right\|^2.$$

Or, avec l'hypothèse (ii), on peut écrire

$$\left\|x + \frac{y}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{x}{2} + \frac{x+y}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y}{2}\right\|^2$$

et

$$\left\|x - \frac{y}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{x}{2} + \frac{x-y}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y}{2}\right\|^2.$$

En soustrayant les deux expressions, il vient $\langle 2x, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$.

- Calculons maintenant $\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$:

$$\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x'+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x'-y}{2}\right\|^2$$

ce qui donne avec l'hypothèse,

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+x'+2y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-x'}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+x'-2y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-x'}{2}\right\|^2\right),$$

et par conséquent $\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle = \dfrac{1}{2}\langle x+x', 2y\rangle = \langle x+x', y\rangle$, le point précédent étant utilisé dans la dernière égalité.

- Posons alors $f(t) = \langle tx, y\rangle - t\langle x, y\rangle$ pour tout réel t. D'après ce qui précède on a pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $f(t+t') = f(t) + f(t')$ et $f(0) =$

$f(1) = f(2) = 0$. De plus, f est continue (la norme est continue). Il est alors classique de montrer que f est une homothétie. Comme $f(1) = 0$ on a donc $f = 0$.

Ainsi, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. Comme $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, il s'agit bien d'un produit scalaire dont la norme associée est $\|\ \|$.

Les assertions (i) et (ii) sont donc équivalentes : les normes vérifiant l'identité du parallélogramme sont les normes euclidiennes (ce résultat constitue le théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan).

• Montrons que $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ avec y non nul. Par hypothèse, on sait que $\mathrm{Q}(t) = \|x + ty\|^2 + \|x - ty\|^2$ est un polynôme de degré inférieur à 2. Son terme constant est $\mathrm{Q}(0) = 2\|x\|^2$. Comme Q est pair, il n'a pas de terme en t. Enfin, comme y est non nul on a $\mathrm{Q}(t) \sim 2\|y\|^2t^2$ en $+\infty$ et le coefficient dominant de Q vaut $2\|y\|^2$. Ainsi, on a $\mathrm{Q}(t) = 2\|x\|^2 + 2t^2\|y\|^2$ pour tout réel t. On obtient l'identité du parallélogramme pour x et y en prenant $t = 1$. Bien entendu, cette identité reste trivialement vérifiée lorsque y est nul.

• Il est tout à fait évident que $(iv) \Longrightarrow (ii)$.

• Pour finir, montrons que $(v) \Longrightarrow (ii)$. Considérons à nouveau deux vecteurs x et y de E. On peut supposer la famille (x, y) libre, car sinon l'identité du parallélogramme est évidente. Notons P le plan $\mathrm{Vect}(x, y)$. Observons que si $y \in \mathrm{H}(x)$ alors $x \in \mathrm{H}(y)$. Si cela est réalisé, on dira (en anticipant le résultat !) que les deux vecteurs x et y sont orthogonaux. Par hypothèse, on a dans ce cas,

$$\|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2$$

pour tout couple de réels (λ, μ). Autrement dit, λx et μy sont aussi orthogonaux. Pour avoir le résultat, il suffit en fait d'avoir une base (e_1, e_2) de P formée de deux vecteurs orthogonaux (que l'on peut supposer unitaires quitte à les diviser par leur norme). En effet, si l'on pose $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ on a alors

$$\|x + y\|^2 = \|(x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2\|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$$

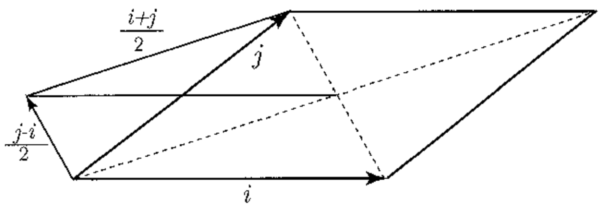
$$\|x - y\|^2 = \|(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

et aussi $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ et $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2$. L'identité du parallélogramme découle de ce que $(x_i + y_i)^2 + (x_i - y_i)^2 = 2(x_i^2 + y_i^2)$ pour $i = 1, 2$.

Notons B l'ensemble des bases de P et f la fonction qui à $(i, j) \in \mathrm{B}$ associe $f(i, j) = \|i + j\|^2 - \|i\|^2 - \|j\|^2$. Il nous faut démontrer que f s'annule en un couple (i, j) de B. On pense à un argument de type théorème des valeurs intermédiaires. L'ensemble B s'identifie à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dès lors que l'on choisit une base particulière de P. Mais cet ensemble n'est pas connexe. C'est en revanche le cas de B^+, l'ensemble des bases directes (la plan P étant orienté par le choix de la base particulière), qui s'identifie lui au sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant > 0. Comme $f(j,i) = f(i,j)$, on peut se restreindre à B^+ sans problème. La fonction f est bien continue. Supposons qu'elle ne s'annule pas sur B^+. Elle y garde donc un signe constant, par exemple strictement positif. Pour toute base (i,j), on a alors $f(i,j) = \|i+j\|^2 - \|i\|^2 - \|j\|^2 > 0$ et aussi $f(i,-j) = \|i-j\|^2 - \|i\|^2 - \|j\|^2 > 0$. En sommant les deux, on a

$$g(i,j) = \|i+j\|^2 + \|i-j\|^2 - 2(\|i\|^2 + \|j\|^2) > 0.$$

Or il est impossible d'avoir cela pour toute base : en effet, si l'on prend la base $\left(\dfrac{i+j}{2}, \dfrac{j-i}{2}\right)$,



on voit que

$$g\left(\frac{i+j}{2}, \frac{j-i}{2}\right) = \|i\|^2+\|j\|^2-2\left(\left\|\frac{i+j}{2}\right\|^2+\left\|\frac{j-i}{2}\right\|^2\right) = -\frac{1}{2}g(i,j) < 0.$$

D'où l'existence d'une base orthogonale et le résultat. $\triangleleft$

En constatant qu'une norme donnée ne vérifie pas l'identité du parallélogramme, on prouve que cette norme ne dérive pas d'un produit scalaire : c'est le cas pour la norme de la convergence uniforme sur l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$. L'identité du parallélogramme tombe en défaut avec les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 1-x$.

L'exercice suivant utilise une identité de polarisation.

1.5. Norme d'un endomorphisme symétrique

Soit H un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire et T un endomorphisme continu de H vérifiant

$$\forall x \in \mathrm{H}, \ \ \forall y \in \mathrm{H}, \ \ \langle \mathrm{T}x, y\rangle = \langle x, \mathrm{T}y\rangle.$$

Montrer que $\|\mathrm{T}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle \mathrm{T}x, x\rangle|$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de $\|\mathrm{T}\|$, on a pour tout vecteur x de norme 1

$$|\langle \mathrm{T}x, x\rangle| \leqslant \|\mathrm{T}x\| \leqslant \|\mathrm{T}\|.$$

On en déduit, en notant $\mathrm{K} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \mathrm{T}x, x\rangle|$, que $\mathrm{K} \leqslant \|\mathrm{T}\|$.

Si x et y sont des vecteurs de norme 1, on peut écrire

$$\langle \mathrm{T}(x+y), x+y\rangle - \langle \mathrm{T}(x-y), x-y\rangle = 2\langle \mathrm{T}x, y\rangle + 2\langle \mathrm{T}y, x\rangle = 4\langle \mathrm{T}x, y\rangle,$$

car T est symétrique. On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}x, y\rangle &= \frac{1}{4}(\langle \mathrm{T}(x+y), x+y\rangle - \langle \mathrm{T}(x-y), x-y\rangle) \\ &\leqslant \frac{1}{4}(\mathrm{K}\|x+y\|^2 + \mathrm{K}\|x-y\|^2) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{K}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leqslant \mathrm{K}.\end{aligned}$$

Si $\mathrm{T}x \neq 0$, on obtient, en prenant $y = \dfrac{1}{\|\mathrm{T}x\|}\mathrm{T}x$, $\|\mathrm{T}x\| \leqslant \mathrm{K}$, inégalité qui reste vérifiée si $\mathrm{T}x = 0$. On en déduit que $\|\mathrm{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathrm{T}x\| \leqslant \mathrm{K}$, puis l'égalité voulue. ◁

La propriété est en particulier vraie si H *est un espace euclidien et* T *un endomorphisme symétrique. Dans ce cas* $\|\mathrm{T}\|$ *est égal au rayon spectral* $\rho(\mathrm{T}) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{T}} |\lambda|$. *En effet, si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de* H *formée de vecteurs propres de* T *on a, pour* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *unitaire,*

$$|\langle \mathrm{T}x, x\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| x_i^2 \leqslant \rho(\mathrm{T}),$$

où λ_i *est la valeur propre associée à* e_i. *On conclut en observant qu'il y a égalité pour* $x = e_j$ *avec* $|\lambda_j| = \rho(\mathrm{T})$.

Dans un espace muni d'un produit scalaire, le célèbre théorème de Pythagore affirme que les vecteurs x, y *sont orthogonaux si, et seulement si* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. *On relie ainsi métrique et orthogonalité. La version géométrique élémentaire était connue des Babyloniens. Les Grecs en avait la démonstration et de nombreuses conséquences (Livre I des* Éléments *d'Euclide).*

L'exercice suivant se propose de déterminer toutes les fonctions f *du plan euclidien* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs réelles qui vérifient* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *lorsque* $x \perp y$, *avec une hypothèse de régularité en plus.*

1.6. Fonctions additives sur deux vecteurs orthogonaux

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que pour tous vecteurs u et v orthogonaux, $f(u+v) = f(u)+f(v)$. On pourra supposer, pour commencer, que f est paire.

2. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tous vecteurs u et v orthogonaux, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

(**École normale supérieure, École polytechnique**)

Solution.

1. • Comme le conseille l'énoncé, on suppose d'abord que f est paire. Si x et y sont deux vecteurs de même norme on constate que $\dfrac{x+y}{2}$ et $\dfrac{x-y}{2}$ sont orthogonaux et on a donc

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

et

$$f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

On en déduit, puisque f est paire, que $f(x) = f(y)$. Ainsi, $f(x)$ ne dépend que de la norme de x. On choisit un vecteur quelconque e de norme 1 et on pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(\lambda) = f(\lambda e)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = f(\|x\|e) = \varphi(\|x\|).$$

On va traduire l'hypothèse en une équation fonctionnelle vérifiée par l'application φ. Soit λ et μ deux réels positifs, u et v deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^2$, de norme respective λ et μ. Comme $u \perp v$, on a $\|u+v\| = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$. L'hypothèse $f(u+v) = f(u) + f(v)$, c'est-à-dire $\varphi(\|u+v\|) = \varphi(\|u\|) + \varphi(\|v\|)$, se traduit par

$$\varphi(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu).$$

En posant $\psi(\lambda) = \varphi\left(\sqrt{\lambda}\right)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a donc $\psi(\lambda+\mu) = \psi(\lambda)+\psi(\mu)$ pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^2$. En étendant ψ à $\mathbb{R}$ par imparité, on obtient un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$. Il est bien connu qu'un tel morphisme est de la forme $x \longmapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$) pour peu que l'on ajoute l'hypothèse ψ continue ou ψ croissante[1]. Montrons que φ est croissante ; on en déduira la croissance de ψ. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^2$, avec $\lambda \geqslant \mu$. On a alors

1. Si ψ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ supposé croissant, on a pour tout

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) + \varphi\left(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\right) \geqslant \varphi(\mu),$$

car φ, tout comme f, est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi ψ est croissante et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\psi(\lambda) = a\lambda$. On obtient, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = \varphi(\|u\|) = \psi(\|u\|^2) = a\|u\|^2$. On note que $a \geqslant 0$, car f prend des valeurs positives.

• Si f n'est plus supposée paire, on décompose f en somme de sa partie paire g et de sa partie impaire h. Elles sont définies pour $u \in \mathbb{R}^2$ par

$$g(u) = \frac{f(u) + f(-u)}{2} \quad \text{et} \quad h(u) = \frac{f(u) - f(-u)}{2}.$$

Si u et v sont deux vecteurs orthogonaux, on a

$$\begin{aligned} g(u+v) &= \frac{1}{2}(f(u+v) + f(-u-v)) \\ &= \frac{1}{2}(f(u) + f(v) + f(-u) + f(-v)) \\ &= g(u) + g(v). \end{aligned}$$

car $-u$ et $-v$ sont orthogonaux. On peut faire la même démonstration pour h. Ainsi g et h vérifient la même hypothèse que f. De plus g, tout comme f, est à valeurs positives. D'après ce qui précède, il existe $a \geqslant 0$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $g(u) = a\|u\|^2$.

Étudions maintenant h. Si u et v sont deux vecteurs orthogonaux et de même norme, on a $h(u+v) = h(u) + h(v)$, $h(u-v) = h(u) + h(-v) = h(u) - h(v)$ et $h(u+v) + h(u-v) = h(2u)$, car $(u+v) \perp (u-v)$. On en déduit que $h(2u) = 2h(u)$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(u) = 2^n h\left(\frac{u}{2^n}\right)$. Sachant que $h = f - g$ et que $f \geqslant 0$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h(u) = 2^n h\left(\frac{u}{2^n}\right) \geqslant -2^n g\left(\frac{1}{2^n} u\right) \geqslant -2^n a \frac{1}{2^{2n}} \|u\|^2 = -\frac{a\|u\|^2}{2^n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $h(u) \geqslant 0$. La fonction h est impaire et ne prend que des valeurs positives : c'est la fonction nulle. Ainsi, on a $f = g$.

On vérifie réciproquement que toute fonction $u \longmapsto a\|u\|^2$ avec $a \geqslant 0$ a les propriétés voulues.

2. On reprend le cheminement de la première question en supposant d'abord f paire. Les fonctions φ et ψ définies de manière analogue

---

$n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\psi(nx) = n\psi(x)$. Si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, comme $q\psi\left(\frac{p}{q}x\right) = \psi\left(q\frac{p}{q}x\right) = \psi(px) = p\psi(x)$, on obtient pour tout rationnel r, $\psi(rx) = r\psi(x)$. Notons $a = \psi(1)$. En prenant $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite croissante (resp. décroissante) de rationnels convergeant vers x, l'inégalité $\psi(q_n) = aq_n \leqslant \psi(x) \leqslant \psi(q'_n) = aq'_n$ donne, en passant à la limite, $\psi(x) = ax$.

héritent de la continuité de f. Comme $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est additive, c'est une application linéaire de la forme $x \longmapsto ax$ avec a un réel donné[2] et finalement, on a $f : x \longmapsto a\|x\|^2$.

Pour f quelconque, on décompose f en somme de g fonction paire et h fonction impaire. De même que précédemment, g et h sont additives sur les vecteurs orthogonaux. D'autre part, g et h sont continues et g est donc de la forme $x \longmapsto a\|x\|^2$ avec a réel.

Montrons que h est une forme linéaire. Comme précédemment, prenons u et v deux vecteurs orthogonaux et de même norme. On a $h(u+v) = h(u) + h(v)$, $h(u-v) = h(u) + h(-v) = h(u) - h(v)$ et $h(u+v) + h(u-v) = h(2u)$, car $(u+v) \perp (u-v)$. On en déduit que $h(2u) = 2h(u)$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(u) = 2^n h\left(\frac{u}{2^n}\right)$ et $h\left(\frac{u}{2^n}\right) = \frac{h(u)}{2^n}$. Montrons par récurrence sur $k \geqslant 0$ que $h(ku) = kh(u)$ et $h(kv) = kh(v)$. C'est vu pour $k = 1$ ou 2. Supposons $k \geqslant 3$. Alors $(k-1)u + v$ et $u - (k-1)v$ sont orthogonaux. Il s'ensuit par hypothèse de récurrence et par imparité de h

$$h((k-1)u+v) = h((k-1)u) + h(v) = (k-1)h(u) + h(v),$$

$$h(u-(k-1)v) = h(u) + h(-(k-1)v) = h(u) - (k-1)h(v),$$

et en sommant ces deux égalités, on trouve

$$h(ku - (k-2)v) = kh(u) - (k-2)h(v).$$

D'autre part, comme ku et $(k-2)v$ sont orthogonaux, il vient avec l'hypothèse de récurrence

$$h(ku - (k-2)v) = h(ku) - h((k-2)v) = h(ku) - (k-2)h(v).$$

On en déduit que $h(ku) = kh(u)$ et en échangeant les rôles de u et v, $h(kv) = kh(v)$. La récurrence est achevée. Par imparité, ces relations restent valables pour $k \in \mathbb{Z}$.

Compte-tenu de ce qui précède, on a pour tout vecteur u, tout $n \geqslant 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$h\left(\frac{k}{2^n}u\right) = \frac{h(ku)}{2^n} = \frac{k}{2^n}h(u).$$

Comme les nombres dyadiques $\frac{k}{2^n}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, la continuité de h donne que pour tout vecteur u et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $h(\lambda u) = \lambda h(u)$. Il s'ensuit

---

[2] Comme dans la note précédente, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $q \in \mathbb{Q}$, $\psi(qx) = q\psi(x)$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = ax$ avec $a = \psi(1)$. Il suffit de prendre une suite de rationnels convergente vers x et passer à la limite en utilisant la continuité de ψ.

que h est linéaire puisqu'en prenant u et v orthogonaux de norme 1, h coïncide avec la forme linéaire qui à un vecteur $x = \lambda u + \mu v$ associe $\lambda h(u) + \mu h(v)$.

Réciproquement, toute fonction de la forme $x \longmapsto a\|x\|^2 + h(x)$ où a est un réel quelconque et h une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ est continue et additive sur les vecteurs orthogonaux. ◁

Si l'on remplace $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$, on obtient les mêmes résultats avec la même démonstration, à ceci près que dans la dernière partie, on vérifie que h est une forme linéaire sur tout plan $\mathrm{Vect}(u, v)$ *de $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de dire ensuite qu'il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.*

L'énoncé suivant étudie le même problème, mais sur $\mathbb{Z}^2$ et sans aucune hypothèse de régularité sur la fonction.

1.7. Applications de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ additives sur les vecteurs orthogonaux

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$u \perp v \Longrightarrow f(u+v) = f(u) + f(v).$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons pour commencer que l'ensemble E des applications vérifiant la propriété est clairement stable par combinaison linéaire : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R})$. L'ensemble $\mathbb{Z}^2$ est un groupe additif engendré par $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. On ne peut pas espérer qu'une application f de E soit déterminée par les images de ces deux seuls points, car on ne peut utiliser l'additivité qu'avec des couples de vecteurs orthogonaux. On va en fait montrer qu'une application f de E est parfaitement déterminée par les images des quatre points e_1, e_2, $-e_1$ et $-e_2$. Autrement dit, on va prouver que l'application linéaire $\psi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ qui à f associe $(f(e_1), f(e_2), f(-e_1), f(-e_2))$ est injective. Cela permettra donc de majorer la dimension de E par 4.

Soit $f \in \operatorname{Ker} \psi$. On montre que f est nulle. En prenant $u = v = (0, 0)$ on a $f(0, 0) = 0$. On a $(1, 1) = e_1 + e_2$ et la somme est orthogonale, donc $f(1, 1) = 0$. On voit de même que f est nulle en $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$. Regardons maintenant f sur le carré $\max(|x|, |y|) = 2$. On a $(2, 0) = (1, 1) + (1, -1)$ et la somme est orthogonale, donc $f(2, 0) = 0$. Par suite $f(2, 1) = f(2, 0) + f(0, 1) = 0$ et $f(2, -1) = f(2, 0) + f(0, -1) = 0$. On a de même $f(0, 2) = f(0, -2) = 0$ puis $f(2, 2) = f(2, -2) = 0$. Ainsi,

$f(2,x) = 0$ pour tout $x \in [\![-2, 2]\!]$. Par symétrie, f est nulle sur les trois autres côtés du carré.

Cela nous invite à poursuivre par récurrence. Supposons f nulle en tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\max(|x|, |y|) \leqslant n$ et montrons que f s'annule alors sur le carré $\max(|x|, |y|) = n+1$. On commence par obtenir un point de ce carré en lequel f s'annule : par exemple, $(n+1, n-1) = (n, -1)+(1, n)$ les deux vecteurs étant orthogonaux. Comme $(n+1, n-1) = (n+1, 0) + (0, n-1)$ on a, avec l'hypothèse de récurrence

$$0 = f(n+1, n-1) = f(n+1, 0) + f(0, n-1) = f(n+1, 0).$$

Ainsi, $f(n+1, 0)$ est nul. On en déduit de suite que $f(n+1, k) = 0$ pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$. Par symétrie, on a $f(-n-1, k) = f(k, n+1) = f(k, -n-1) = 0$ pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$. On termine enfin pour les coins du carré en écrivant $(n+1, n+1) = (n+1, 0) + (0, n+1)$. Cela termine la récurrence. Ainsi f est nulle et ψ est injective.

Essayons maintenant de trouver des fonctions linéairement indépendantes dans E. Il y a bien entendu les deux formes linéaires coordonnées $e_1^* : (x, y) \longmapsto x$ et $e_2^* : (x, y) \longmapsto y$ qui sont additives pour tout couple de $\mathbb{Z}^2$. On a aussi la norme euclidienne au carré, $\mathrm{N} : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$, par le théorème de Pythagore. On a donc $3 \leqslant \dim \mathrm{E} \leqslant 4$.

Peut-on exhiber une quatrième fonction de E qui forme une famille libre avec les trois ci-dessus ? Le commentaire qui suit l'exercice précédent montre que l'on ne peut pas espérer que celle-ci provienne de la restriction à $\mathbb{Z}^2$ d'une solution continue sur $\mathbb{R}^2$. Cela pourrait laisser penser que la dimension de E est 3 mais si l'on se donne f sur seulement trois des points utilisés ci-dessus, par exemple $\pm e_1$ et e_2 on ne peut déterminer f que sur très peu de points. Nous allons prouver que la dimension de E est bien égale à 4. L'image par ψ de la solution e_1^* (resp. e_2^* et N) est le vecteur $(1, 0, -1, 0)$ (resp. $(0, 1, 0, -1)$ et $(1, 1, 1, 1)$). Pour préserver au plus la symétrie en x et en y nous allons chercher un antécédent par ψ au vecteur $(1, -1, 1, -1)$ qui complète les trois vecteurs précédents en une base de $\mathbb{R}^4$.

Supposons qu'un tel antécédent f existe (f est alors unique d'après ce qui précède). En calculant les images par f des points (x, y) pour des petites valeurs de x et y, on constate que $f(x, y) = 0$ lorsque x et y ont la même parité, que $f(x, y) = 1$ lorsque x est impair et y pair et que $f(x, y) = -1$ lorsque x est pair et y impair. Autrement dit, on conjecture que $f(x, y) = \dfrac{1}{2}((-1)^y - (-1)^x)$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Vérifions que cette fonction est bien dans E.

Soit (x, y) et (x', y') deux points de $\mathbb{Z}^2$ avec $xx' + yy' = 0$. En particulier, les entiers xx' et yy' ont la même parité. Distinguons quatre cas :

• Supposons x pair et y pair. Alors $f(x,y) = 0$ et $x+x'$ (resp. $y+y'$) a la même parité que x' (resp. y'). Ainsi, $f(x+x', y+y') = f(x',y') = f(x',y') + f(x,y)$.

• Supposons x pair et y impair. Alors $f(x,y) = -1$. La relation $xx' + yy' = 0$ implique que yy' est pair et donc y' est pair. Alors $x + x'$ a la parité de x' et $y + y'$ est impair. Que x' soit pair ou impair, on a toujours $f(x+x', y+y') = f(x',y') - 1$.

• On traite de même les cas où x est impair.

Ainsi, la fonction f est dans E et fournit un antécédent par ψ du vecteur $(1,-1,1,-1)$.

Conclusion. L'espace vectoriel E est de dimension 4. C'est l'ensemble des fonctions de la forme $(x,y) \longmapsto \mathrm{A}(x^2+y^2) + \mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{D}((-1)^y - (-1)^x)$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^4$. ◁

Dans un espace euclidien E, *une forme linéaire* ℓ *s'écrit de manière unique* $\ell : x \longmapsto \langle a, x\rangle$ *où* a *est un vecteur de* E *: c'est le théorème de représentation de Riesz. L'application qui à* $a \in \mathrm{E}$ *associe la forme* $x \longmapsto \langle a, x\rangle$ *établit un isomorphisme entre* E *et son dual. L'exercice suivant montre comment s'écrivent les formes linéaires sur l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *à l'aide du produit scalaire.*

1.8. Forme linéaire sur un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Soit E un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et φ une forme linéaire sur $\mathcal{F}$.

1. On suppose qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$. Montrer l'existence de $y \in \mathrm{E}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\varphi(f) = \langle f(x), y\rangle$.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer l'existence de $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), y_i\rangle$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. L'application linéaire $g : f \in \mathcal{F} \longmapsto f(x) \in \mathrm{E}$ est injective, car par hypothèse, son noyau est réduit à 0. Elle réalise donc un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur l'espace $\mathrm{E}' = \operatorname{Im} g$. Considérons l'application linéaire $\psi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathcal{F}^*$ qui à $y \in \mathrm{E}$ associe $\psi(y) : f \in \mathcal{F} \longmapsto \langle f(x), y\rangle$. L'application ψ se révèle injective sur l'espace $\mathrm{E}' = \operatorname{Im} g$, car si $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$, alors $g(f) = f(x) \neq 0$ et donc $\psi(g(f))(f) = \|f(x)\|^2 \neq 0$ et $\psi(g(f)) \neq 0$. Il s'ensuit que son image est de dimension supérieure ou égale à $\dim \mathrm{E}' = \dim \mathcal{F}$. Comme

$\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathcal{F}^*$ et $\dim \mathcal{F}^* = \dim \mathcal{F}$, l'application ψ est surjective. Le résultat est démontré.

Le vecteur y n'est pas l'unique solution dans E *: on peut évidemment lui ajouter n'importe quel vecteur de l'orthogonal de* E′*. On pouvait également constater qu'en notant $g^{-1} : \mathrm{E}' \longrightarrow \mathcal{F}$ l'isomorphisme réciproque, l'application $\varphi \circ g^{-1}$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien* E′*. Par suite, il existe un vecteur y de* E′ *(unique) tel que $(\varphi \circ g^{-1})(t) = \langle t, y\rangle$ pour tout $t \in \mathrm{E}'$. En appliquant cela avec $t = g(f) = f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}$ on a donc $\varphi(f) = \langle f(x), y\rangle$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.*

2. L'application linéaire $h : f \in \mathcal{F} \longmapsto (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathrm{E}^n$ est injective, car si une application linéaire est nulle sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$, elle est identiquement nulle. Donc h réalise un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{E}^n$. Introduisons $\Psi : \mathrm{E}^n \longrightarrow \mathcal{F}^*$, l'application linéaire qui au n-uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ associe la forme linéaire $f \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), y_i\rangle$. L'application Ψ est injective sur $\mathrm{Im}\, h$: en effet, si f est un élément non nul de $\mathcal{F}$, $\Psi(h(f))(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), f(e_i)\rangle > 0$ et $\Psi(h(f)) \neq 0$. Ainsi, l'image de Ψ est de dimension au moins égale à $\dim \mathrm{Im}\, h = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}^*$. Il s'ensuit que Ψ est surjective. Il existe donc $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que $\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), y_i\rangle$. ◁

Par exemple, si $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale, pour $\varphi = \mathrm{Tr}$, le n-uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ est égal à $(e_1, \ldots, e_n)$.

On aborde maintenant quelques exercices sur les projecteurs orthogonaux. Rappelons que si p est un projecteur d'un espace euclidien E *alors p est orthogonal si, et seulement si, il est auto-adjoint. Le premier exercice donne une autre caractérisation utile des projecteurs orthogonaux : ce sont les seuls qui diminuent les longueurs, autrement dit, qui ont une norme triple inférieure ou égale à 1.*

1.9. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (1)

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Si p est un projecteur orthogonal, on a $p(x) \perp (x - p(x))$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Du théorème de Pythagore, on déduit que

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2.$$

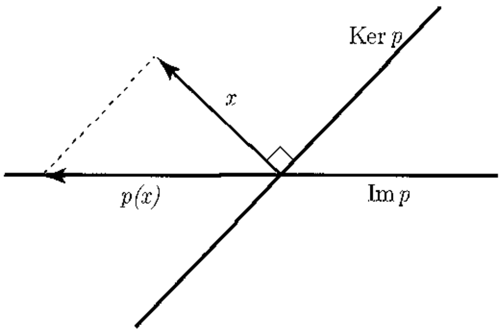
On a donc bien $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

• Montrons la réciproque. On suppose donc $\|\|p\|\| \leqslant 1$. Soit $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$. On va montrer que $x \perp y$. Appliquons l'hypothèse au vecteur $x + \lambda y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\|p(x+\lambda y)\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2$ et donc

$$\lambda^2\|y\|^2 \leqslant \lambda^2\|y\|^2 + \|x\|^{\,2} + 2\lambda\langle x, y\rangle.$$

La fonction affine $\lambda \longmapsto \|x\|^{\,2} + 2\lambda\langle x, y\rangle$ étant positive sur $\mathbb{R}$, elle est forcément constante et $\langle x, y\rangle = 0$. Donc $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$ et p est un projecteur orthogonal. $\triangleleft$

Une autre manière de montrer la réciproque consiste à prouver la contraposée : si p n'est pas orthogonal il est facile de voir, à l'aide du théorème de Pythagore, que si x est un vecteur de $(\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ qui n'est pas dans $\operatorname{Im} p$ (et il en existe) alors $\|p(x)\| > \|x\|$.



1.10. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (2)

> Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ euclidien tels que,
>
> $$\forall v \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathrm{A}v \in \mathcal{E} \text{ et } v - \mathrm{A}v \in \mathcal{E}^{\perp}.$$
>
> Que dire de A et de $\mathcal{E}$?
>
> **(École polytechnique)**

$\triangleright$ **Solution.**

La première hypothèse signifie que $\operatorname{Im} \mathrm{A} \subset \mathcal{E}$. On va montrer qu'il y a égalité. Soit $x \in \mathcal{E}$. On a

$$\|x - \mathrm{A}x\|^2 = \langle x, x - \mathrm{A}x\rangle - \langle \mathrm{A}x, x - \mathrm{A}x\rangle = 0 - 0 = 0$$

d'après la seconde hypothèse. Donc $x = \mathrm{A}x \in \operatorname{Im} \mathrm{A}$.

On a donc montré que $\mathcal{E} = \operatorname{Im} \mathrm{A}$ et que tout vecteur de $\mathcal{E}$ est fixe par A. Par suite, $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E et A est une projection sur $\mathcal{E}$. Or, comme $x - Ax \in \mathcal{E}^{\perp}$ pour tout x, la projection A est orthogonale.

Conclusion. $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et A est la projection orthogonale sur $\mathcal{E}$. $\lhd$

1.11. Norme des projetés d'une base orthonormale

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension m. On note p la projection orthogonale de E sur F.

1. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$ lorsque $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale de E.

2. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels compris entre 0 et 1 dont la somme est m. Montrer l'existence d'une base orthonormale $(e_i)_{1 \leqslant i < n}$ de E telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|p(e_i)\|^2 = a_i$.

(**École normale supérieure**)

Solution.

1. On a, pour tout $i \in]\!]1, n]\!]$,

$$\|p(e_i\|^2 = (p(e_i), p(e_i)\rangle = \langle p(e_i), e_i\rangle,$$

car $p(e_i)$ est orthogonal à $e_i - p(e_i)$. On en déduit, puisque la base est orthonormale,

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{Tr}(p) = m,$$

car la trace d'un projecteur est égale à son rang. On note que par ailleurs on a $0 \leqslant \|p(e_i)\|^2 \leqslant \|e_i\|^2 \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2. On observe que si $m = n$, tous les a_i sont nécessairement égaux à 1 et $p = \mathrm{Id}_E$: dans ce cas toute base orthonormale de E convient. Il en est de même lorsque $m = 0$ (tous les a_i sont égaux à 0 et $p = 0$).

On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $m = 0$ ou $m = 1$ et la remarque précédente permet de conclure.

On suppose que la propriété est vérifiée pour un espace vectoriel de dimension $n-1$ ($n \geqslant 2$) et on la démontre pour un espace de dimension n. On peut supposer que $0 < m < n$. Soit e un vecteur unitaire de $F^{\perp}$ et $E' = e^{\perp}$. L'espace vectoriel E' est de dimension $n-1$ et contient F. On veut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction p' de p à E'. Pour cela, il faudrait avoir $n-1$ coefficients de somme m, ce qui peut s'obtenir en regroupant deux coefficients a_i. On souhaite donc trouver i et j dans $[\![1. n]\!]$ distincts tels que $a_i + a_j \leqslant 1$. Si une telle paire n'existe pas, on a $\sum_{i<j}(a_i+a_j) > \mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, mais par ailleurs $\sum_{i<j}(a_i+a_j) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1)m$. On obtient donc $m > \dfrac{n}{2}\cdot$ Distinguons deux cas.

• Si on a $m \leqslant \dfrac{n}{2}$, on peut trouver deux indices i et j distincts tels que $a_i + a_j \leqslant 1$. On peut supposer que $a_{n-1} + a_n \leqslant 1$, car la propriété ne dépend pas de l'ordre des a_i. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-2}, e')$ de E′ telle que, pour tout i de $[\![1, n-2]\!]$, $\|p(e_i)\|^2 = \|p'(e_i)\|^2 = a_i$ et $\|p(e')\|^2 = \|p'(e')\|^2 = a_{n-1} + a_n$.

Par ailleurs $p(e) = 0$, puisque $e \in \mathrm{F}^\perp$. Si $a_n = 0$, la base $(e_1, \dots, e_{n-2}, e', e)$ convient. Sinon, on cherche e_{n-1} et e_n dans $\mathrm{Vect}(e', e)$ tels que $\|p(e_i)\|^2 = a_i$ pour $n-1 \leqslant i \leqslant n$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ posons $e_{n-1} = \cos\theta e' + \sin\theta e$ et $e_n = -\sin\theta e' + \cos\theta e$. On a fait tourner la base (e', e) d'un angle θ. Ces vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux et on a

$$\|p(e_{n-1})\|^2 = \cos^2\theta \|p(e')\|^2 = \cos^2\theta(a_{n-1} + a_n)$$

et

$$\|p(e_n)\|^2 = \sin^2\theta(a_{n-1} + a_n).$$

Il suffit de choisir θ tel que $\cos^2\theta = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n}$ pour que la base $(e_1, \dots, e_n)$ convienne.

• Si $m > \dfrac{n}{2}$, on a $n - m < \dfrac{n}{2}\cdot$ On considère la projection orthogonale q sur le sous-espace $\mathrm{F}^\perp$ de E. Les coefficients $1 - a_i$ appartiennent à $[0,1]$ et vérifient $\sum_{i=1}^{n}(1-a_i) = n - m$. Comme $\dim \mathrm{F}^\perp < \dfrac{n}{2}$, le raisonnement précédent s'applique à q et on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|q(e_i)\|^2 = 1 - a_i$. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|p(e_i)\|^2 = \|e_i\|^2 - \|q(e_i)\|^2 = 1 - (1 - a_i) = a_i$, ce qui termine la démonstration par récurrence.

Nous avons donc démontré qu'étant donné un projecteur orthogonal p de rang m, il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\|p(e_i)\|^2 = a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ si, et seulement si, les nombres a_i appartiennent à $[0,1]$ et ont pour somme m. ◁

Comme il a été montré dans la question 1 de l'exercice, les coefficients $\|p(e_i)\|^2$ *sont les coefficients diagonaux de la matrice* A *de* p *dans la base* $\mathcal{B}$. *Dans une base orthonormale de* E *formée d'une base de* F *et d'une base de* $\mathrm{F}^\perp$, *la matrice de* p *est* $\mathrm{J}_m = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ termes}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ termes}})$. *Comme* $\mathrm{A} = \mathrm{U}\mathrm{J}_m\mathrm{U}^{-1}$, *le problème posé se traduit matriciellement : il existe une matrice orthogonale* U *telle que* $\mathrm{U}\mathrm{J}_m\mathrm{U}^{-1}$ *ait pour diagonale* $(a_1, \dots, a_n)$ *si, et seulement si, les nombres* a_i *appartiennent à* $[0,1]$ *et ont pour* *somme m. La récurrence de la question 2 peut être faite en raisonnant matriciellement.*

L'exercice suivant est à rapprocher de l'exercice 6.11 du tome 1 d'algèbre.

1.12. Pseudo-inverse

Soit E et E′ deux espaces euclidiens, $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $b \in \mathcal{L}(\mathrm{E}', \mathrm{E})$ telle que :

(i) $a \circ b$ et $b \circ a$ sont symétriques ;

(ii) $a \circ b \circ a = a$ et $b \circ a \circ b = b$.

(**École polytechnique**)

Solution.

Pour alléger la rédaction nous noterons la composée de deux applications linéaires par simple juxtaposition en omettant le symbole $\circ$.

• *Analyse.* Supposons que b soit une solution du problème. On a alors $abab = ab$ et $baba = ba$, donc ab et ba sont des projecteurs. Comme ce sont des endomorphismes symétriques, il s'agit de projecteurs orthogonaux. On va préciser les images de ces projecteurs.

Pour tout $x \in \operatorname{Ker} ba$, on a $a(x) = aba(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker} ba \subset \operatorname{Ker} a$. Comme l'inclusion inverse est toujours vérifiée, on en déduit que $\operatorname{Ker} ba = \operatorname{Ker} a$. Donc ba est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} a)^{\perp}$. On a, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $ab(a(x)) = a(x)$. On en déduit que $\operatorname{Im} a \subset \operatorname{Im} ab$. Comme on a toujours l'inclusion inverse, on en déduit que $\operatorname{Im} ab = \operatorname{Im} a$, puis que $\operatorname{Ker} ab = (\operatorname{Im} a)^{\perp}$.

Essayons maintenant de caractériser b. Comme $\operatorname{Im} ba = (\operatorname{Ker} a)^{\perp}$ on a pour tout $x \in (\operatorname{Ker} a)^{\perp}$, $b(a(x)) = x$. Or la restriction a' de a à $(\operatorname{Ker} a)^{\perp}$ établit un isomorphisme entre $(\operatorname{Ker} a)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} a$. On en déduit que, pour tout $x \in \operatorname{Im} a$,

$$b(x) = {a'}^{-1}(x).$$

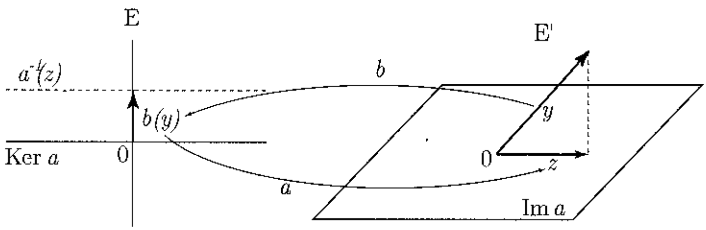
Si on prend $x \in (\operatorname{Im} a)^{\perp}$, on a $(ab)(x) = 0$ et donc $b(x) = (bab)(x) = 0$.

Cette analyse montre donc que si b existe il est unique et caractérisé par $b_{|\operatorname{Im} a} = {a'}^{-1}$ et $b_{|(\operatorname{Im} a)^{\perp}} = 0$.

• *Synthèse.* Il existe évidemment une application linéaire b de E′ dans E dont la restriction à $\operatorname{Im} a$ soit ${a'}^{-1}$ et la restriction à $(\operatorname{Im} a)^{\perp}$ soit nulle. Montrons qu'elle a bien les propriétés voulues. On a $ba = {a'}^{-1}a$, donc ba est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} a)^{\perp}$. De même, $ab_{|(\operatorname{Im} a)^{\perp}} = 0$ et $ab_{|\operatorname{Im} a} = a{a'}^{-1} = \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} a}$, donc ab est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} a$. On en déduit que (i) est vérifié, puisqu'une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

L'égalité $aba = a$ résulte du fait que ab est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} a$; de même, on a $bab = b$, car ba est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} a)^\perp$ et $\operatorname{Im} b = (\operatorname{Ker} a)^\perp$. Ainsi (ii) est vérifié. ◁

Donnons une description géométrique de ce pseudo-inverse b. L'application linéaire a est quelconque et a priori ni injective ni surjective. Une équation $a(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$ n'a donc pas forcément de solution et si elle en a, il n'y a pas forcément unicité. Si $y \in \mathrm{E}'$ est fixé, l'idée est chercher l'élément de $\operatorname{Im} a$ *le plus proche de y à savoir le projeté orthogonal de y sur* $\operatorname{Im} a$. *Notons-le z. Parmi tous les antécédents de z, il y en a un unique dans l'orthogonal de* $\operatorname{Ker} a$. *C'est cet antécédent qui est l'image de y par b. Ce choix a le mérite de préserver la symétrie : si b est le pseudo-inverse de a, alors a est le pseudo-inverse de b. Voir aussi l'exercice 2.24 pour une expression du pseudo-inverse.*



Cette notion intervient dans de nombreux domaines : analyse fonctionnelle, traitement du signal, réseaux de neurones...

Dans l'exercice suivant on pourra utiliser la caractérisation des projecteurs orthogonaux vue en 1.9.

1.13. Condition pour que deux projecteurs orthogonaux commutent

Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer l'équivalence entre

(i) $p \circ q = q \circ p$;

(ii) $p \circ q$ est un projecteur ;

(iii) p et q possèdent une base commune de diagonalisation.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• On a $(i) \Longrightarrow (iii)$. C'est un résultat général : deux endomorphismes diagonalisables qui commutent peuvent se diagonaliser dans une même base (voir l'exercice 2.19 du tome 2 d'algèbre). Notons que (i) implique aussi trivialement (ii), puisque si (i) est vérifié, on a

$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q.$$

Cette implication est d'ailleurs vraie pour des projecteurs quelconques.

• On a $(iii) \Longrightarrow (i)$. Si p et q se diagonalisent dans une même base, ils commutent forcément.

• Il reste donc à prouver que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Le fait que l'on travaille avec des projecteurs orthogonaux est ici fondamental. On verra plus loin que le résultat est faux avec des projecteurs quelconques. L'idée est d'utiliser la caractérisation de l'exercice 1.9. En effet, si $x \in \mathrm{E}$, on a, puisque p et q sont orthogonaux,

$$\|(p \circ q)(x)\| = \|p(q(x))\| \leqslant \|q(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Ainsi, $p \circ q$ est orthogonal et donc auto-adjoint. Il vient alors

$$p \circ q = (p \circ q)^* = q^* \circ p^* = q \circ p.$$

D'où le résultat. $\lhd$

Si les projecteurs p et q ne sont pas orthogonaux, $p \circ q$ peut être un projecteur sans que p et q commutent, comme on le voit en considérant les projecteurs p et q de $\mathbb{R}^2$ de matrices respectives $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On peut en effet vérifier que $p \circ q = 0$ et $q \circ p \neq 0$.

Le fait qu'un projecteur orthogonal diminue les longueurs intervient encore dans l'exercice suivant. Attirons également l'attention sur une propriété reliant image et noyau d'une application linéaire et de son adjoint : si $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est une application linéaire entre deux espaces euclidiens, on a $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$.

1.14. Composition de projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien, $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_k$ des sous-espaces vectoriels de E et $p_1, \ldots, p_k$ les projecteurs orthogonaux sur $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_k$. On pose $q = p_k \circ \cdots \circ p_1$ et $\mathrm{N}_0 = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_i$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|q(x)\| = \|x\| \iff x \in \mathrm{N}_0$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}) = \mathrm{N}_0$.
En déduire que $\mathrm{Ker}(q^* - \mathrm{Id}) = \mathrm{N}_0$.

3. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{N}_0 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(q - \mathrm{Id})$.

4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que pour tout n, $\|x_n\| \leqslant 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \|q(x_n)\| = 1$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \|(q - \mathrm{Id})(x_n)\| = 0$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Il est clair qu'un vecteur x de N_0 est laissé fixe par q, puisqu'il l'est par tous les projecteurs p_i. En particulier, on a $\|q(x)\| = \|x\|$. Réciproquement, soit x un vecteur qui n'est pas dans N_0. Notons i le plus petit indice tel que $x \notin \mathrm{N}_i$. On a $p_1(x) = \cdots = p_{i-1}(x)$ mais $p_i(x) \neq x$. On a alors $\|p_i(x)\| < \|x\|$: cela découle simplement du théorème de Pythagore, puisque $\|x\|^2 = \|p_i(x)\|^2 + \|x - p_i(x)\|^2$. Les projecteurs $p_{i+1}, \ldots, p_k$ ne pouvant pas augmenter la norme, on a donc $\|q(x)\| < \|x\|$.

On a donc $\|q(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout vecteur x de E et il y a égalité si et seulement si $x \in \mathrm{N}_0$.

2. L'égalité $\mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}) = \mathrm{N}_0$ découle directement de ce qui précède. On a $q^* = p_1^* \circ \cdots \circ p_k^* = p_1 \circ \cdots \circ p_k$: il s'agit de la composée des mêmes projecteurs mais dans un ordre différent. En appliquant le résultat précédent, on a donc aussi

$$\mathrm{Ker}(q^* - \mathrm{Id}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{N}_i = \mathrm{N}_0.$$

3. On a $\mathrm{N}_0 = \mathrm{Ker}(q^* - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id})^* = \mathrm{Im}(q - \mathrm{Id})^{\perp}$. Donc N_0 est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(q - \mathrm{Id})$. On a bien $\mathrm{E} = \mathrm{N}_0 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(q - \mathrm{Id})$.

4. La suite $(\|(q - \mathrm{Id})(x_n)\|)$ est bornée par 2. Supposons par l'absurde qu'elle ne converge pas vers 0. Elle admet alors une valeur d'adhérence $\alpha > 0$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extraction telle que $\|(q - \mathrm{Id})(x_{\varphi(n)})\|$ tende vers α. Quitte à encore prendre une sous-suite de celle-ci, on peut très bien supposer que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge aussi vers un vecteur a avec $\|a\| \leqslant 1$. Alors, la suite $\| q(x_{\varphi(n)})\|$ converge vers $\|q(a)\|$ et donc $\|q(a)\| = 1$. Et, toujours en passant à la limite, on a aussi, $\|q(a) - a\| = \alpha$. Or, on a $1 = \|q(a)\| \leqslant \|a\| \leqslant 1$ de sorte qu'il y a égalité $\|q(a)\| = \|a\| = 1$. D'où la contradiction, car d'après la question 1, $q(a) - a$ doit alors être nul et ne peut donc avoir une norme égale à α. ◁

La situation de l'exercice précédent est un cas particulier du suivant.

1.15. Contraction d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $|||u||| \leqslant 1$. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et que la suite $v_p = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u^k$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Le fait que $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$ sont en somme directe est très général et reste valable pour une contraction d'un espace vectoriel normé quelconque. En effet, soit x dans l'intersection des deux espaces. On a $u(x)=x$ et x s'écrit $x=u(y)-y$ pour un certain vecteur y. On a donc aussi $x=u(x)=u^2(y)-u(y)$ puis $x=u^3(y)-u^2(y)$ et ainsi de suite $x=u^{k+1}(y)-u^k(y)$ pour tout entier $k\geqslant 0$. Sommons ces égalités pour k variant entre 0 et un entier $p-1$. On obtient $px=u^p(y)-y$. On en déduit que

$$\|x\|=\frac{\|u^p(y)-y\|}{p}\leqslant\frac{\|u^p(y)\|+\|y\|}{p}\leqslant\frac{2\|y\|}{p}.$$

En faisant tendre p vers l'infini, on a donc $x=0$. La somme de $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$ est donc directe et, comme E est de dimension finie, on a bien $\mathrm{E}=\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$ par le théorème du rang.

• On va montrer maintenant que la suite (v_p) converge vers la projection sur $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$. Notons tout d'abord que si $x\in\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$, on a $u(x)=x$ et donc $v_p(x)=x$ pour tout p. Prenons maintenant x dans $\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$ que l'on écrit comme avant $x=u(y)-y$. On a $u^k(x)=u^{k+1}(y)-u^k(y)$ pour tout $k\geqslant 0$ de sorte que $v_p(x)=\dfrac{1}{p+1}\,(u^{p+1}(y)-y)$ et cela tend vers 0 comme précédemment. Ainsi, (v_p) converge bien vers p, le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$.

Pour finir, prouvons que ce projecteur est orthogonal. On a, pour tout k, $\|u^k\|\leqslant\|u\|^k\leqslant 1$ (par sous-multiplicativité de la norme triple) et donc, par inégalité triangulaire, on a $\|v_p\|\leqslant 1$ pour tout entier p. En passant à la limite, on a donc $\|p\|\leqslant 1$. Il est classique (voir l'exercice 1.9) que cela permet de dire que p est un projecteur orthogonal et donc que $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})\perp\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})$. ◁

On peut donner une autre solution pour l'orthogonalité de l'image et du noyau à l'aide de l'adjoint. En effet, comme

$$\|u\|=\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ \|y\|\leqslant 1}}\langle u(x),y\rangle=\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ \|y\|\leqslant 1}}\langle x,u^*(y)\rangle=\|u^*\|,$$

on a $\|u^*\|=\|u\|\leqslant 1$. *Soit alors* $x\in\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})$. *On a*

$$\|u^*(x)-x\|^2=\|u^*(x)\|^2-2\langle x,u^*(x)\rangle+\|x\|^2=\|u^*(x)\|^2-2\langle u(x),x\rangle+\|x\|^2$$

et donc $\|u^*(x)-x\|^2\leqslant\|x\|^2-2\|x\|^2+\|x\|^2=0$ *et donc* $u^*(x)=x$. *Par symétrie, on a donc* $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id})=\operatorname{Ker}(u^*-\mathrm{Id})=\operatorname{Im}(u-\mathrm{Id})^\perp$. *Cette approche à été proposée dans un autre exercice d'oral posé à l'École polytechnique.*

Lorsqu'on dispose d'un sous-espace de dimension finie F *dans un espace réel* E *muni d'un produit scalaire, nous savons que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^{\perp}$. *Il en résulte notamment que pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on peut écrire* $x = x_{\mathrm{F}} + y$ *avec* $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ *et* $y \in \mathrm{F}^{\perp}$. *Par définition,* x_{F} *est le projeté orthogonal de* x *sur* F. *On vérifie facilement à l'aide du théorème de Pythagore que*

$$\|x - x_{\mathrm{F}}\| = d(x, \mathrm{F}) = \inf_{f \in \mathrm{F}} \|x - f\|$$

et que x_{F} *est l'unique point de* F *pour lequel la distance à* F *est atteinte.*

Un calcul de borne inférieure peut souvent s'interpréter en termes de distance à un sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien. En voici un exemple.

1.16. Distance à un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$

Évaluer

$$\inf_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 \, dx.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, en posant pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{P}(x) \mathrm{Q}(x) \, dx.$$

L'expression que l'on cherche à minimiser est égale à $\|1 + \mathrm{P}\|^2$ où $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{X}^i$: c'est le carré de la distance entre P et -1. Quand les a_i varient dans $\mathbb{R}$, P décrit le sous-espace $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}[X]$ qui est de dimension finie. Il en résulte que la distance entre P et -1 possède un minimum, atteint pour un unique polynôme, à savoir le projeté orthogonal de -1 sur E. Ce projeté, que nous appellerons toujours P, est caractérisé par le fait que, $\langle \mathrm{P} + 1, \mathrm{X}^k \rangle = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Calculons ces produits scalaires

$$\langle \mathrm{P} + 1, \mathrm{X}^k \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} \Big(x^k + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{k+i} \Big) dx.$$

On vérifie aisément que, pour tout entier n, $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!$ (en utilisant ses connaissances sur la fonction Gamma, ou plus prosaïquement, par récurrence à l'aide d'une intégration par parties). On a donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k! + \sum_{i=1}^{n} a_i(k+i)! = 0$, ce qui peut s'écrire en divisant par $k!$,

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i(k+1)(k+2)\dots(k+i) = 0.$$

On va voir qu'il n'est pas indispensable d'expliciter P, c'est-à-dire de résoudre ce système linéaire, pour trouver la distance de P à -1. En effet, le minimum cherché vaut

$$\begin{aligned}\|\mathrm{P}+1\|^2 &= \langle \mathrm{P}+1, \mathrm{P}+1\rangle = \langle \mathrm{P}+1, 1\rangle \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + \dots + a_nx^n)\,\mathrm{d}x = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i i!,\end{aligned}$$

car $\mathrm{P}+1$ est orthogonal à P.

Considérons alors le polynôme $\mathrm{Q} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{X}+1)\dots(\mathrm{X}+i)$. Il est de degré inférieur ou égal à n, le coefficient de X^n étant a_n. Il s'agit de calculer $\mathrm{Q}(0)$. Or les relations d'orthogonalité qui définissent P s'écrivent $\mathrm{Q}(1) = \dots = \mathrm{Q}(n) = 0$. On a donc $\mathrm{Q} = a_n(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n)$ et $\mathrm{Q}(0) = a_n(-1)^n\, n!$. On remarque de plus que $\mathrm{Q}(-1) = 1$, c'est-à-dire que $a_n(-1)^n(n+1)! = 1$. Ainsi $(-1)^n a_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ et finalement $\mathrm{Q}(0) = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$. Le minimum cherché vaut $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$. ◁

Il est important de retenir que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire à l'aide de la trace :

$$(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}n_{ij} = \mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{MN})$$

pour $\mathrm{M} = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *et* $\mathrm{N} = (n_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *La norme euclidienne associée est*

$$\|\mathrm{M}\| = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}^2} = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{MM})}.$$

L'exercice qui vient constitue une présentation générale de ce produit scalaire et le suivant s'inscrit dans le thème des calculs des distances.

1.17. Norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On pose $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AA})}$ pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N est une norme.

2. Montrer que $|\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{N}(\mathrm{A})$.
3. Montrer que si $\mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{N}(\mathrm{AO}) = \mathrm{N}(\mathrm{OA}) = \mathrm{N}(\mathrm{A})$.
4. Montrer que $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$.
5. Comparer N avec d'autres normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il suffit d'observer que l'application $\Phi : (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longmapsto \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{AB})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (N est tout simplement la norme euclidienne associée à ce produit scalaire). En effet, la bilinéarité de Φ est une conséquence de la linéarité de la trace et de la transposition. Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{AB}) = \operatorname{Tr}({}^t({}^t\mathrm{AB})) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{B}\,{}^t({}^t\mathrm{A})) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{BA}) = \Phi(\mathrm{B}, \mathrm{A}).$$

Quant au caractère défini positif, il provient du fait que si $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$ qui est strictement positif pour A non nulle.

2. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire ci-dessus :

$$|\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| = |\operatorname{Tr}(\mathrm{IA})| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{I})\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sqrt{n}\,\mathrm{N}(\mathrm{A}).$$

Comme il y a égalité pour $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, *on en déduit que la triple norme de la forme linéaire* $\operatorname{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est égale à* $\sqrt{n}$.

3. Pour $\mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{Tr}({}^t(\mathrm{OA})(\mathrm{OA})) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{OOA}) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{AA}),$$

et donc $\mathrm{N}(\mathrm{OA}) = \mathrm{N}(\mathrm{A})$. De même, on a

$$\operatorname{Tr}({}^t(\mathrm{AO})(\mathrm{AO})) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{AAO}) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{AAO}\,{}^t\mathrm{O}) = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{AA})$$

et donc $\mathrm{N}(\mathrm{AO}) = \mathrm{N}(\mathrm{A})$.

4. Posons $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ avec $\mathrm{C} = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\mathrm{AB})^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_{ij}^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^2 \\
&\leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{l=1}^{n} b_{lj}^2 \right) \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} b_{lj}^2\right) = \mathrm{N}(\mathrm{A})^2\mathrm{N}(\mathrm{B})^2.$$

La norme N *est donc une norme d'algèbre.*

5. Pour $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $\|\mathrm{A}\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$ ainsi que $\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$. On définit ainsi deux normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathrm{A}\|_\infty \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) \leqslant n\|\mathrm{A}\|_\infty$$

et les constantes sont optimales. On a aussi

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}\|_1 \leqslant n\mathrm{N}(\mathrm{A})$$

avec des constantes également optimales. $\triangleleft$

1.18. Distance d'une matrice à l'espace des matrices symétriques

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille n et $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\inf_{\mathrm{M}=(m_{ij})\in\mathcal{S}} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2.$$

(École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

Il s'agit de déterminer $\inf_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} \|\mathrm{A}-\mathrm{M}\|^2$ pour la structure euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, autrement dit le carré de la distance de la matrice A au sous-espace $\mathcal{S}$. Nous savons que si H désigne le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}$, alors on a

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{H}\|^2 = \inf_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} \|\mathrm{A}-\mathrm{M}\|^2.$$

Cette borne inférieure, que nous noterons $d(\mathrm{A},\mathcal{S})^2$, est atteinte en H (et c'est d'ailleurs le seul point où elle est atteinte).

Nous savons que si $\mathcal{A}$ désigne le sous-espace des matrices antisymétriques réelles de taille n, alors $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En fait, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des supplémentaires orthogonaux, car si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}$ et $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{M}\mathrm{N}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}\mathrm{N}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}(-{}^t\mathrm{N})) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{N})\\ &= -\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{N}\mathrm{M}) = -\langle \mathrm{N},\mathrm{M}\rangle = -\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle\end{aligned}$$

d'où $\langle \mathrm{M}, \mathrm{N}\rangle = 0$. Ainsi, on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}$ et donc $\mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2}$, et $\mathrm{A} - \mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}}{2}\cdot$ Il en résulte que

$$\boxed{d(\mathrm{A}, \mathcal{S})^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - a_{ji})^2}. \triangleleft$$

Notons qu'il est possible de résoudre cet exercice très élémentairement sans introduire le formalisme ci-dessus puisqu'on se ramène simplement à minimiser le trinôme $(x - a_{ij})^2 + (x - a_{ji})^2$ pour $i \neq j$.

On retrouve le produit scalaire canonique sur un espace de matrices dans l'exercice suivant, mais il s'agit cette fois de matrices rectangulaires. Le problème consiste encore à calculer des distances mais cette fois à des sous-espaces affines.

1.19. Problèmes de minimisation dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

Soit $\Phi : \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB})$.

1. Établir que Φ est un produit scalaire. On notera $\| \ \|$ la norme associée.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^q$, $a \neq 0$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ fixés dans la suite. Pour $b \in \mathbb{R}^p$, on note $\Omega(b) = \{\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), (\mathrm{A} + \mathrm{Y})a = b\}$. Montrer que $\Omega(b)$ est non vide et qu'il contient un élément de norme minimum. Cet élément sera noté $f(b)$. Expliciter $f(b)$.

3. Soit $c \in \mathbb{R}^p$ et

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q+1}(\mathbb{R}) \\ \phi : & x & \longmapsto & (f(c+x), x). \end{array}$$

Trouver x qui minimise $\|\phi(x)\|$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Φ est bien définie et bilinéaire, car la trace est linéaire ; elle est symétrique car pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2$,

$$\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}({}^t({}^t\mathrm{AB})) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{BA}) = \Phi(\mathrm{B}, \mathrm{A}),$$

étant donné qu'une matrice carrée et sa transposée ont la même trace. Enfin, si $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a

$$\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AA}) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} a_{ij}^2 \geqslant 0,$$

avec inégalité stricte pour A non nulle, ce qui montre que Φ est définie positive.

Ainsi, Φ est un produit scalaire. On note que sur $\mathbb{R}^p$, que nous identifierons à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, il coïncide avec le produit scalaire canonique.

2. Les éléments $a \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ étant fixés, considérons l'application linéaire

$$\varphi : \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{Y}a \in \mathbb{R}^p.$$

On observe que

$$\mathrm{Y} \in \Omega(b) \Longleftrightarrow \varphi(\mathrm{Y}) = b - \mathrm{A}a.$$

Pour démontrer que $\Omega(b)$ n'est pas vide, il suffit de démontrer que φ est surjective. L'ensemble $\Omega(b)$ sera alors un sous-espace affine de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dirigé par $\operatorname{Ker}\varphi$.

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Puisque a est non nul, il est évident qu'il existe une application linéaire $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ telle que $l(a) = x$ (pour en définir une il suffit par exemple de compléter a en une base de $\mathbb{R}^q$). Si on note Y la matrice de l dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$, on a bien $\mathrm{Y}a = x$. Cela démontre que φ est surjective et que $\Omega(b)$ est non vide.

Il est alors clair que $\Omega(b)$ admet un élément de norme minimale : c'est tout simplement le projeté orthogonal de la matrice nulle sur $\Omega(b)$ qui réalise la distance de cette matrice nulle au sous-espace affine $\Omega(b)$. Notons-le $f(b)$. C'est le seul élément de $\Omega(b)$ qui se trouve dans $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$. C'est ce dernier point qui va nous permettre d'expliciter $f(b)$.

Nous savons que $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp = \operatorname{Im}\varphi^*$, où $\varphi^* : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est l'adjoint de φ. Déterminons φ^*. On notera comme d'habitude $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ identifié à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Pour $(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \in \mathcal{M}_{p,q} \times \mathcal{M}_{p,1}$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{Y}, \varphi^*(\mathrm{Z})) &= \langle \varphi(\mathrm{Y}), \mathrm{Z} \rangle = \langle \mathrm{Y}a, \mathrm{Z} \rangle = {}^t(\mathrm{Y}a)\mathrm{Z} \\ &= \mathrm{Tr}({}^ta\,{}^t\mathrm{YZ}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{YZ}\,{}^ta) = \Phi(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}\,{}^ta).\end{aligned}$$

On en déduit que φ^* est définie par $\varphi^*(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}\,{}^ta$ pour tout $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}^p$ et que $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$ est l'ensemble des matrices de la forme $\mathrm{Z}\,{}^ta$, avec $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}^p$.

Cherchons alors $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(b) = \mathrm{Z}\,{}^ta$. On a, par définition,

$$\varphi(f(b)) = f(b)a = \mathrm{Z}\,{}^taa = \|a\|^2\mathrm{Z}.$$

Ainsi $\varphi(f(b))$ est égal à $b - \mathrm{A}a$ si, et seulement si, $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{\|a\|^2}(b - \mathrm{A}a)$, ce qui nous donne

$$\boxed{f(b) = \frac{1}{\|a\|^2}(b - \mathrm{A}a)\,{}^ta}.$$

3. Par définition du produit scalaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\|\phi(x)\|^2 = \|f(x+c)\|^2 + \|x\|^2.$$

Calculons $\|f(x+c)\|^2$, c'est-à-dire $\mathrm{Tr}({}^t f(x+c) f(x+c))$. On obtient

$$\begin{aligned}
\|f(x+c)\|^2 &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\|a\|^2}\, a\,{}^t(c+x-\mathrm{A}a)\,\frac{1}{\|a\|^2}\,(c+x-\mathrm{A}a)\,{}^t a\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\|a\|^4}\;{}^t(c+x-\mathrm{A}a)(c+x-\mathrm{A}a)\,{}^t a a\right)\\
&= \frac{1}{\|a\|^2}\,\mathrm{Tr}({}^t(c+x-\mathrm{A}a)(c+x-\mathrm{A}a)).
\end{aligned}$$

On a finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\|f(x+c)\|^2 = \frac{1}{\|a\|^2}\|c+x-\mathrm{A}a\|^2$$

et donc,

$$\|\phi(x)\|^2 = \frac{1}{\|a\|^2}\|c+x-\mathrm{A}a\|^2 + \|x\|^2.$$

Un simple développement du premier carré nous donne

$$\|\phi(x)\|^2 = \frac{1}{\|a\|^2}\left((1+\|a\|^2)\|x\|^2 + 2\Phi(c-\mathrm{A}a, x) + \|c-\mathrm{A}a\|^2\right),$$

$$\|\phi(x)\|^2 = \frac{1+\|a\|^2}{\|a\|^2}\left\|x + \frac{1}{1+\|a\|^2}(c-\mathrm{A}a)\right\|^2 + \frac{\|c-\mathrm{A}a\|^2}{1+\|a\|^2}.$$

Cela montre que $\|\phi(x)\|$ est minimal pour $\boxed{x = -\dfrac{1}{1+\|a\|^2}(c-\mathrm{A}a)}$. ◁

Les exercices suivants abordent le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui, à partir d'une suite libre, propose la construction d'une suite de vecteurs orthonormée. Précisons cela dans le cas d'une famille finie. On considère un espace réel E *muni d'un produit scalaire et* $(a_1, \ldots, a_p)$ *une famille libre de* E. *Il existe alors un unique système orthonormé* $(e_1, \ldots, e_p)$ *de* E *vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ *;*

(ii) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle a_k, e_k\rangle > 0$.

On démontre que le vecteur e_k *est nécessairement égal à* $\dfrac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}$ *avec*

$$\varepsilon_k = a_k - p_k(a_k) = a_k - \langle a_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1} - \cdots - \langle a_k, e_1\rangle e_1,$$

où p_k *désigne la projection orthogonale sur le sous-espace* $\mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_{k-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$. *Ces formules permettent le calcul effectif des* *vecteurs e_k par récurrence. Il est bon de garder à l'esprit que lorsqu'on exprime a_k en fonction des e_i par une combinaison linéaire, $a_k = \lambda_k e_k + \cdots + \lambda_1 e_1$, le coefficient $\lambda_k = \langle a_k, e_k \rangle$ est strictement positif. De même, si l'on pose $e_k = \mu_k a_k + \cdots + \mu_1 a_1$ (les μ_i étant réels), on a $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k} > 0$.*

1.20. Simplexes réguliers

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Une famille $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est dite régulière si les v_i sont de norme 1 et si pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ on a $\|v_i - v_j\| = 1$.

1. Montrer que toute famille régulière est libre et qu'il existe des familles régulières.

2. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir d'une famille régulière $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Montrer qu'il existe des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = a_i e_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} b_j e_j$.

Calculer a_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et b_i pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Notons qu'une famille régulière correspond tout simplement à un simplexe régulier dont l'un des sommets est l'origine en regardant E comme un espace affine. Par exemple dans le plan, deux vecteurs (v_1, v_2) forment une famille régulière si, et seulement si, le triangle $(0, v_1, v_2)$ est équilatéral (on parle de 3-simplexe). Cet exercice démontrera en particulier l'existence de $(n+1)$-simplexes dans un espace de dimension n (voir aussi l'exercice 1.27).

Algébriquement, une famille $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est régulière si, et seulement si,

$$\begin{cases} (i) \quad \|v_i\| = 1 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ (ii) \quad (v_i, v_j) = \dfrac{1}{2} \text{ pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{cases}$$

• Montrons pour commencer que toute famille régulière est libre.

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille régulière et si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ appartient à $\mathbb{R}^n$, alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|v_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j$$

et donc

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2.$$

On en déduit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ implique $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0$ et donc $\alpha_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$: la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre. On remarque que l'espace E étant supposé de dimension n, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

• Montrons qu'il existe des familles régulières. Plusieurs approches sont possibles. On pourrait prouver l'existence d'une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ ayant pour matrice de Gram la matrice contenant des 1 sur la diagonale et dont les autres coefficients valent tous $\frac{1}{2}\cdot$ Cette approche est suivie dans l'exercice 1.27. Nous allons ici donner une construction géométrique en raisonnant par récurrence sur la dimension n de E.

Si $n = 1$, un vecteur quelconque de norme 1 fait l'affaire. Supposons la propriété vérifiée pour un espace de dimension $n - 1$. Soit E un espace euclidien de dimension n. Considérons un sous-espace E′ de E, de dimension $n - 1$ et $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ une famille régulière de E′. Soit f un vecteur de $(\mathrm{E}')^{\perp}$, de norme 1. Cherchons v_n tel que $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ soit une famille régulière de E sous la forme

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \alpha f,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \alpha$ sont à déterminer. On a, pour $1 \leqslant j \leqslant n - 1$,

$$\langle v_n, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \lambda_j + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{2}\cdot$$

On veut, pour $1 \leqslant j \leqslant n - 1$, $\langle v_n, v_j\rangle = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\lambda_j + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{2} = \frac{1}{2},$$

soit encore $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_j = 1$.

Ce système linéaire admet une solution unique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ et on a alors

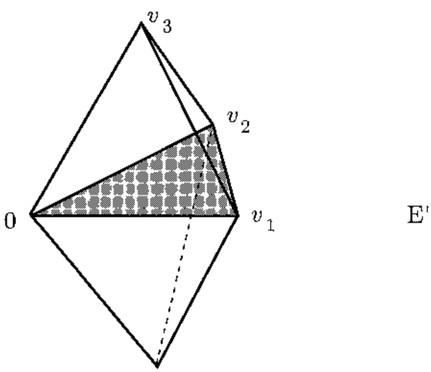
$$\|v_n\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i\right\|^2 + \alpha^2 = \frac{1}{n^2}\left\|\sum_{i=1}^{n-1} v_i\right\|^2 + \alpha^2.$$

Sachant que la famille $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est régulière, on obtient

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \|v_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \langle v_i, v_j \rangle$$
$$= n - 1 + 2 \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La condition $\|v_n\| = 1$ équivaut donc à $\alpha^2 = \dfrac{n+1}{2n}$.

On peut donc déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et α tels que $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ soit une famille régulière, ce qui termine la récurrence. On remarque que $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ étant donné, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont uniques et α est unique au signe près. Géométriquement, il y a seulement deux manières de compléter un n-simplexe régulier en un $(n+1)$-simplexe régulier (penser aux deux tétraèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$ qu'on peut construire sur un triangle équilatéral donné du plan $\mathbb{R}^2$).



2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à $(v_1, \ldots, v_n)$.

• Par définition, il existe, pour tout i compris entre 1 et n, une famille de réels $(t_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i}$ telle que $v_i = \sum_{j=1}^{i} t_{ij} e_j$ et $t_{ii} > 0$. Il s'agit de démontrer que t_{ij} à j fixé ne dépend pas de $i > j$.

Soient i et i' deux indices entre 1 et n, et k tel que $1 \leqslant k < i, i'$. On a, par définition d'une famille régulière, $\langle v_i, v_k \rangle = \langle v_{i'}, v_k \rangle = \dfrac{1}{2}$, et donc $\langle v_i - v_{i'}, v_k \rangle = 0$. On en déduit que pour $1 \leqslant j < i, i'$, $v_i - v_{i'}$ appartient à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_j)^{\perp}$. Or, par construction, $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_j)^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)^{\perp}$. On a donc $\langle v_i - v_{i'}, e_j \rangle = 0$, $\langle v_i, e_j \rangle = \langle v_{i'}, e_j \rangle$, c'est-à-dire $t_{ij} = t_{i'j}$, si $i > j$ et $i' > j$.

Autrement dit, t_{ij}, pour $j < i$, est indépendant de i ; on peut le noter b_j si $1 \leqslant j < n$. En notant $a_i = t_{ii}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtient $2n - 1$ réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $v_i = a_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j e_j$.

• Calculons maintenant les a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et les b_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{i-1} b_j e_j$ appartient à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{i-1})$ et e_i à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{i-1})^{\perp}$. Si l'on reprend la construction par récurrence de la question 1, on voit que a_i est égal au signe près au réel qui s'appelait α (en supposant ici que la dimension de E est i). On a donc $a_i^2 = \dfrac{i+1}{2i}$ et finalement, comme $a_i > 0$,

$$\boxed{a_i = \sqrt{\frac{i+1}{2i}}}.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a

$$\langle v_i, v_{i+1} \rangle = \sum_{j=1}^{i-1} b_j^2 + a_i b_i = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|v_i\|^2 = \sum_{j=1}^{i-1} b_j^2 + a_i^2 = 1.$$

On en déduit que $a_i b_i - a_i^2 = -\dfrac{1}{2}$ et donc

$$b_i = \frac{a_i^2 - \frac{1}{2}}{a_i} = \frac{\frac{i+1}{2i} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{i+1}{2i}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}}. \quad \triangleleft$$

Une interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt mène directement à la décomposition QR *d'une matrice inversible. Comme application directe, on obtient l'inégalité d'Hadamard qui majore le déterminant d'une matrice réelle. Tout cela est au programme de l'exercice suivant.*

1.21. Décomposition QR et inégalité d'Hadamard

1. *Décomposition* QR. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tel que $A = QR$.

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes. Montrer que

$$|\det A| \leqslant \|C_1\| \ldots \|C_n\|$$

où $\| \ \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Étudier le cas d'égalité.

3. En déduire, si l'on pose $\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$, une constante c, indépendante de n, telle que $|\det A| \leqslant c\|A\|_\infty^n n^{\frac{n}{2}}$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(École polytechnique)

Solution.

1. Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A, qui forment une base de $\mathbb{R}^n$ puisque A est inversible. Orthonormalisons la base $(C_1, \dots, C_n)$ au sens de Gram-Schmidt en une base orthonormale $(D_1, \dots, D_n)$. Notons R la matrice de passage de $(D_1, \dots, D_n)$ à $(C_1, \dots, C_n)$. Par définition, cette matrice R est triangulaire supérieure, car $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k) = \mathrm{Vect}(D_1, \dots, D_k)$ pour tout k et de plus ses coefficients diagonaux sont strictement positifs, puisque le coefficient (k,k) vaut (C_k, D_k). Notons enfin Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $(D_1, \dots, D_n)$. Comme ces deux dernières bases sont orthonormales, on a $Q \in O_n(\mathbb{R})$. Enfin A est simplement la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $(C_1, \dots, C_n)$ et on a donc la formule de changement de base $A = QR$. C'est le résultat voulu. L'unicité provient de l'unicité dans l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, car si $A = Q'R'$ est une autre décomposition, il est facile de voir que les colonnes de Q' forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui est l'orthonormalisée de $(C_1, \dots, C_n)$. Donc $Q' = Q$ puis $R' = R$.

Le lecteur trouvera dans le chapitre 2 une autre manière d'obtenir cette décomposition (cf. exercice 2.29). L'unicité peut aussi s'obtenir matriciellement : elle découle du fait que la seule matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs qui est orthogonale est l'identité.

2. L'inégalité est triviale si A n'est pas inversible. Supposons A inversible et considérons la décomposition de la question précédente $A = QR$. On a $|\det A| = |\det R| = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$ (les t_{ij} désignant les coefficients de R). Or, en reprenant les notations de la question 1, $t_{ii} = (C_i, D_i) \leqslant \|C_i\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le résultat en découle.

Étudions le cas d'égalité. Si A n'est pas inversible il y a égalité si, et seulement si, l'une des colonnes de A est nulle. Sinon, il y a égalité si, et seulement si, C_i est colinéaire à D_i pour tout i. Cela signifie que la famille des colonnes de A est orthogonale.

Géométriquement, $|\det A|$ *représente le volume dans* $\mathbb{R}^n$ *du parallélotope défini par les vecteurs colonnes de A. L'inégalité de Hadamard signifie que ce volume est plus petit que le produit des longueurs* *des côtés et que, dans le cas où le parallélotope n'est pas aplati, il y a égalité si. et seulement si, le parallélotope est droit.*

3. C'est une application directe de la question précédente. On a $\|C_k\| \leqslant \sqrt{n}\|A\|_\infty$ pour tout k et donc $|\det A| \leqslant n^{n/2}\|A\|_\infty^n$. C'est le résultat avec la constante $c = 1$.

En se plaçant dans $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne canonique, on montre par une argumentation tout à fait analogue que les majorations des questions 2 et 3 restent vraies pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans l'exercice suivant on applique l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une suite infinie : la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

1.22. Base orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(a_n)Q^{(n)}(a_n).$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Calculer $P_i^{(j)}(a_j)$ pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \int_{a_0}^{x} dt_1 \int_{a_1}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n.$$

4. Calculer P_n lorsque $a_n = n\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Notons d'abord que si $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini puisque dans la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(a_n)Q^{(n)}(a_n)$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls (car pour n assez grand, $P^{(n)} = Q^{(n)} = 0$). La bilinéarité est une conséquence de la linéarité de la dérivation et la symétrie est claire. Enfin, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\langle P, P\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(a_n)^2 \geqslant 0.$$

De plus, si $P \neq 0$ et $p = \deg P$, en notant α son coefficient dominant on obtient
$$\langle P, P \rangle \geqslant P^{(p)}(a_p)^2 = \alpha^2 (p!)^2 > 0.$$
Il s'agit donc d'un produit scalaire.

2. Comme pour $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_i) = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^i) = \mathbb{R}_i[X]$ et $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{i-1}) = \mathbb{R}_{i-1}[X]$, le degré de P_i vaut nécessairement i. Ainsi, P_0 est une constante c ; on doit avoir $\langle P_0, P_0 \rangle = c^2 = 1$ et $\langle P_0, 1 \rangle = c > 0$, donc $P_0 = 1$. Soit maintenant $i \in \mathbb{N}^*$.

• Si $j > i$ on a, pour des raisons de degré, $P_i^{(j)} = 0$ et $P_i^{(j)}(a_j) = 0$.

• Montrons par récurrence sur $j \in [\![0, i-1]\!]$ que $P_i^{(j)}(a_j) = 0$.

On a $\langle P_i, 1 \rangle = 0$ *i.e.* $P_i(a_0) \times 1 = 0$. C'est vérifié pour $j = 0$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $j - 1$ avec $1 \leqslant j \leqslant i - 1$. On a par hypothèse de récurrence
$$0 = \langle P_i, X^j \rangle = \sum_{k=0}^{j} \underbrace{P_i^{(k)}(a_k)}_{\text{nul si } k < j} \frac{j!}{(j-k)!} a_k^{j-k} = P_i^{(j)}(a_j) j!.$$
On obtient donc bien $P_i^{(j)}(a_j) = 0$.

• Calculons enfin $P_i^{(i)}(a_i)$. Compte-tenu de ce qui précède, on a d'une part $0 < \langle P_i, X^i \rangle = P_i^{(i)}(a_i) i!$ et d'autre part
$$1 = \langle P_i, P_i \rangle = P_i^{(i)}(a_i)^2.$$
Comme $P_i^{(i)}(a_i) > 0$, il en résulte que $P_i^{(i)}(a_i) = 1$.

On conclut que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P_i^{(j)}(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$,
$$Q_n(x) = \int_{a_0}^{x} \mathrm{d}t_1 \int_{a_1}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n.$$
Il est clair que Q_n est une fonction polynomiale de degré n (il s'agit d'une intégration successive de fonctions polynômes). Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que, pour toute suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$, et pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, $Q_n^{(j)}(a_j) = \delta_{nj}$. Pour des raisons de degré, c'est déjà vrai pour tout n lorsque $j > n$. On se préoccupera donc seulement des indices $j \leqslant n$ dans la récurrence. On a $Q_1 : x \longmapsto \int_{a_0}^{x} \mathrm{d}t_1 = x - a_0$. On a bien $Q_1(a_0) = 0$ et $Q_1'(a_1) = 1$. C'est valable pour $n = 1$.

Supposons $n \geqslant 2$ et le résultat vrai au rang $n-1$. On a déjà $Q_n(a_0) = 0$. En dérivant Q_n, on obtient
$$Q_n'(x) = \int_{a_1}^{x} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à Q'_n, avec la suite $(a_{j+1})_{j\in\mathbb{N}}$, il vient

$$Q'_n(a_1) = Q''_n(a_2) = \cdots = {Q'}_n^{(n-2)}(a_{n-1}) = 0 \quad \text{et} \quad {Q'}_n^{(n-1)}(a_n) = 1,$$

ce qui s'écrit

$$Q'_n(a_1) = Q''_n(a_2) = \cdots = Q_n^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0 \quad \text{et} \quad Q_n^{(n)}(a_n) = 1.$$

La récurrence est achevée. Comme pour tout $j \in \mathbb{N}$, $Q_n^{(j)}(a_j) = P_n^{(j)}(a_j)$, il s'ensuit que $(P_n - Q_n, P_n - Q_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} (P_n - Q_n)^{(j)}(a_j)^2 = 0$ et donc $P_n = Q_n$.

4. Retenons de la question précédente qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est parfaitement déterminé par la suite $P^{(n)}(a_n)$. Il s'agit de trouver P_n de degré n vérifiant $P_n(0) = P'_n(\alpha) = \cdots = P_n^{(n-1)}((n-1)\alpha) = 0$ et $P_n^{(n)}(n\alpha) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $Q = P'_n(X + \alpha)$. Dans ces conditions, on a

$$Q(0) = P'_n(\alpha) = 0,\ Q'(\alpha) = P''_n(2\alpha) = 0, \ldots$$
$$Q^{(n-2)}((n-2)\alpha) = P_n^{(n-1)}((n-1)\alpha) = 0,$$
$$Q^{(n-1)}((n-1)\alpha) = P_n^{(n)}(n\alpha) = 1,$$

et si $k \geqslant n$, $Q^{(k)}(k\alpha) = 0$, car $\deg Q = n - 1$. Par conséquent, on obtient

$$Q = P'_n(X + \alpha) = P_{n-1}, \text{ ou encore } P'_n(X) = P_{n-1}(X - \alpha).$$

Cette relation permet un calcul rapide des premiers termes ($P_1 = X$, $P_2 = \dfrac{X(X - 2\alpha)}{2}$ et $P_3 = \dfrac{X(X - 3\alpha)^2}{6}$) qui nous invite à prouver par récurrence que

$$P_n = \frac{X(X - n\alpha)^{n-1}}{n!}.$$

On a bien $P_1 = X$. Supposons $n \geqslant 2$. Notons $P = \dfrac{X(X - n\alpha)^{n-1}}{n!}$. On a

$$\begin{aligned} P' &= \frac{X(X - n\alpha)^{n-2}}{n(n-2)!} + \frac{(X - n\alpha)^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{(X - n\alpha)^{n-2}}{n!}[(n-1)X + (X - n\alpha)] \\ &= \frac{n(X - \alpha)(X - n\alpha)^{n-2}}{n!} = \frac{(X - \alpha)(X - n\alpha)^{n-2}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Donc, on a $P'(X + \alpha) = \dfrac{X(X - (n-1)\alpha)^{n-2}}{(n-1)!} = P_{n-1}$ par hypothèse de récurrence. On en déduit $P' = P_{n-1}(X - \alpha) = P'_n$. Comme $P_n(0) = 0 = P(0)$, on conclut que $P_n = P = \dfrac{X(X - n\alpha)^{n-1}}{n!}$. $\triangleleft$

La notion de polynômes orthogonaux apparaît à l'occasion de certains problèmes d'analyse fonctionnelle (équations intégrales, problème de Sturm-Liouville, équations aux dérivées partielles...). Ils constituent souvent des bases adaptées à l'étude d'opérateurs symétriques (ou hermitiens). La terminologie est réservée à une suite orthogonale de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $\deg \mathrm{P}_n = n$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *étant vu comme partie d'un espace de fonctions* $\mathcal{E}$ *muni d'un produit scalaire pour lequel la multiplication par* X *est un opérateur symétrique. C'est notamment le cas pour les produits scalaires du type*

$$(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_{\mathrm{I}} f(t)g(t)\omega(t)\,dt,$$

où $\omega : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction positive continue non nulle appelée « poids ». Bien évidemment, la suite* $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dépend du produit scalaire. Pour* $\mathrm{I} = [-1,1]$ *et* $\omega = 1$, *on trouve les polynômes de Legendre présentés dans l'exercice 1.21 du tome 2 d'analyse. En prenant* $\mathrm{I} = \,]-1,1[$ *et* $\omega : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, *on retrouve les polynômes de Tchebychev* T_n *vus dans l'exercice 5.36 du premier tome d'algèbre. En effet, si* $n \neq m$, *on a*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{T}_m(t)\mathrm{T}_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int_0^{\pi} \mathrm{T}_m(\cos x)\mathrm{T}_n(\cos x)\,dx\\ &= \int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0,\end{aligned}$$

en ayant effectué le changement de variables $t = \cos x$. *Les deux exercices suivants développent l'exemple des polynômes de Laguerre* ($\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et* $\omega : t \longmapsto e^{-t}$), *puis les polynômes d'Hermite* ($\mathrm{I} = \mathbb{R}$ *et* $\omega : t \longmapsto e^{-t^2}$).

1.23. Polynômes de Laguerre

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto f(x)^2e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On munit $\mathcal{E}$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x \quad \text{pour } f,g \in \mathcal{E}.$$

1. Montrer l'existence d'une base $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$ telle que pour tout n, L_n est de degré n et de coefficient dominant strictement positif.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de a_n, b_n, c_n dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{XL}_n(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{L}_{n+1}(\mathrm{X}) + b_n\mathrm{L}_n(\mathrm{X}) + c_n\mathrm{L}_{n-1}(\mathrm{X}).$$

3. Montrer que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(x-y)\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i(x)\mathrm{L}_i(y) = a_n(\mathrm{L}_{n+1}(x)\mathrm{L}_n(y) - \mathrm{L}_{n+1}(y)\mathrm{L}_n(x)).$$

C'est la *formule de Darboux-Christoffel.*

4. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}_+} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x}\mathrm{d}x.$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Lors de l'oral, le candidat justifiera rapidement que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que l'on a bien défini un produit scalaire. En effet, pour $f, g \in \mathcal{E}$, l'application $x \longmapsto f(x)g(x)e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque si $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)e^{-x}| &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left(f(x)e^{-x/2}\right)^2 + \left(g(x)e^{-x/2}\right)^2\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(f(x)^2e^{-x} + g(x)^2e^{-x}\right).\end{aligned}$$

Comme $(f(x)+g(x))^2e^{-x} = f(x)^2e^{-x} + 2f(x)g(x)e^{-x} + g(x)^2e^{-x}$, l'application $f+g$ est dans $\mathcal{E}$. Puisqu'il en va de même pour λf et l'application nulle, $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. D'après ce qui précède, $\langle\ ,\ \rangle$ est bien définie. C'est clairement une forme bilinéaire symétrique (par linéarité de l'intégrale). Comme pour f non nulle continue, on a $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)^2e^{-x}\mathrm{d}x > 0$, nous avons bien défini un produit scalaire. Notons enfin que $\mathcal{E}$ contient les fonctions polynomiales car si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(x)^2e^{-x} = o(e^{-x/2})$ pour x tendant vers $+\infty$ par croissance comparée et le théorème de comparaison des fonctions positives intégrables assure l'intégrabilité de $x \longmapsto \mathrm{P}(x)^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Considérons l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt de la base $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n, \ldots)$. On obtient alors un système orthonormé $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n, \ldots)$ qui vérifie pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

et $\mathrm{Vect}(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n) = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Nécessairement, le polynôme L_n est de degré n. D'après les commentaires figurant page 37, le coefficient dominant de L_n est strictement positif. Comme L_n est de degré n, il est classique de conclure que la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Comme $\mathrm{XL}_n \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$, il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$\mathrm{XL}_n = \lambda_0\mathrm{L}_0 + \lambda_1\mathrm{L}_1 + \cdots + \lambda_{n+1}\mathrm{L}_{n+1}.$$

Prenons $k \in [\![0, n-2]\!]$. On a $\langle \mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_k\rangle = \lambda_k$ d'une part et d'autre part,

$$\langle \mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_k\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} x\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_k(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \langle \mathrm{L}_n, \mathrm{XL}_k\rangle = 0,$$

car $\mathrm{XL}_k \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_{n-1})$ et L_n est orthogonal à chaque L_k avec $k < n$. Ainsi, $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$ et le résultat est démontré.

Notons que la relation peut s'écrire pour $n = 0$ en posant $\mathrm{L}_{-1} = 0$ et c_0 quelconque. Retenons également que le fait que XL_n soit combinaison linéaire de L_{n-1}, L_n et L_{n+1}, est une propriété tout à fait générale dès que $\langle \mathrm{XP}, \mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{P}, \mathrm{XQ}\rangle$, c'est-à-dire lorsque la multiplication par X est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Soit $n \geqslant 1$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $\Delta_n = (x-y)\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i(x)\mathrm{L}_i(y)$. On va essayer de trouver une relation de récurrence. D'après la question précédente, la différence $\Delta_n - \Delta_{n-1} = x\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_n(y) - y\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_n(y)$ vaut

$$(a_n\mathrm{L}_{n+1}(x)+b_n\mathrm{L}_n(x)+c_n\mathrm{L}_{n-1}(x))\mathrm{L}_n(y)-(a_n\mathrm{L}_{n+1}(y)+b_n\mathrm{L}_n(y)+c_n\mathrm{L}_{n-1}(y))\mathrm{L}_n(x)$$

ce qui se simplifie en

$$a_n(\mathrm{L}_{n+1}(x)\mathrm{L}_n(y) - \mathrm{L}_{n+1}(y)\mathrm{L}_n(y)) - c_n(\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_{n-1}(y) - \mathrm{L}_{n-1}(x)\mathrm{L}_n(y)).$$

Si $c_n = a_{n-1}$, il sera facile de conclure puisqu'on a une somme télescopique. Vérifions cette conjecture. Considérons $\langle \mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_{n-1}\rangle$. D'une part on a

$$\langle \mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_{n-1}\rangle = \langle a_n\mathrm{L}_{n+1} + b_n\mathrm{L}_n + c_n\mathrm{L}_{n-1}, \mathrm{L}_{n-1}\rangle = c_n;$$

mais on a aussi $\langle \mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_{n-1}\rangle = \langle \mathrm{L}_n, \mathrm{XL}_{n-1}\rangle$, ce qui donne,

$$\langle \mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_{n-1}\rangle = \langle \mathrm{L}_n, a_{n-1}\mathrm{L}_n + b_{n-1}\mathrm{L}_{n-1} + c_{n-1}\mathrm{L}_{n-2}\rangle = a_{n-1}.$$

On obtient bien ce qu'on voulait : $a_{n-1} = c_n$. La formule est donc démontrée par récurrence dès lors qu'elle est valable pour $n = 0$. Il s'agit alors de montrer que

$$(x-y)\mathrm{L}_0(x)\mathrm{L}_0(y) = a_0(\mathrm{L}_1(x)\mathrm{L}_0(y) - \mathrm{L}_1(y)\mathrm{L}_0(x))$$

ou encore que $(x-y)\mathrm{L}_0 = a_0(\mathrm{L}_1(x) - \mathrm{L}_1(y))$, puisque L_0 est un polynôme constant non nul. Comme L_1 est affine et $\mathrm{XL}_0 = a_0\mathrm{L}_1 + b_0\mathrm{L}_0$, la relation est effectivement vérifiée : si α est le coefficient dominant de L_1, on a $a_0\alpha = \mathrm{L}_0$ et on a bien $(x-y)\mathrm{L}_0 = a_0\alpha(x-y)$.

4. Notons $f : x \longmapsto x^3$. La borne inférieure I à calculer n'est autre que le carré de la distance de f à $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Nous savons que $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on a

$$\mathrm{I} = \|f\|^2 - \langle f, \mathrm{L}_0\rangle^2 - \langle f, \mathrm{L}_1\rangle^2 - \langle f, \mathrm{L}_2\rangle^2,$$

et ce, en vertu du théorème de Pythagore, puisque $\langle f, \mathrm{L}_0\rangle \mathrm{L}_0 + \langle f, \mathrm{L}_1\rangle \mathrm{L}_1 + \langle f, \mathrm{L}_2\rangle \mathrm{L}_2$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Sachant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}_+} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!$, calculons L_0, L_1 et L_2.

On a $\boxed{\mathrm{L}_0 = 1}$ et si l'on écrit $\mathrm{L}_1 = \alpha \mathrm{X} + \beta$, la relation $\langle \mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1\rangle = 0$ entraîne $\alpha + \beta = 0$. On a $\mathrm{L}_1 = \alpha(\mathrm{X} - 1)$ de norme 1 :

$$\|\mathrm{L}_1\|^2 = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}_+} (x-1)^2 e^{-x} \mathrm{d}x = \alpha^2(2! - 2.1! + 1.0!) = \alpha^2.$$

Comme $\alpha > 0$, $\alpha = 1$ et on a $\boxed{\mathrm{L}_1 = \mathrm{X} - 1}$.

On écrit ensuite $\mathrm{L}_2 = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{L}_1 + c\mathrm{L}_0$ et on écrit les relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_0\rangle &= a\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{L}_0\rangle + c = 2a + c = 0,\\
\langle \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_1\rangle &= a\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{L}_1\rangle + b = (6-2)a + b = 4a + b = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $c = -2a$ et $b = -4a$. Enfin,

$$\|a\mathrm{X}^2\|^2 = 24a^2 = 1 + b^2 + c^2 = 1 + 16a^2 + 4a^2$$

donne $a = \dfrac{1}{2}$ car $a > 0$. Ainsi, on a $\boxed{\mathrm{L}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 1}$. On a enfin

$$\mathrm{I} = 6! - \left(\frac{1}{2}.5! - 2.4! - 3!\right)^2 - (4! - 3!)^2 - 3!^2 = 324. \lhd$$

Les polynômes qui portent le nom d'Hermite ont surtout été étudiés par Laplace lors de travaux en Probabilités. Hermite en a essentiellement donné une généralisation à plusieurs variables.

1.24. Polynômes d'Hermite

On pose pour x réel et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}.$$

1. Montrer que H_n est une fonction polynomiale de degré n.
2. Montrer que $H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n$.
3. Montrer que $H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0$.
4. On pose $q_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$q_n'' + (2n+1-x^2)q_n = 0.$$

5. Calculer $\int_{\mathbb{R}} q_m(t)q_n(t)\mathrm{d}t$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Vérifions cela par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a $H_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$ et x réel, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)e^{x^2} \\ &= (-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((-1)^{n-1}H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right)e^{x^2} \\ &= -\left(H_{n-1}'(x)e^{-x^2} - 2xH_{n-1}(x)e^{-x^2}\right)e^{x^2} \\ &= 2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x). \end{aligned}$$

Si H_{n-1} est polynomiale de degré $n-1$ et de coefficient dominant 2^{n-1}, la relation que nous venons d'établir nous assure que H_n est polynomiale de degré n et de coefficient dominant 2^n. Cela termine la récurrence.

2. Nous avons obtenu la relation $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$ pour n entier naturel. Il s'agit de montrer que pour $n \geqslant 1$, $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$, autrement dit que $H_n' = 2nH_{n-1}$. Vérifions cela par récurrence. Pour $n = 1$, comme $H_0 = 1$ et $H_1 = 2X$, l'identité est vérifiée. Supposons $n \geqslant 2$ et le résultat vrai au rang $n-1$. Comme $H_n = 2XH_{n-1} - H_{n-1}'$, on obtient en dérivant,

$$\begin{aligned} H_n' &= 2XH_{n-1}' + 2H_{n-1} - H_{n-1}'' \\ &= 4X(n-1)H_{n-2} + 2H_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}', \end{aligned}$$

en ayant utilisé l'hypothèse de récurrence $H_{n-1}' = 2(n-1)H_{n-2}$ qui donne $H_{n-1}'' = 2(n-1)H_{n-2}'$. Ensuite, on écrit

$$\begin{aligned} H_n' &= 2(n-1)(2XH_{n-2} - H_{n-2}') + 2H_{n-1} \\ &= (2n-2)H_{n-1} + 2H_{n-1} = 2nH_{n-1}. \end{aligned}$$

On conclut donc que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{H_n' = 2nH_{n-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}}.$$

3. Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_n'' - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_n' + 2n\mathrm{H}_n &= 2n\mathrm{H}_{n-1}' - 4\mathrm{X}n\mathrm{H}_{n-1} + 2n\mathrm{H}_n \\
&= 2n(2(n-1)\mathrm{H}_{n-2}) - 4n\mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1} + 2n\mathrm{H}_n \\
&= 2n(\mathrm{H}_n - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1} - 2(n-1)\mathrm{H}_{n-2}) = 0.
\end{aligned}$$

Comme la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathrm{H}_n'' - 2\mathrm{X}\mathrm{H}_n' + 2n\mathrm{H}_n = 0}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
q_n''(x) &= \mathrm{H}_n''(x)e^{-x^2/2} - 2xe^{-x^2/2}\mathrm{H}_n'(x) + \mathrm{H}_n(x)(x^2-1)e^{-x^2/2} \\
&= -2n\mathrm{H}_n(x)e^{-x^2/2} + \mathrm{H}_n(x)(x^2-1)e^{-x^2/2} \\
&= (x^2 - 1 - 2n)q_n(x).
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait.

5. Il s'agit de calculer $\mathrm{I}_{m,n} = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{H}_m(t)\mathrm{H}_n(t)\mathrm{d}t$. Remarquons avant toute chose que cette intégrale est bien définie, car la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}\mathrm{H}_m(t)\mathrm{H}_n(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque négligeable en $\pm\infty$ devant $t \longmapsto e^{-t^2/2}$. Supposons $n \leqslant m$. La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}\mathrm{H}_m(t)$ admet comme primitive $t \longmapsto (-1)^m \dfrac{\mathrm{d}^{m-1}e^{-t^2}}{\mathrm{d}t^{m-1}} = -\mathrm{H}_{m-1}(t)e^{-t^2}$. Par intégration par parties, il en résulte

$$\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{H}_m(t)\mathrm{H}_n(t)\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{H}_{m-1}(t)e^{-t^2}\mathrm{H}_n(t)\Big]_{-x}^{x} + \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\mathrm{H}_{m-1}(t)\mathrm{H}_n'(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui donne en faisant tendre x vers $+\infty$,

$$\mathrm{I}_{m,n} = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{H}_{m-1}(t)\mathrm{H}_n'(t)\mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties m fois au total, il restera

$$\mathrm{I}_{m,n} = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{H}_0(t)\mathrm{H}_n^{(m)}(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_n^{(m)}(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Si $m > n$, la dérivée d'ordre m de H_n est nulle et $\mathrm{I}_{m,n} = 0$. Si $m = n$, $\mathrm{H}_n^{(n)}(t) = 2^n n!$ et $\mathrm{I}_{n,n} = 2^n n!\sqrt{\pi}$. $\triangleleft$

Si on considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto f(x)^2 e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on reconnaît là encore une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire défini pour f, g dans $\mathcal{E}$ par

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx.$$

La relation de récurrence linéaire de la deuxième question est à rapprocher du commentaire de la solution de la seconde question de l'exercice 1.23.

1.25. Méthode de Gauss

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_n = n$ pour tout n.

2. Montrer que P_n possède n racines simples situées toutes dans $]0, 1[$.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i).$$

Donner une expression de ces scalaires et leur signe.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Cette question classique se traite comme la première question de l'exercice 1.23.

2. Comme $\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, P_n est orthogonal à tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$. Notons $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ les racines distinctes de P_n se situant dans $]0, 1[$. Il s'agit de montrer que $p = n$. On note n_i l'ordre de α_i comme racine de P_n et on considère

$$A = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ n_i \text{ impair}}} (X - \alpha_i).$$

Alors, le polynôme AP_n garde un signe constant au sens large sur $[0, 1]$ et comme il est continu et non nul, $\int_0^1 A(t)P_n(t)dt$ est non nulle. Il s'ensuit que $\deg A \geqslant n$ et nécessairement $p = n$. Donc, P_n est scindé à racines simples, toutes dans $]0, 1[$.

Il s'agit d'une propriété générale des polynômes orthogonaux. Cela est fait pour les polynômes de Legendre dans l'exercice 1.21 du tome 2 d'analyse. On peut aller plus loin et démontrer qu'entre deux racines de P_{n+1}, *on trouve une racine de* P_n. *Dégageons les étapes de l'argumentation : comme cela a été fait à l'exercice 1.23, on montre que l'on peut écrire* $XP_n = a_nP_{n+1} + b_nP_n + c_nP_{n-1}$ *avec* a_n, b_n, c_n *dans* $\mathbb{R}$, *puis par récurrence que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x-y)\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i(x)\mathrm{P}_i(y) = a_n(\mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(y) - \mathrm{P}_{n+1}(y)\mathrm{P}_n(x)).$$

En prenant $y = x+h$ avec h non nul, et en faisant tendre h vers 0 dans la relation

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i(x)\mathrm{P}_i(x+h) = a_n \frac{(\mathrm{P}_{n+1}(x+h)\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(x+h))}{h},$$

on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i(x)^2 = a_n\left(\mathrm{P}'_{n+1}(x)\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}_{n+1}(x)\mathrm{P}'_n(x)\right).$$

Soit $\alpha < \beta$ deux racines consécutives de P_{n+1}. Comme α et β sont simples, les dérivées de P_{n+1} en α et β sont non nulles, nécessairement de signes contraires. En testant en α et β la relation trouvée, comme P_0 est une constante non nulle, il vient

$$0 < \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i(\alpha)^2 = a_n\mathrm{P}'_{n+1}(\alpha)\mathrm{P}_n(\alpha) \ \ et\ \ 0 < \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_i(\beta)^2 = a_n\mathrm{P}'_{n+1}(\beta)\mathrm{P}_n(\beta),$$

si bien que $\mathrm{P}_n(\alpha)\mathrm{P}_n(\beta) < 0$: le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que P_n possède une racine dans l'intervalle $]\alpha,\beta[$.

3. Opérons la division euclidienne de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$ par P_n. On écrit donc $\mathrm{P} = \mathrm{QP}_n + \mathrm{R}$ avec $\deg \mathrm{Q} < n$ et $\deg \mathrm{R} < n$. Pour tout i, on a $\mathrm{R}(\alpha_i) = \mathrm{P}(\alpha_i)$. Le polynôme P_n est orthogonal à Q et donc $\int_0^1 \mathrm{Q}(t)\mathrm{P}_n(t)\mathrm{d}t = 0$. Il s'ensuit que $\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{R}(t)\mathrm{d}t$. Le polynôme R peut s'écrire à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\mathrm{L}_i = \prod_{j\neq i}\left(\dfrac{\mathrm{X}-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Plus précisément, on a $\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}(\alpha_i)\mathrm{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\alpha_i)\mathrm{L}_i$. Finalement, on obtient

$$\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{R}(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\alpha_i)\int_0^1 \mathrm{L}_i(t)\mathrm{d}t.$$

Il suffit donc de poser

$$\boxed{\lambda_i = \int_0^1 \prod_{j\neq i}\left(\frac{t-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right)\mathrm{d}t}.$$

En testant en L_i^2 (qui est de degré $2n-2 < 2n-1$), on constate que $\lambda_i = \|\mathrm{L}_i\|^2 > 0$. ◁

Cette dernière question peut être traitée par des arguments de dualité comme on peut le lire dans l'exercice 1.21 du tome 2 d'Analyse. Elle fonde le principe du calcul approché des intégrales par la méthode de Gauss, la quantité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\alpha_i)$ *fournissant une valeur approchée de* $\int_0^1 f(t)dt$ *(qui se trouve être exacte si* $f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$*).*

Les matrices de Gram constituent la matière du thème suivant. Elles interviennent dans le calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace.

1.26. Matrices de Gram

1. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

a. Montrer que la matrice $A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique positive de même rang que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. *On dit que* A *est la matrice de Gram de la famille* $(x_1, \ldots, x_n)$. *On la note* $G(x_1, \ldots, x_n)$.

On suppose $(x_1, \ldots, x_n)$ libre et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

b. Soit $x \in E$. Démontrer que d, la distance de x à F, vérifie

$$d^2 = \frac{\det G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}.$$

c. On suppose F orienté. Montrer que

$$\det G(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]^2.$$

2. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \;\; m_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle.$$

(**École polytechnique**)

Solution.

1.a. La matrice A est symétrique réelle et, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle \lambda_i \lambda_j = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|^2 \geqslant 0,$$

donc A est positive.

On note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Introduisons l'application u qui à tout $x \in F$ associe le n-uplet $(\langle x, x_1\rangle, \ldots, \langle x, x_n\rangle) \in \mathbb{R}^n$. Cette application est clairement linéaire. Elle est également injective : un vecteur du noyau est orthogonal à tous les x_i et il est donc dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Il est nécessairement nul.

On a donc $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{rg}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.

b. On écrit $x = y + h$ avec $y \in \mathrm{F}$ et $h \in \mathrm{F}^\perp$. On a $d = \|h\|$, $\langle x, x\rangle = d^2 + \langle y, y\rangle$ et $\langle x, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle$ pour tout i. La première colonne de $\mathrm{G}(x, x_1, \dots x_n)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \|h\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle y, y\rangle \\ \langle x_1, y\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, y\rangle \end{pmatrix},$$

et la première ligne $(\|h\|^2 + \langle y, y\rangle, \langle y, x_1\rangle, \dots, \langle y, x_n\rangle)$ si bien que par multilinéarité du déterminant, on obtient

$$\det \mathrm{G}(x, x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} \|h\|^2 & \times \cdots \times \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{(\langle x_i, x_j\rangle)} \\ 0 & \end{pmatrix} + \det \mathrm{G}(y, x_1, \dots, x_n).$$

Comme la famille $(y, x_1, \dots, x_n)$ est liée, d'après la première question, le rang de $\mathrm{G}(y, x_1, \dots, x_n)$ est n et son déterminant est nul. En développant le premier déterminant selon la première colonne, il vient

$$\det \mathrm{G}(x, x_1, \dots, x_n) = d^2 \det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n).$$

Comme $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n)$ est de rang n, son déterminant est non nul et la relation est démontrée.

Cette formule présente l'intérêt de pouvoir calculer la distance à un sous-espace sans connaître une base orthonormée de ce sous-espace. Elle prouve également par récurrence que $\sqrt{\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n)}$ correspond au volume dans F *du parallélotope de côtés $x_1, \dots, x_n$ (il s'agit de $[0,1]x_1 + \cdots + [0,1]x_n$) sur lequel on applique le principe que le volume vaut la mesure de la base multipliée par la hauteur.*

c. Pour cette question, prenons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe de F et notons $\mathrm{P} = (\langle e_i, x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice des x_i dans cette base. Comme pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\langle x_i, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_i, e_k\rangle . \langle x_j, e_k\rangle,$$

on en déduit que $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = {}^t\mathrm{P}\mathrm{P}$ et en passant au déterminant

$$\det \mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = \det {}^t\mathrm{P} \det \mathrm{P} = (\det \mathrm{P})^2 = [x_1, \dots, x_n]^2.$$

Le produit mixte apparaît alors comme la mesure orientée du volume du parallélotope de côtés $x_1, \dots, x_n$.

2. La matrice symétrique réelle M se diagonalise dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On peut donc trouver P orthogonale et $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ à coefficients diagonaux positifs, telles que $\mathrm{M} = {}^t\mathrm{PDP}$. Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ et $\mathrm{B} = \Delta\mathrm{P}$. On a alors $\mathrm{M} = {}^t\mathrm{BB}$. Si l'on appelle $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes de la matrice B, on obtient exactement $m_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ pour tout couple (i, j). ◁

Notons qu'il est facile de voir (en rajoutant des 0*) que* M *est la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^m$ *pour tout* $m \geqslant n$. *En fait, si* M *est symétrique positive de taille* n *et de rang* r, *on peut s'intéresser à la dimension minimale* p *telle que* M *soit la matrice de Gram d'une famille de* n *vecteurs de* $\mathbb{R}^p$. *L'exercice a montré que* $r \leqslant p \leqslant n$. *En fait, on a l'égalité* $p = r$. *En effet, ayant trouvé la famille* $(v_1, \dots, v_n)$, *elle engendre un sous-espace* F *de dimension* r *de* $\mathbb{R}^n$, *il suffit ensuite de prendre* $(e_1, \dots, e_r)$ *une base orthonormale de* F *et si l'on considère les colonnes* $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n \in \mathbb{R}^r$ *contenant les coordonnées des vecteurs* v_i *dans cette base, il est clair que* $\langle \mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = m_{ij}$.

Cela est à la base de l'exercice suivant dans lequel on recherche des familles de vecteurs unitaires ayant deux à deux toujours le même produit scalaire.

1.27. Familles équiangulaires

> Soit $m \geqslant 2$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de n, existe-t-il $(x_1, \dots, x_m)$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que les x_i soient unitaires et $\langle x_i, x_j \rangle = \lambda$ pour $i \neq j$?
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons A la matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1, les autres valant λ. On cherche en fait à savoir pour quelles valeurs de n, A est la matrice de Gram d'une famille de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Comme nous venons de le mentionner, il faut et suffit que A soit positive et que $n \geqslant \mathrm{rg}\,\mathrm{A}$. Cherchons donc les valeurs propres de A.

Si $\lambda = 0$, $\mathrm{A} = \mathrm{I}_m$ et la famille $(x_1, \dots, x_m)$ convient si, et seulement si, elle est orthonormée. On peut trouver une famille orthonormée de m vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $n \geqslant m$. On suppose dans la suite $\lambda \neq 0$.

Il est clair que $\mathrm{A} - (1 - \lambda)\mathrm{I}_m$ est de rang 1. Donc $1 - \lambda$ est dans le spectre de A et l'espace propre associé est de dimension $m-1$. Comme la trace de A est égale à m, la valeur propre restante de A est $1 + (m-1)\lambda$. Il est alors facile de mener la discussion suivante :

• Si $\lambda > 1$ ou $\lambda < \dfrac{-1}{m-1}$, A n'est pas positive et il n'y a donc aucune solution, quel que soit n.

• Si $\lambda = 1$, A est positive de rang 1. Une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ existe dans $\mathbb{R}^n$ dès que $n \geqslant 1$: il suffit de prendre tous les x_i égaux à un même vecteur unitaire !

• Si $\dfrac{-1}{m-1} < \lambda < 1$, alors A est définie positive, donc de rang m. Une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ ayant A pour matrice de Gram existe si, et seulement si, $n \geqslant m$.

• Enfin lorsque $\lambda = \dfrac{-1}{m-1}$, A est positive et de rang $m-1$. Une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ ayant A pour matrice de Gram existe si, et seulement si, $n \geqslant m - 1$. $\lhd$

Dans le dernier cas étudié, les familles solutions sont les m-simplexes : cet exercice prouve donc que cet objet existe à partir de la dimension $m-1$ (voir aussi les exercices et 1.2 et 1.20).

1.28. Familles isométriques

> Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \ldots, u_p)$, $(v_1, \ldots, v_p)$ deux familles de p vecteurs de E.
>
> Montrer que $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_p) = \mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_p)$ si, et seulement si, il existe $f \in \mathrm{O(E)}$ tel que $v_k = f(u_k)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

L'une des implications est triviale : en effet, s'il existe $f \in \mathrm{O(E)}$ tel que $v_k = f(u_k)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\langle u_i, u_j \rangle = \langle f(u_i), f(u_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$ pour tout couple (i, j), car f conserve le produit scalaire. Les matrices de Gram des deux familles sont donc les mêmes.

Supposons réciproquement que les deux familles aient la même matrice de Gram $\mathrm{G} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Nous pouvons démontrer que $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \mathrm{rg}\,\mathrm{G} = \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p)$ comme nous l'avons fait à l'exercice 1.26. Notons r ce rang. Le cas $r = 0$ étant trivial nous supposerons $r \geqslant 1$.

Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ soit libre, afin d'alléger la rédaction, et notons $\mathrm{F}_u = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$ le sous-espace de dimension r engendré par les u_i. Comme $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_r) = \mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_r)$, la famille $(v_1, \ldots, v_r)$ est aussi de rang r et engendre donc le sous-espace $\mathrm{F}_v = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. Considérons l'unique application linéaire f de F_u dans F_v définie par $f(u_k) = v_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$. Comme f conserve le produit scalaire sur une base de F_u, f est une isométrie de F_u sur F_v, ces sous-espaces étant munis de la structure euclidienne induite par celle de E. On a alors $f(u_k) = v_k$ pour tout

$k > r$: en effet l'hypothèse implique que le vecteur $f(u_k) - v_k \in \mathrm{F}_v$ est orthogonal à $v_1, \ldots, v_r$, puisque si $1 \leqslant i \leqslant r$, on a

$$\langle f(u_k) - v_k, v_i\rangle = \langle f(u_k), f(u_i)\rangle - \langle v_k, v_i\rangle = \langle u_k, u_i\rangle - \langle u_k, u_i\rangle = 0.$$

car f est une isométrie sur F_u. Ainsi, le vecteur $f(u_k) - v_k$ est dans $\mathrm{F}_v \cap \mathrm{F}_v^\perp$ et il est donc nul. On a $f(u_k) = v_k$. Il ne reste plus qu'à prouver que f se prolonge en un endomorphisme orthogonal de E. Pour cela il suffit de choisir une base orthonormale $(u'_{r+1}, \ldots, u'_n)$ de $\mathrm{F}_u^\perp$ et une base orthonormale $(v'_{r+1}, \ldots, v'_n)$ de $\mathrm{F}_v^\perp$ et de poser $f(u'_k) = v'_k$ pour tout k. Il est clair que f conserve le produit scalaire sur la base $(u_1, \ldots, u_r, u'_{r+1}, \ldots, u'_n)$ de E et donc conserve le produit scalaire par bilinéarité. D'où le résultat. $\triangleleft$

Donnons une vision matricielle de ce résultat : soit A, B *deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *On a* ${}^t\mathrm{AA} = {}^t\mathrm{BB}$ *si, et seulement si, il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{B} = \mathrm{PA}$.

Le résultat que nous venons de prouver est au cœur de l'exercice suivant.

1.29. Image d'une base orthonormée par un projecteur orthogonal

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de E. On considère la matrice de Gram

$$\mathrm{G} = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) il existe un projecteur orthogonal p et une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que pour tout i, $p(e_i) = u_i$;

(ii) $\mathrm{Sp}\,\mathrm{G} \subset \{0, 1\}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Supposons d'abord (i). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale et p un projecteur orthogonal tels que $p(e_i) = u_i$ pour tout i. Notons A la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$: c'est aussi la matrice de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme cette base est orthonormale, on a $\mathrm{G} = {}^t\mathrm{AA}$. Or, p étant un projecteur orthogonal, il est auto-adjoint et sa matrice A dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique. Ainsi, $\mathrm{G} = \mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et le spectre de G est bien inclus dans $\{0, 1\}$.

• Supposons réciproquement que $\mathrm{Sp}\,\mathrm{G} \subset \{0, 1\}$. La matrice G est symétrique réelle donc diagonalisable et l'hypothèse implique que $\mathrm{G}^2 =$

G. Choisissons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale quelconque de E. Notons $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont les colonnes successives de G et notons p l'endomorphisme de E ayant G pour matrice dans la base $\mathcal{B}$. Comme $G^2 = G$, p est un projecteur et comme ${}^t G = G$, p est un projecteur orthogonal. De plus, on a $p(e_k) = v_k$ pour tout k. Or, la matrice de Gram de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est ${}^t GG = G$. D'après l'exercice précédent, il existe donc $f \in O(E)$ tel que $f(v_k) = u_k$ pour tout k. Posons alors $e'_k = f(e_k)$ pour tout k. La famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de E et on a pour tout k, $u_k = (f \circ p \circ f^{-1})(e'_k)$. Et il est aisé de constater que $p' = f \circ p \circ f^{-1}$ est encore un projecteur orthogonal de E. D'où le résultat. $\triangleleft$

Les exercices suivants concernent plus spécifiquement les endomorphismes orthogonaux : ce sont les opérateurs linéaires qui conservent le produit scalaire ou, ce qui revient au même, qui conservent la norme euclidienne.

1.30. Une matrice orthogonale

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$.

Montrer que la matrice $A = I_n - 2U\,{}^tU$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale. Identifier l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

L'hypothèse s'écrit ${}^tUU = 1$. La matrice A est symétrique donc

$$A\,{}^tA = A^2 = I_n + 4U\,{}^tUU\,{}^tU - 4U\,{}^tU = I_n + 4U({}^tUU)\,{}^tU - 4U\,{}^tU = I_n,$$

d'après la remarque initiale. Ainsi, A est orthogonale. Comme $A^2 = I_n$, c'est la matrice d'une symétrie orthogonale. Si X appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et est orthogonal à U, alors ${}^tUX = 0$ et il vient $AX = X$; d'autre part, on a $AU = U - 2U({}^tUU) = -U$. La matrice A est donc la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à U. $\triangleleft$

Notons que $-A = 2U\,{}^tU - I_n$ *est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $\mathbb{R}U$*. Quant à* $U\,{}^tU$*, c'est la matrice du projecteur orthogonal sur la droite* $\mathbb{R}U$*.*

L'exercice suivant est un cas particulier de l'exercice 1.15.

1.31. Convergence en moyenne des puissances d'une matrice orthogonale

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale réelle. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^k.$$

(École polytechnique)

⊳ **Solution.**

Posons $\mathrm{A}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^k$, pour tout entier naturel non nul n. Remarquons qu'un point fixe de M est encore fixe pour A_n. Ainsi, si $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$, alors $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n\mathrm{X} = \mathrm{X}$. La suite $(\mathrm{A}_n\mathrm{X})$ converge vers X.

Montrons que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$. Il suffit de démontrer que les deux sous-espaces sont orthogonaux. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{MZ}-\mathrm{Z}$, on a

$${}^t\mathrm{XY} = {}^t\mathrm{XMZ} - {}^t\mathrm{XZ} = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{MZ} - {}^t\mathrm{XZ} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{MMZ} - {}^t\mathrm{XZ} = 0.$$

Regardons ce qui se passe sur $\mathrm{Im}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$. Si $\mathrm{X} \in \mathrm{Im}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$, il existe $\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mathrm{X} = \mathrm{MY}-\mathrm{Y}$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{A}_n\mathrm{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^k\mathrm{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{M}^{k+1}\mathrm{Y} - \mathrm{M}^k\mathrm{Y}) = \frac{1}{n}(\mathrm{M}^n\mathrm{Y} - \mathrm{Y}).$$

On en déduit que $\|\mathrm{A}_n\mathrm{X}\| \leqslant \frac{1}{n}(\|\mathrm{M}^n\mathrm{Y}\| + \|\mathrm{Y}\|) \leqslant \frac{2}{n}\|\mathrm{Y}\|$, car M est orthogonale. La suite $(\mathrm{A}_n\mathrm{X})$ converge vers 0.

Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$ qui s'écrit $\mathrm{Y}+\mathrm{Z}$, avec $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$ et $\mathrm{Z} \in \mathrm{Im}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$, la suite $(\mathrm{A}_n\mathrm{Z})$ converge vers Y. Ainsi la suite (A_n) converge vers la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$. ⊲

Le fait d'avoir comme hypothèse M *orthogonale permet de démontrer simplement que* $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_p)$. *C'est plus délicat avec seulement* $|||\mathrm{M}||| \leqslant 1$ *comme hypothèse (voir exercice 1.15).*

1.32. Orbites sous l'action d'un endomorphisme orthogonal

Soit E un espace euclidien et $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille génératrice de E.

Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) il existe $u \in \mathrm{O(E)}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_{n+1} = u(x_n)$;

(ii) il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\langle x_n, x_{n+k}\rangle = a_k$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = u^n(x_0)$. Ainsi, si n et k sont des entiers,

$$\langle x_n, x_{n+k}\rangle = \langle u^n(x_0), u^{n+k}(x_0)\rangle = \langle x_0, u^k(x_0)\rangle,$$

car $u^n \in \mathrm{O(E)}$ conserve le produit scalaire. Il suffit donc de poser $a_k = \langle x_0, u^k(x_0)\rangle$ pour tout k.

Notons que $a_{-k} = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$: le produit scalaire entre deux vecteurs de l'orbite ne dépend que de l'écart en valeur absolue entre les indices de ces vecteurs.

• Montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant génératrice de E, on peut en extraire une base $(x_{k_1}, \dots, x_{k_p})$ où $p = \dim \mathrm{E}$ et $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$. Considérons l'unique endomorphisme u de E défini par $u(x_{k_i}) = x_{k_i+1}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On va montrer que u est dans $\mathrm{O(E)}$ puis que $u(x_n) = x_{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Le premier point provient de ce que u conserve le produit scalaire pour deux vecteurs quelconques de la base choisie. En effet, pour i, j dans $[\![1, p]\!]$,

$$\langle u(x_{k_i}), u(x_{k_j})\rangle = \langle x_{k_i+1}, x_{k_j+1}\rangle = a_{k_j-k_i} = \langle x_{k_i}, x_{k_j}\rangle.$$

Il en découle par bilinéarité que u conserve le produit scalaire de E. C'est donc bien un élément de $\mathrm{O(E)}$.

Soit n un entier quelconque. On décompose x_n dans la base choisie : $x_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{k_i}$. On a alors $u(x_n) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{k_i+1}$. Pour tout entier m, on a donc

$$\begin{aligned}\langle u(x_n), x_m\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x_{k_i+1}, x_m\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x_{k_i}, x_{m-1}\rangle \\ = \langle x_n, x_{m-1}\rangle = \langle x_{n+1}, x_m\rangle.\end{aligned}$$

Comme cela vaut en particulier en prenant pour m les entiers k_i, on a forcément $u(x_n) = x_{n+1}$. ◁

On peut enlever l'hypothèse $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ génératrice : dans la réciproque, il suffit de se placer sur le sous-espace F *engendré par la suite puis de prolonger ensuite l'endomorphisme orthogonal de* F *construit en un endomorphisme orthogonal de* E, *ce qui est facile.*

1.33. Générateurs de O(E)

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que tout $u \in \mathrm{O(E)}$ peut s'écrire comme produit d'au plus r réflexions où $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id_E})$. En déduire que les réflexions engendrent O(E).

2. Montrer que les retournements engendrent SO(E) lorsque $\dim \mathrm{E} = 3$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Procédons par récurrence sur le rang r de $u - \mathrm{Id_E}$.

Si $r = 0$, $u = \mathrm{Id_E}$: il n'y a rien à vérifier.

Supposons $r \geqslant 1$ et le résultat vrai pour $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id_E}) < r$. Alors u n'est pas l'identité et il existe e de norme 1 tel que $u(e) \neq e$. De $\|u(e)\| = \|e\|$, on déduit $(u(e) - e) \perp (u(e) + e)$. Ainsi la réflexion s par rapport à l'orthogonal de $u(e) - e$ vérifie $s(u(e) + e) = u(e) + e$ et $s(u(e) - e) = -(u(e) - e)$, donc échange e et $u(e)$.

De plus, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E})$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{Id_E})$. En effet, prenons $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E})$. Montrons que $(s \circ u)(x) = x$ *i.e.* $s(x) = x$. Pour cela, il suffit de vérifier que x est orthogonal à $u(e) - e$. Comme $u(x) = x$ et comme u est orthogonal, on a

$$\langle x, u(e) - e\rangle = \langle u(x), u(e)\rangle - \langle x, e\rangle = \langle x, e\rangle - \langle x, e\rangle = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E}) \subset \mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{Id_E})$ et cette inclusion est stricte, puisque $e \notin \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E})$ et $s(u(e)) = e$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $s \circ u$, car $\mathrm{rg}(s \circ u - \mathrm{Id_E}) < \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id_E})$. Il existe donc des réflexions $s_1, \ldots, s_p$ telles que $s \circ u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$ avec $p \leqslant \mathrm{rg}(s \circ u - \mathrm{Id_E})$. Finalement, on a l'écriture $u = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_p$ où figurent $p + 1$ réflexions avec $p + 1 \leqslant r$.

En fait, $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{I})$ *est le nombre minimal de réflexions* s_i *que l'on doit avoir dans une décomposition* $u = s_1 \circ \cdots \circ s_p$. *En effet, si* u *s'écrit* $u = s_1 \circ \ldots \circ s_p$, *où* s_i *est la réflexion par rapport à l'hyperplan* H_i, *il est clair que*

$$\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_p \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id_E})$$

Comme la dimension de $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_p$ *est supérieure à* $\dim \mathrm{E} - p$, *le rang de* $u - \mathrm{Id_E}$ *est inférieur ou égal à* p.

2. Supposons $\dim \mathrm{E} = 3$. Soit u une rotation de E que l'on suppose distincte de l'identité. D'après le cours on a $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = 2$ puisque $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est une droite (l'axe de u). D'après la question précédente u peut s'écrire comme un produit de deux réflexions : $u = s_1 \circ s_2$. Or, si H est un plan de E et s la réflexion par rapport à H, alors $-s$ est le retournement par rapport à la droite $\mathrm{D} = \mathrm{H}^\perp$. La relation $u = (-s_1) \circ (-s_2)$ montre que u est la composée de deux retournements. On a prouvé que les retournements engendrent SO(E). ◁

Le résultat de cette seconde question reste vrai pour toute dimension $n \geqslant 3$.

Le théorème de Maschke, élément fondamental de la théorie des représentations des groupes finis a déjà été rencontré dans le tome 1 d'algèbre (exercice 22 du chapitre 6). La preuve différente qui inspire l'énoncé suivant est valable lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$ *avec un produit hermitien) et consiste à réaliser le groupe fini étudié comme un sous-groupe du groupe orthogonal relatif à un produit scalaire* ad hoc.

1.34. Théorème de Maschke (1898)

Soit E un espace euclidien et G un sous-groupe fini de GL(E).

1. Soit $f \in \mathrm{O(E)}$. Montrer que tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f.

2. Montrer que $(x, y) \longmapsto (x|y) = \sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \langle g(x), g(y)\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

3. Soit F un sous-espace stable par tous les éléments de G. Démontrer que F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit F un sous-espace stable par f. Montrons que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par f. Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. Montrons que pour tout $y \in \mathrm{F}$, $\langle f(x), y\rangle = 0$. Soit $y \in \mathrm{F}$. Comme f est bijective, $f(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. Il existe $t \in \mathrm{F}$ avec $y = f(t)$ et

$$\langle f(x), y\rangle = \langle f(x), f(t)\rangle = \langle x, t\rangle = 0.$$

Ainsi $f(x)$ appartient à $\mathrm{F}^\perp$.

2. Notons déjà que $(x, y) \longmapsto (x|y)$ est bien défini et symétrique. Comme les éléments g de G sont linéaires et $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire, on vérifie sans difficulté que cette application est linéaire en x. Soit $x \in \mathrm{E}$ non nul. On a $(x|x) = \sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \|g(x)\|^2 > 0$, car chaque $g(x)$ est non nul, g

étant un isomorphisme. On conclut que l'on a bien affaire à un nouveau produit scalaire sur E.

3. L'intérêt de ce nouveau produit scalaire est qu'il fait des éléments de G des isomorphismes orthogonaux. En effet, soit $f \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{E}$. Comme G est un groupe, quand g décrit G, $g \circ f$ décrit G également, si bien que

$$\begin{aligned}(f(x)|f(x)) &= \sum_{g\in \mathrm{G}} \langle g(f(x)), g(f(x))\rangle = \sum_{g\in \mathrm{G}} \langle g\circ f(x), g\circ f(x)\rangle \\ &= \sum_{h\in \mathrm{G}} \langle h(x), h(x)\rangle = (x|x).\end{aligned}$$

Si $f \in \mathrm{G}$, comme F est stable par f, l'orthogonal de F pour $(\ |\ )$ est aussi stable par f. $\lhd$

La première question de l'exercice précédent traduit la semi-simplicité des endomorphismes orthogonaux. Les endomorphismes diagonalisables à polynôme caractéristique scindé vérifient également cette propriété (voir dans le tome 2 d'algèbre, l'exercice 37 du second chapitre). À partir de la semi-simplicité, l'énoncé suivant élucide complètement la structure des éléments du groupe orthogonal en toute dimension. Matriciellement, cela revient à donner un représentant simple de chaque classe de conjugaison du groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1.35. Réduction des matrices orthogonales

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et f un élément de O(E).

1. Montrer que tout sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable par f.

2. Que dire des valeurs propres réelles de f ? Montrer que si f n'a pas de valeur propre réelle, alors il existe un plan stable par f dans lequel f induit une rotation.

3. En déduire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec pour blocs I_p, $-\mathrm{I}_q$, $\mathrm{M}(\theta_1), \ldots, \mathrm{M}(\theta_r)$ où p, q, r sont des entiers naturels, où $\mathrm{M}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour tout réel θ et où les θ_i sont des réels non nuls modulo π. À quelle condition f est-elle une rotation ?

4. En déduire que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Cela a été fait dans la première question de l'exercice précédent.

2. Comme f conserve la norme, les seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1. Notons par ailleurs, ce qui nous servira plus loin, que les espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont orthogonaux : si $u(x) = x$ et $u(y) = -y$, on peut écrire

$$\langle x, y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle,$$

ce qui donne $\langle x, y\rangle = 0$.

Supposons maintenant que f n'ait pas de valeur propre réelle. Voici deux façons, toutes les deux intéressantes, pour obtenir un plan P stable par f.

Première solution. L'endomorphisme $v = u + u^*$ est symétrique donc diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé. Comme $u(x)$ n'est pas colinéaire à x (car u n'a pas de valeur propre réelle), $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel. Montrons qu'il est stable par u. Pour cela, il suffit de prouver que $u^2(x) \in \mathrm{P}$. Or on a $u(x) + u^{-1}(x) = u(x) + u^*(x) = \lambda x$ donc $u^2(x) = \lambda u(x) - x \in \mathrm{P}$. D'où le résultat.

Seconde solution. Soit z une racine complexe de χ_f. Alors $\overline{z}$ est aussi racine de χ_f et le polynôme à coefficients réels $\mathrm{Q} = (\mathrm{X}-z)(\mathrm{X}-\overline{z})$ divise le polynôme minimal μ_f de f. Si $\mathrm{Q}(f)$ était inversible, le quotient $\dfrac{\mu_f}{\mathrm{Q}}$ serait un polynôme annulateur de f, ce qui est impossible par définition de μ_f. Il existe donc $x \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(f)$, non nul. La famille $(x, f(x))$ est forcément libre et en posant $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$, on obtient $f^2(x) = -af(x) - bx$, ce qui montre que le plan $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

Remarquons que cette seconde solution n'utilise pas le fait que f est un endomorphisme orthogonal.

Pour conclure notre question, on note que la restriction de f au plan stable P est un endomorphisme orthogonal du plan sans valeur propre réelle, c'est-à-dire une rotation plane.

3. On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial, le cas $n = 2$ est étudié dans le cours. Supposons $n \geqslant 3$ et le résultat prouvé pour les dimensions strictement inférieures à n. On distingue deux cas :

• Si 1 ou -1 est valeur propre de f, on pose $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ (l'un des deux espaces pouvant être nul). On choisit une base orthonormale B_1 de F obtenue en juxtaposant des bases orthonormales de chacun des deux espaces propres (qui rappelons-le, sont orthogonaux). Si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ on a terminé : f est diagonalisable et dans la base B_1 sa matrice est diagonale. Sinon, on note g la restriction de f à $\mathrm{F}^\perp$. On applique l'hypothèse de récurrence à g qui est dans $\mathrm{O}(\mathrm{F}^\perp)$. Il existe une base orthonormale B_2 de $\mathrm{F}^\perp$ dans laquelle la matrice de g a la forme indiquée. En fait, comme g n'a aucune valeur propre réelle, il n'y a que des blocs $(2,2)$ contenant des matrices $M(\theta)$. Dans la base orthonormale $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, la matrice de f a la forme souhaitée.

• Si f n'a aucune valeur propre réelle, on a vu en 2 qu'il existe un plan P stable par f dans lequel f induit une rotation. La matrice de la restriction de f à P est une matrice $M(\theta_1)$ avec θ_1 non nul modulo π. Pour conclure, on applique comme avant l'hypothèse de récurrence à la restriction g de f à $P^{\perp}$.

En prenant le déterminant de la matrice obtenue, il est clair que f est une rotation si, et seulement si, la dimension du sous-espace propre relatif à la valeur propre -1 est paire.

4. Matriciellement, on vient de prouver que pour toute matrice A de $SO_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(I_p, M(\theta_1), \ldots, M(\theta_r))$$

où les θ_i sont non nuls modulo 2π (on a regroupé les -1 éventuels deux par deux pour former des matrices $M(\pi)$). Si l'on pose pour $t \in [0,1]$

$$A_t = P\,\mathrm{Diag}(I_p, M(t\theta_1), \ldots, M(t\theta_r))P^{-1},$$

alors $t \longmapsto A_t$ est un chemin continu joignant $A_0 = I_n$ à $A_1 = A$. Cela prouve que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. ◁

Le complémentaire de $SO_n(\mathbb{R})$ *dans* $O_n(\mathbb{R})$ *est également connexe par arcs car, étant donné une matrice de réflexion* S *de* $\mathbb{R}^n$*, c'est l'image de* $SO_n(\mathbb{R})$ *par l'application continue* $M \longmapsto SM$. *Ainsi,* $O_n(\mathbb{R})$ *possède deux composantes connexes par arcs (cette notion est développée au début de l'exercice 1.37) qui sont* $SO_n(\mathbb{R})$ *et son complémentaire.*

Donnons maintenant une application de ce théorème de réduction des matrices orthogonales.

1.36. Exponentielle de matrices antisymétriques réelles

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de taille n. Montrer que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

• Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$${}^t\exp(A) = \exp({}^tA) = \exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$$

et $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$. Calculons le déterminant :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)) = \exp(0) = 1$$

et on conclut $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$. Ainsi exp est une application de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $SO_n(\mathbb{R})$.

• Montrons que cette application est surjective. Soit U une matrice orthogonale. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que $U = PMP^{-1}$, où M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix},$$

où $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$. Si $U \in SO_n(\mathbb{R})$ les -1 sont en nombre pair, on peut les regrouper par deux. Puisque $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\pi$, on peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & R_{\theta_1} & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}.$$

On détermine d'abord $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \exp B$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient $J^2 = -I_2$, d'où l'on déduit que, pour tout entier n, $J^{2n} = (-1)^n I_2$ et $J^{2n+1} = (-1)^n J$, puis que

$$\exp(\theta J) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} I_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} J = \cos\theta I_2 + \sin\theta J = R_\theta.$$

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \theta_1 J & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \theta_s J \end{pmatrix}$.

Du calcul précédent, on déduit que $\exp B = M$, puis que

$$\exp(PBP^{-1}) = P\exp(B)P^{-1} = PMP^{-1} = U.$$

Par construction, B est antisymétrique. On pose $A = PBP^{-1}$. On a alors ${}^tA = {}^tP^{-1}\,{}^tB\,{}^tP = -PBP^{-1} = -A$, car P est orthogonale. Ainsi $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $\exp A = U$. ◁

Voici maintenant la preuve d'un résultat algébrique abstrait sur le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ *qui s'inscrit dans la classification des groupes classiques : le groupe* SO_3 *est simple* i.e. *il ne possède que deux sous-groupes distingués, à savoir lui-même et le sous-groupe réduit à l'identité. La nature géométrique des éléments y joue un rôle central.*

1.37. Simplicité de SO_3

Soit G un sous-groupe de SO_3, le groupe des rotations de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, et G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G.

1. Montrer que G_0 est un sous-groupe de G.

2. Montrer que si G est distingué dans SO_3 (ce qui signifie que pour tout $h \in SO_3$ et tout $g \in G$, on a $hgh^{-1} \in G$), il en est de même de G_0.

3. On suppose ici que G est connexe par arcs, distingué et non réduit à $\{Id\}$. Montrer que G contient une rotation d'angle π. En déduire que $G = SO_3$.

4. On suppose que G est distingué. Montrer que $G = \{Id\}$ ou $G = SO_3$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Commençons par quelques précisions sur les notions abordées dans cet exercice. On notera sous forme multiplicative la composée de deux éléments de G. Le groupe SO_3 est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie d'espace normé. On rappelle qu'un chemin de G est une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{G}$, continue ; $\gamma(0)$ est l'origine du chemin et $\gamma(1)$ son extrémité.

On considère sur G la relation $\mathcal{R}$ définie par : $g\mathcal{R}h$ s'il existe un chemin de G d'origine g et d'extrémité h. Cette relation est une relation d'équivalence. En effet, si $g \in \mathrm{G}$, $g\mathcal{R}g$, comme on le voit en considérant $\gamma : t \longmapsto g$; si $g\mathcal{R}h$ et si γ est un chemin de G d'origine g et d'extrémité h, l'application $\gamma' : t \longmapsto \gamma(1-t)$ est un chemin d'origine h et d'extrémité g ; enfin si $g\mathcal{R}h$ et $h\mathcal{R}k$ et si γ (resp. γ') est un chemin de G d'origine g et d'extrémité h (resp. d'origine h et d'extrémité k) l'application γ'' : $[0,1] \longrightarrow \mathrm{G}$ définie par $\gamma''(t) = \gamma(2t)$ si $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\gamma''(t) = \gamma'(2t-1)$ si $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est un chemin d'origine g et d'extrémité k. Les classes d'équivalence pour cette relation sont les composantes connexes par arcs de G.

1. Par définition, G_0 contient Id. Soit g et h deux éléments de G_0, γ et γ' des chemins de G_0 reliant Id à g et h respectivement. Considérons l'application $\gamma'' : t \longmapsto \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ appartiennent à G donc $\gamma(t)(\gamma'(t))^{-1}$ appartient à G, car G est un sous-groupe de SO_3. Enfin l'application $g \longmapsto g^{-1}$ est continue sur SO_3, car si l'on identifie un élément de SO_3 à sa matrice dans la base canonique, les coefficients de g^{-1} dépendent polynomialement des coefficients de g. Enfin $\gamma''(0) = \mathrm{Id} \cdot \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi, γ'' est un chemin de Id à gh^{-1} et gh^{-1} appartient à G_0. On a montré que G_0 est un sous-groupe de G.

2. Soit $g \in \mathrm{G}_0$, γ un chemin de G de Id à g et $h \in \mathrm{SO}_3$. Considérons l'application $\gamma' : t \in [0,1] \longmapsto h\gamma(t)h^{-1} \in \mathrm{SO}_3$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in \mathrm{G}$ et G étant distingué, $h\gamma(t)h^{-1} \in \mathrm{G}$. L'application γ est continue de même que la multiplication à droite ou à gauche par un élément de SO_3, donc γ' est continue. Enfin, on a $\gamma'(0) = h\,\mathrm{Id}\,h^{-1} = \mathrm{Id}$ et $\gamma'(1) = hgh^{-1}$. L'application γ' est un chemin de Id à hgh^{-1} et hgh^{-1} appartient à G_0 : G_0 est distingué dans SO_3.

3. Si θ est l'angle d'une rotation g de $\mathbb{R}^3$ (notons que θ est défini au signe près, puisque si l'on change l'orientation de l'axe de la rotation, l'angle est changé en son opposé), nous savons qu'il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si bien que $\mathrm{Tr}\, g = 2\cos\theta + 1$ et donc l'application $g \in \mathrm{SO}_3 \longmapsto \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}\, g - 1}{2}$ est une application continue. Il suffit de montrer que cette application prend la valeur -1 pour avoir une rotation $g \in \mathrm{G}$ d'angle π.

Mais, grâce à l'argument de connexité, il va s'avérer plus facile de trouver un élément de G d'angle θ avec $\cos\theta = 0$, autrement dit, nous allons prouver que G contient une rotation r d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$. Alors r^2 sera un élément de G d'angle π. Montrons pour commencer que G possède un élément s tel que $\cos\theta \leqslant 0$. On appliquera ensuite le théorème des valeurs intermédiaires. Par hypothèse, G possède un élément g différent de Id. Quitte à considérer g^{-1}, on peut supposer qu'une mesure θ de son angle appartient à $]0,\pi]$. Si $\cos\theta \leqslant 0$, on prend $s = g$, sinon on pose $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$. On a alors $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{N}\theta \leqslant \frac{\pi}{2} < (\mathrm{N}+1)\theta < 2\frac{\pi}{2}$; $g^{\mathrm{N}+1}$ est une rotation d'angle $(\mathrm{N}+1)\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$; on pose $s = g^{\mathrm{N}+1}$.

Puisque G est connexe par arcs, il existe un chemin γ de Id à s. L'application $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(\gamma(t)) - 1)$ est continue, puisque Tr et γ le sont. Puisque $\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, s - 1) \leqslant 0$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm\frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{R} = r^2$ un angle de π ; R est un retournement.

Pour tout $g \in SO_3$, $g\mathrm{R}g^{-1}$ appartient à G et $\mathrm{Tr}(g\mathrm{R}g^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R})$ donc $g\mathrm{R}g^{-1}$ est aussi d'angle π. Si le vecteur u appartient à l'axe Δ de R, on a alors $(g\mathrm{R}g^{-1})(g(u)) = g(u)$, ce qui montre que $g\mathrm{R}g^{-1}$ est le retournement d'axe $g(\Delta)$. Or, étant donné une droite D de $\mathbb{R}^3$, il est toujours possible de trouver une rotation g de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{D} = g(\Delta)$, en prenant un axe orthogonal à D et Δ et un angle *ad hoc*[3]. Ainsi, G contient tous les retournements.

Or, toute rotation s'écrit comme produit de deux retournements (voir l'exercice 1.33 pour la preuve de ce résultat du cours). On conclut que G contient toutes les rotations *i.e.* $\mathrm{G} = SO_3$.

4. On suppose simplement que G est distingué. Considérons G_0 la composante connexe par arcs de Id. D'après la question 2, G_0 est un sous-groupe distingué et, par définition, connexe par arcs de SO_3. D'après la question 3, si G_0 est différent de $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathrm{G}_0 = SO_3$, auquel cas $\mathrm{G} = SO_3$.

Supposons $\mathrm{G}_0 = \{\mathrm{Id}\}$ et montrons que $\mathrm{G} = \{\mathrm{Id}\}$. Remarquons que dans ces conditions, toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons. En effet, si g' est dans la composante de g, relié par le chemin γ, alors $t \longmapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant Id à $g^{-1}g'$. Ainsi, $g^{-1}g' \in \mathrm{G}_0 = \{\mathrm{Id}\}$ et il en résulte $g' = g$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que G contienne un élément g différent de Id. Soit h une rotation quelconque, différente de Id, θ une mesure de l'angle de h. Pour tout $t \in [0,1]$, on note h_t la rotation de même axe et d'angle $t\theta$. L'application $t \longmapsto h_t$ est continue, car,

3. On dit que SO_3 agit transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^3$.

matriciellement, elle se traduit dans une certaine base orthonormale par $t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & 0 \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'application $t \in [0,1] \longmapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin de G, car G est distingué, d'origine g et d'extrémité hgh^{-1}. Ainsi hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arcs de g.

Cette dernière étant réduite à un singleton, on obtient $hgh^{-1} = g$. Or, si g est une rotation d'axe Δ, hgh^{-1} est une rotation d'axe $h(\Delta)$, donc $h(\Delta) = \Delta$. C'est impossible : une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de l'espace. On conclut que $\mathrm{G} = \{\mathrm{Id}\}$.

Conclusion. Les seuls sous-groupes distingués de SO_3 sont SO_3 et $\{\mathrm{Id}\}$. $\triangleleft$

Un polynôme réel de quatre variables peut être vu comme une application définie pour un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit ici de prouver que de tels polynômes invariants lorsqu'on fait agir une rotation quelconque sur un couple de vecteurs (x, y) s'écrivent comme fonction polynomiale des normes et du produit scalaire de x et y.

1.38. Polynômes de quatre variables invariants sous l'action de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{F} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$. Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on note $\mathrm{F}(x, y)$ au lieu de $\mathrm{F}(x_1, x_2, y_1, y_2)$. On fait agir G sur $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ par $g\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{F}(gx, gy)$. On suppose enfin que, pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $g\mathrm{F} = \mathrm{F}$.

1. Soit $\mathrm{K}(a, b, c) = \mathrm{F}(a, 0, b, c)$. Montrer que K est un polynôme en a^2, b^2, c^2 et ab.

2. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{R}[u, v, w]$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous x et y de $\mathbb{R}^2$, x non nul

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{\mathrm{N}(\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle x, y\rangle)}{\langle x, x\rangle^\alpha}.$$

3. Soit $\mathrm{R} \in \mathbb{R}[u, v, w]$ tel que, pour tous x et y de $\mathbb{R}^2$, on ait $\mathrm{R}(\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle x, y\rangle) = 0$. Montrer que $\mathrm{R} = 0$.

4. En déduire que F est de la forme $\mathrm{H}(\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle x, y\rangle)$, où $\mathrm{H} \in \mathbb{R}[u, v, w]$.

(**École normale supérieure**)

Solution.

1. K est un polynôme en a, b, c. En considérant $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on obtient $K(a, b, c) = K(a, b, -c)$, donc K ne contient que des puissances paires de c. De même, $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ conduit à $K(-a, -b, c) = K(a, b, c)$. On en déduit que si le coefficient du monôme $a^i b^j c^{2k}$ est non nul alors $i + j$ est pair et les entiers i et j sont de même parité. Si $i = 2i'$ et $j = 2j'$ sont pairs, $a^i b^j c^{2k} = (a^2)^{i'} (b^2)^{j'} (c^2)^k$; s'ils sont tous les deux impairs, $i = 2i' + 1$ et $j = 2j' + 1$, $a^i b^j c^{2k} = (a^2)^{i'} (b^2)^{j'} (c^2)^k ab$. Ainsi K est un polynôme en a^2, b^2, c^2 et ab.

2. On suppose que $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ et on considère une matrice de rotation telle que $g(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, 0) = (\|x\|, 0)$ afin d'utiliser K. On note $a = \|x\|$ et $gy = (b, c)$ et $F(x, y) = K(a, b, c)$. Il existe d'après la question précédente $L \in \mathbb{R}[u, v, w, t]$ tel que $K(a, b, c) = L(a^2, b^2, c^2, ab)$. Comme g conserve la norme et le produit scalaire, on a

$$a^2 = \langle x, x\rangle, \quad ab = \langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 = \|y\|^2,$$

si bien que

$$b^2 = \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \quad \text{et} \quad c^2 = \langle y, y\rangle^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle}.$$

Ainsi, on a donc

$$F(x, y) = L\left(\langle x, x\rangle, \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle}, \langle y, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle}, \langle x, y\rangle\right).$$

On note α le degré total de L en (v, w). En multipliant $F(x, y)$ par $\langle x, x\rangle^\alpha$, on obtient un polynôme en $\langle x, x\rangle$, $\langle x, y\rangle$ et $\langle y, y\rangle$ que l'on note N.

3. Soit λ et μ deux réels strictement positifs, $\theta \in \mathbb{R}$, $x = \left(\sqrt{\lambda}, 0\right)$, $y = (\sqrt{\mu}\cos\theta, \sqrt{\mu}\sin\theta)$. On a alors $\langle x, x\rangle = \lambda$, $\langle y, y\rangle = \mu$ et $\langle x, y\rangle = \sqrt{\lambda\mu}\cos\theta$. On a donc $R\left(\lambda, \mu, \sqrt{\lambda\mu}\cos\theta\right) = 0$. Pour tout λ et μ strictement positifs, le polynôme d'une variable $R(\lambda, \mu, w)$ est nul, car il possède une infinité de racines. On en déduit que, pour tout $\lambda > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, le polynôme d'une variable $R(\lambda, v, \nu)$ est nul, car il possède une infinité de racines puis que, pour tous réels μ et ν le polynôme d'une variable $R(u, \mu, \nu)$ est nul. On a donc $R(\lambda, \mu, \nu) = 0$ pour tous réels λ, μ, ν, donc $R = 0$.

4. En échangeant le rôle de x et de y, la question 2 nous donne l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[u, v, w]$ et de $\beta \in \mathbb{N}$ tels que pour tout couple (x, y) avec $y \neq 0$, on ait

$$F(x, y) = \frac{P(\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle x, y\rangle)}{\langle y, y\rangle^\beta}.$$

Si l'on note $\mathrm{R} = v^\beta \mathrm{N}(u,v,w) - u^\alpha \mathrm{P}(u,v,w) \in \mathbb{R}[u,v,w]$, on a $\mathrm{R}(\langle x,x\rangle, \langle y,y\rangle, \langle x,y\rangle) = 0$ pour x et y non nuls dans $\mathbb{R}^2$. Cela reste encore vrai pour x ou y nul par continuité. La question précédente nous assure que le polynôme formel R est nul. L'égalité $v^\beta \mathrm{N}(u,v,w) = u^\alpha \mathrm{P}(u,v,w)$ implique que si le coefficient du monôme $u^i v^j w^k$ dans $\mathrm{N}(u,v,w)$ est non nul, alors $i \geqslant \alpha$. Ainsi u^α se factorise dans N et il existe $\mathrm{H} \in \mathbb{R}[u,v,w]$ tel que $\mathrm{H}(u,v,w) = \dfrac{\mathrm{N}(u,v,w)}{u^\alpha}$ et finalement pour x non nul,

$$\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{H}(\langle x,x\rangle, \langle y,y\rangle, \langle x,y\rangle),$$

formule qui reste valable pour $x = 0$ par continuité. $\triangleleft$

Le commutant du groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *est réduit aux homothéties : en effet, considérons un endomorphisme u commutant avec tout élément du groupe orthogonal de* E. *Si x est un vecteur non nul de* E *et si u commute avec la réflexion s d'hyperplan $x^\perp$, alors u laisse stable le sous-espace propre* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathbb{R}x$. *Autrement dit, tout vecteur non nul est un vecteur propre pour u, qui est donc nécessairement une homothétie. Dans l'exercice suivant, on retrouve ces idées pour résoudre une équation fonctionnelle portant sur le groupe orthogonal.*

1.39. Équation fonctionnelle faisant intervenir le groupe orthogonal

Déterminer les applications $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad f(\mathrm{OX}) = \mathrm{O} f(\mathrm{X})\, {}^t\mathrm{O}.$$

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Analyse. Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Pour obtenir des informations sur la matrice $f(\mathrm{X})$, il est naturel de considérer les matrices orthogonales O telles que $\mathrm{OX} = \mathrm{X}$. On identifie les matrices et les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qu'elles représentent dans la base canonique. Considérons O_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}\mathrm{X}$. On a $f(\mathrm{O}_1\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}) = \mathrm{O}_1 f(\mathrm{X})\, {}^t\mathrm{O}_1$ et $f(\mathrm{X})\mathrm{O}_1 = \mathrm{O}_1 f(\mathrm{X})$: les endomorphismes $f(\mathrm{X})$ et O_1 commutent et donc les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathrm{O}_1 - \mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{O}_1 + \mathrm{I}_n)$ sont stables par $f(\mathrm{X})$. Il en résulte que X est un vecteur propre de $f(\mathrm{X})$ et que l'hyperplan $\mathrm{H} = \mathrm{X}^\perp$ est stable par $f(\mathrm{X})$.

Prenons maintenant $\mathrm{Y} \in \mathrm{H}$ non nul et notons O_2 la réflexion par rapport à l'orthogonal de Y. Comme X est orthogonal à Y, on a $\mathrm{O}_2\mathrm{X} = \mathrm{X}$

et donc $f(\mathrm{X}) = \mathrm{O}_2 f(\mathrm{X})\,{}^t\mathrm{O}_2$ et finalement $f(\mathrm{X})\mathrm{O}_2 = \mathrm{O}_2 f(\mathrm{X})$. Comme précédemment, $f(\mathrm{X})$ laisse stable $\mathrm{Ker}(\mathrm{O}_2+\mathrm{I}_n) = \mathbb{R}\mathrm{Y}$. Ainsi, les vecteurs non nuls de H sont tous vecteurs propres de l'endomorphisme induit par $f(\mathrm{X})$ sur H. Il est classique d'en déduire que $f(\mathrm{X})$ restreinte à H est une homothétie.

Ainsi, on peut écrire $f(\mathrm{X})$ sous la forme $f(\mathrm{X}) = a(\mathrm{X})p_\mathrm{X} + b(\mathrm{X})\mathrm{I}_n$ où p_X désigne la matrice du projecteur orthogonal sur la droite $\mathbb{R}\mathrm{X}$ et où $a(\mathrm{X}), b(\mathrm{X})$ sont deux réels dépendant *a priori* de X.

Pour le vecteur nul, on voit comme ci-dessus que la matrice $f(0)$ commute avec $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: c'est donc une homothétie et l'écriture précédente reste correcte.

Synthèse. Regardons maintenant si ces applications conviennent. Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On a

$$f(\mathrm{OX}) = a(\mathrm{OX})p_{\mathrm{OX}} + b(\mathrm{OX})\mathrm{I}_n$$

et

$$\mathrm{O}f(\mathrm{X})\mathrm{O}^{-1} = a(\mathrm{X})\mathrm{O}p_\mathrm{X}\mathrm{O}^{-1} + b(\mathrm{X})\mathrm{I}_n.$$

On a bien $\mathrm{O}p_\mathrm{X}\mathrm{O}^{-1} = p_{\mathrm{OX}}$. Si X est nul, l'égalité est vérifiée. Supposons X non nul. Alors la famille $(p_{\mathrm{OX}}, \mathrm{I}_n)$ est libre et il y a égalité si, et seulement si, $a(\mathrm{OX}) = a(\mathrm{X})$ et $b(\mathrm{OX}) = b(\mathrm{X})$. Si X est un vecteur fixé, l'ensemble $\{\mathrm{OX}, \mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\}$ est la sphère de centre 0 et de rayon $\|\mathrm{X}\|$. Il en résulte que f convient si, et seulement si, a et b sont des fonctions qui ne dépendent que de la norme euclidienne de X.

Conclusion. Les solutions sont les applications de la forme

$$\mathrm{X} \longmapsto \lambda(\|\mathrm{X}\|)p_\mathrm{X} + \mu(\|\mathrm{X}\|)\mathrm{I}_n,$$

où λ, μ sont des applications quelconques de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. ◁

Les exercices suivants sont consacrés à la dimension 3 *et notamment au produit vectoriel.*

1.40. Endomorphismes conservant le produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ non nulle. Montrer que f est une rotation si, et seulement si,

$$\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2 \quad f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v).$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. On a alors, par définition du produit vectoriel, pour tout $(u, v, w) \in \mathrm{E}^3$, $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle u \wedge v, w\rangle$.

• Supposons que f soit une rotation. On a alors, pour $(u, v, w) \in \mathrm{E}^3$,

$$\begin{aligned}\langle f(u) \wedge f(v), f(w)\rangle &= \det_{\mathcal{B}}(f(u), f(v), f(w)) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)\\ &= \langle u \wedge v, w\rangle = \langle f(u \wedge v), f(w)\rangle,\end{aligned}$$

car f est de déterminant 1 et conserve le produit scalaire. Puisque f est bijective, le vecteur $f(u \wedge v) - f(u) \wedge f(v)$ est orthonormal à tout vecteur de E donc, pour tout u et v de E,

$$f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$

• Supposons réciproquement que cette condition soit réalisée.

Considérons (i, j, k) une base orthonormale directe. Comme $i \wedge j = k$, on a $f(i) \wedge f(j) = f(k)$ et donc $f(k)$ est orthogonal à $f(i)$ et $f(j)$. Comme $k \wedge i = j$, on a $f(k) \wedge f(i) = f(j)$ et on obtient finalement que $(f(i), f(j), f(k))$ forme un système orthogonal. D'autre part, on a $\|f(i)\|\|f(j)\| = \|f(k)\|$ et $\|f(k)\|\|f(i)\| = \|f(j)\|$. D'où $\|f(i)\|^2\|f(k)\| = \|f(k)\|$. Le cas $\|f(k)\| = 0$ est à exclure car alors on aurait $f(i) = f(j) = f(k) = 0$ (car $f(i) = f(j) \wedge f(k)$, puisque $i = j \wedge k$), et f serait nulle. Il s'ensuit que $\|f(i)\| = 1$ et il en va de même pour $f(j)$ et $f(k)$ par permutation circulaire. Ainsi, $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormale et elle est même directe puisque $f(k) = f(i) \wedge f(j)$. L'endomorphisme f transformant une base orthonormale directe en une autre base orthonormale directe, il s'agit d'une rotation. ◁

Dans l'exercice suivant on donne une construction abstraite du corps non commutatif des quaternions de Hamilton.

1.41. Le groupe des quaternions

Soit V un espace euclidien de dimension 3, $\mathrm{E} = \mathbb{R} \times \mathrm{V}$ muni de la structure euclidienne produit. On note $(p_0, \overrightarrow{p})$ un élément de E. On pose, pour p et q dans E,

$$pq = (p_0q_0 - (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}), p_0\overrightarrow{q} + q_0\overrightarrow{p} + \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q}).$$

On admet que cette loi est associative et que $\|pq\| = \|p\|\|q\|$.

1. On note U la sphère unité de E. Montrer que U est un groupe (appelé le groupe des quaternions).

2. On pose, pour $p \in \mathrm{U}$ et $x \in \mathrm{E}$, $a_p(x) = pxp^{-1}$. Montrer que l'application $p \longmapsto a_p$ est un morphisme de U dans le groupe des rotations de $\{0\} \times \mathrm{V}$.

(**École polytechnique**)

Solution.

L'associativité et la relation sur la norme, qui sont admises dans l'énoncé peuvent se vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1. Le produit de deux éléments de U est un élément de U car

$$\|p \cdot q\| = \|p\|\|q\|.$$

On vérifie que $1_{\mathrm{E}} = (1, \overrightarrow{0}) \in \mathrm{U}$ est élément neutre pour la multiplication. Pour tout élément $p = (p_0, \overrightarrow{p})$ de E, on note $\overline{p} = (p_0, -\overrightarrow{p})$. Si $p = (p_0, \overrightarrow{p}) \in \mathrm{U}$, on a

$$p\overline{p} = (p_0^2 + \|\overrightarrow{p}\|^2, -p_0\overrightarrow{p} + p_0\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{p}) = 1_{\mathrm{E}},$$

car $p_0^2 + \|\overrightarrow{p}\|^2 = \|(p_0, \overrightarrow{p})\|^2 = 1$. On montre de même que $\overline{p} \cdot p = 1_{\mathrm{E}}$. Donc $\overline{p}$ est l'inverse de p et U est un groupe multiplicatif.

2. Notons $\mathrm{P} = \{0\} \times \mathrm{V}$. Il faut démontrer que, si p appartient à U et x à P, alors $a_p(x)$ est dans P. On utilise la caractérisation suivante : si $x \in \mathrm{E}$, alors $x \in \mathrm{P}$ si, et seulement si, $\overline{x} = -x$. Pour $p = (p_0, \overrightarrow{p})$ et $q = (q_0, \overrightarrow{q})$ dans E, on a

$$\begin{aligned}\overline{pq} &= (p_0q_0 - \langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \rangle, -p_0\overrightarrow{q} - q_0\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q}) \\ &= (q_0p_0 - \langle \overrightarrow{q}, \overrightarrow{p} \rangle, -q_0\overrightarrow{p} - p_0\overrightarrow{q} + \overrightarrow{q} \wedge \overrightarrow{p}) = \overline{q}.\overline{p}.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour $p \in \mathrm{U}$ et $x \in \mathrm{P}$,

$$\overline{a_p(x)} = \overline{px\overline{p}} = p\,\overline{x}\,\overline{p} = -p\,x\,\overline{p} = -a_p(x).$$

Ceci montre que $a_p(x)$ appartient à P. D'autre part, l'application a_p est clairement linéaire. Enfin, pour tout $x \in \mathrm{P}$,

$$\|a_p(x)\| = \|p\|\|x\|\|\overline{p}\| = \|x\|,$$

car p et $\overline{p}$ sont dans U. L'application a_p est un endomorphisme orthogonal de P.

Cherchons les éléments de P invariants par a_p. On a, pour $x \in \mathrm{P}$, $a_p(x) = x$ si, et seulement si, $px = xp$. Si $p = (p_0, \overrightarrow{p})$ et $x = (0, \overrightarrow{q})$, on obtient

$$\begin{aligned}px &= (-\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q} \rangle, p_0\overrightarrow{q} + \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q}) \\ xp &= (-\langle \overrightarrow{q}, \overrightarrow{p} \rangle, p_0\overrightarrow{q} + \overrightarrow{q} \wedge \overrightarrow{p}).\end{aligned}$$

On a donc

$$xp = px \iff \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{q} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{q} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{p}).$$

Si $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$, l'application a_p est une rotation de P, d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{p})$. Si $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$, et donc $p = \pm 1_{\mathrm{E}}$, a_p est l'identité. L'application $\varphi : p \longmapsto a_p$ va de U dans SO(P).

On a d'autre part, $a_p \circ a_{p'}(x) = pp'x\overline{p'}\overline{p} = pp'x\overline{pp'} = a_{pp'}(x)$. L'application $\varphi : p \longmapsto a_p$ est donc un morphisme de groupes de U dans SO(P). $\lhd$

On peut remarquer que si $p = (0, \overrightarrow{p}) \in \mathrm{P} \cap \mathrm{U}$, *on a*

$$p^2 = p(-\overline{p}) = -1_{\mathrm{E}} \quad \textit{et} \quad a_{p^2} = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}\,.$$

Ainsi, a_p *est le retournement d'axe* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{p})$. *Le groupe* $\varphi(\mathrm{U})$ *contient donc tous les retournements de* P *et comme les retournements engendrent* SO(P), *l'application* φ *est surjective.*

D'autre part, il résulte de l'étude de a_p *que le noyau de* φ *est* $\{1_{\mathrm{E}}, -1_{\mathrm{E}}\}$. *Le groupe* SO(P) *est donc isomorphe à* $\mathrm{U}/\{-1_{\mathrm{E}}, 1_{\mathrm{E}}\}$. *L'espace vectoriel euclidien* P *est isomorphe à* V *et donc à* $\mathbb{R}^3$. *On obtient donc que* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *est isomorphe à* $\mathrm{U}/\{-1, 1\}$.

On peut montrer que $(\mathrm{E}, +, \times)$ *est un corps non commutatif appelé corps des quaternions. C'est aussi une* $\mathbb{R}$*-algèbre de dimension* 4.

Voici une équation fonctionnelle portant sur $\mathbb{R}^2$ *muni de sa structure euclidienne canonique.*

1.42. Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les applications V de $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^2$, avec $\mathrm{X} \neq 0$, pour tout réel a et b, avec $a \neq 0$, on ait (la norme étant la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$)

$$\mathrm{V}(a\mathrm{AX}, a^2\mathrm{AY} + b\mathrm{AX}) = \frac{\|\mathrm{X}\|}{\|\mathrm{AX}\|}\mathrm{V}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

(École normale supérieure)

$\rhd$ **Solution.**

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et det le déterminant dans cette base.

- *Analyse.* Supposons que (X, Y) soit une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Montrons que l'on peut trouver $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $aAe_1 = X$ et $a^2Ae_2 + bAe_1 = Y$. Ceci équivaut à $Ae_1 = \frac{1}{a}X$ et $Ae_2 = \frac{1}{a^2}(Y - \frac{b}{a}X)$. On a alors

$$\det A = \det\left(\frac{1}{a}X, \frac{1}{a^2}(Y - \frac{b}{a}X)\right) = \frac{1}{a^3}\det(X, Y).$$

Comme $\det(X, Y) \neq 0$, on peut choisir a pour que $\det A = 1$: a doit être la racine cubique de $\det(X, Y)$. Pour un tel choix de a, b et A (en fait, b est quelconque), on obtient

$$\begin{aligned}V(X, Y) &= V(aAe_1, a^2Ae_2 + bAe_1) = \frac{\|e_1\|}{\|Ae_1\|}V(e_1, e_2) = \frac{|a|}{\|X\|}V(e_1, e_2)\\ &= \frac{|\det(X, Y)|^{\frac{1}{3}}}{\|X\|}V(e_1, e_2).\end{aligned}$$

Montrons que cette formule reste valable si (X, Y) est liée, c'est-à-dire que l'on obtient alors $V(X, Y) = 0$.

Supposons d'abord que $Y = 0$. En choisissant $A \in SL_2(\mathbb{R})$ telle que $AX = 2X$ (c'est possible), $a = 1$, $b = 0$, on arrive à $V(2X, 0) = \frac{1}{2}V(X, Y)$, puis avec $AX = X$, $a = 2$ et $b = 0$, on obtient $V(2X, 0) = V(X, Y)$. On en déduit que $V(X, Y) = 0$.

Si $Y = \lambda X$, on obtient avec $A = I_2$, $a = 1$ et $b = -\lambda$, $V(X, Y - \lambda X) = V(X, Y)$ et donc $V(X, Y) = V(X, 0) = 0$.

En posant $k = V(e_1, e_2)$, on obtient, pour tout X et Y dans $\mathbb{R}^2$,

$$\boxed{V(X, Y) = k\frac{|\det(X, Y)|^{\frac{1}{3}}}{\|X\|}}.$$

• *Synthèse.* On montre, réciproquement que toute application de cette forme convient. Pour $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a en effet

$$\begin{aligned}V(aAX, a^2AY + bAX) &= k\frac{|\det(aAX, a^2AY + bAX)|^{\frac{1}{3}}}{\|aAX\|}\\ &= k\frac{|a^3\det(AX, AY)|^{\frac{1}{3}}}{\|aAX\|} = k\frac{|\det(X, Y)|^{\frac{1}{3}}}{\|AX\|}\\ &= \frac{\|X\|}{\|AX\|}V(X, Y). \quad \triangleleft\end{aligned}$$

Nous terminons la série d'exercices sur les espaces euclidiens par le théorème de projection sur un convexe fermé (et quelques applications) : la distance d'un point d'un espace euclidien (ou plus généralement d'un *espace de Hilbert) à un convexe fermé non vide est atteinte en un unique point. En cela, il prolonge le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace (de dimension finie). C'est un résultat essentiel pour la théorie des espaces de Hilbert et l'étude des opérateurs en analyse fonctionnelle. Si la vision géométrique de cette propriété s'impose, des arguments d'analyse (compacité ou complétude) sont requis pour prouver l'existence du projeté.*

1.43. Projection sur un convexe fermé

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de E, $a \in \mathrm{E}$ et $d = d(a, \mathcal{C})$.

1. Établir le *lemme de la médiane* : pour trois points A, B et C de E, et I le milieu de [B, C] on a

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 = 2\|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|^2.$$

2. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que $\|h - a\| = d$. Vérifier l'unicité de h. Le point h est le *projeté orthogonal de a sur $\mathcal{C}$*.

3. Soit $x \in \mathcal{C}$. Démontrer que $\langle h - a, h - x\rangle \leqslant 0$.

4. En déduire lorsque $a \notin \mathcal{C}$, l'existence d'un demi-espace fermé qui contient $\mathcal{C}$ mais pas a.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Il s'agit d'une réécriture de l'identité du parallélogramme : on a

$$\begin{aligned} 2\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2 + 2\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 &= \|\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2 \\ &= 4\|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|^2 \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$, I étant le milieu de [B, C]. En divisant par 2, on obtient le résultat.

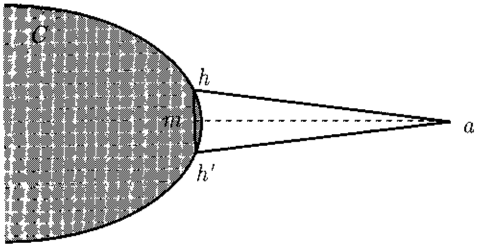
2. *Existence.* Il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}$ telle que $\|h_n - a\|$ converge vers d. Cette suite est bornée, puisque $\|h_n\| \leqslant \|h_n - a\| + \|a\|$. Elle admet donc une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (E est de dimension finie). Cette sous-suite converge vers un point h qui est donc dans l'adhérence de $\mathcal{C}$. Le convexe $\mathcal{C}$ étant fermé, h est dans $\mathcal{C}$ et par passage à la limite. $\|h - a\| = d$.

Unicité. La convexité intervient ici. Considérons deux points h et h' de $\mathcal{C}$ tels que $\|h - a\| = \|h' - a\| = d$. Introduisons $m = \dfrac{h + h'}{2}$ qui correspond au milieu de h et h' et qui est un point de $\mathcal{C}$ par convexité.

D'après le lemme de la médiane portant sur les points a, h et h', on obtient

$$\|h-a\|^2+\|h'-a\|^2=2\|m-a\|^2+\frac{1}{2}\|h'-h\|^2.$$

Dans ces conditions, $2\|m-a\|^2=2d^2-\frac{1}{2}\|h'-h\|^2$ et comme $\|m-a\|\geqslant d$, on a $2d^2\leqslant 2\|m-a\|^2$ et nécessairement $\|h'-h\|=0$: les points h et h' sont confondus.



3. Pour utiliser la convexité, on va écrire que pour tout $y\in[h,x]$, $\|y-a\|\geqslant\|h-a\|$. Plus précisément, si $t\in[0,1]$, $y=(1-t)h+tx$ décrit $[a,x]\subset C$ et on a donc l'inégalité

$$\begin{aligned}\|h-a\|^2 &\leqslant \|(1-t)h+tx-a\|^2=\|-t(h-x)+h-a\|^2\\ &\leqslant t^2\|h-x\|^2-2t\langle h-x,h-a\rangle+\|h-a\|^2,\end{aligned}$$

ce qui donne $0\leqslant t^2\|h-x\|-2t\langle h-x,h-a\rangle$. Si on l'avait $\langle h-x,h-a\rangle>0$, la quantité $t^2\|h-x\|-2t\langle h-x,h-a\rangle \underset{t\to0^+}{\sim} -2t\langle h-x,h-a\rangle$ serait strictement négative au voisinage de 0^+, ce qui est exclu. Par conséquent, on a prouvé que $\langle h-x,h-a\rangle\leqslant 0$.

4. Comme a n'est pas dans C, $a\neq h$ et $\langle h-x,h-a\rangle\leqslant 0$ est l'équation d'un demi-espace fermé dans lequel on retrouve C d'après la question précédente. Sa frontière est l'hyperplan[4] passant par h, de direction l'orthogonal de $h-a$. Il ne contient pas a, puisque $\langle h-a,h-a\rangle=\|h-a\|^2>0$. ◁

Dans le tome 3 d'Analyse, nous verrons que pour prouver l'existence de h, nous pouvons utiliser des arguments de complétude (plutôt que de s'appuyer sur la compacité comme nous l'avons fait ici à travers le théorème de Bolzano-Weierstrass). Ainsi, les résultats de cet exercice restent valables si C est un convexe fermé d'un espace de Hilbert (de dimension finie ou pas).

Nous proposons maintenant deux exercices où le théorème de projection sur un convexe fermé se révèle incontournable.

4. Un tel hyperplan est appelé hyperplan d'appui au convexe C en h.

1.44. Lemme de Farkas

Soit $J_1, \dots, J_p$ des points de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien. On note C l'ensemble des vecteurs $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i J_i$ où les λ_i sont des réels positifs ou nuls quelconques.

1. Montrer que C est un cône convexe fermé. On note

$$C' = \{X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in C, \langle X, Y \rangle \leqslant 0\}$$

$$C'' = \{X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in C', \langle X, Y \rangle \leqslant 0\}.$$

2. Justifier l'inclusion $C \subset C''$. On veut démontrer que $C = C''$. Soit $X \in C''$ et P le projeté orthogonal de X sur le convexe fermé C (voir l'exercice précédent). Démontrer que P et $X - P$ sont orthogonaux. Démontrer que $X - P \in C'$. Conclure.

3. Soit $B \in \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ vérifiant pour chaque $1 \leqslant i \leqslant p$, $\langle J_i, X \rangle \geqslant 0$, on a $\langle B, X \rangle \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que

$$B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i J_i.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Un barycentre à coefficients positifs de deux éléments de C est clairement une combinaison linéaire à coefficients positifs des J_i, donc un élément de C : l'ensemble C est convexe. Il s'agit bien d'un cône, puisque C est stable par multiplication par un réel positif.

Il reste à vérifier que C est fermé et pour cela, nous allons procéder par récurrence sur $p \geqslant 0$. Pour $p = 0$, $C = \{0\}$ est bien fermé. Supposons maintenant $p \geqslant 1$ et le résultat vrai au rang $p-1$. Penchons-nous d'abord sur le cas particulier où pour chaque k, $-J_k$ est dans C. Comme C est stable par homothétie de rapport positif et par addition, C est clairement le sous-espace engendré par les J_i. En particulier, C est fermé, puisqu'il est de dimension finie.

Supposons désormais que l'un des opposés des J_k, disons $-J_p$ pour fixer les idées, ne soit pas dans C. Notons $C_0 = \sum_{i=1}^{p-1} \mathbb{R}_+ J_i$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs de $J_1, \dots, J_{p-1}$. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de C convergente vers un vecteur X. Il s'agit de montrer que $X \in C$. Écrivons pour tout k, $X_k = Y_k + \lambda_k J_p$ avec $Y_k \in C_0$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que λ_k tende vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. Pour k assez grand, λ_k est non nul et

$$\frac{Y_k}{\lambda_k} + J_p = \frac{X_k}{\lambda_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

puisque $(X_k)_{k\geqslant 0}$ est bornée. Il s'ensuit que $-J_p = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{Y_k}{\lambda_k}$ et $-J_p$, en tant que limite de points de C_0, est aussi un point de C_0, puisque cet ensemble est fermé par hypothèse de récurrence. Or ce cas a été exclu. On en déduit que λ_k ne peut diverger vers $+\infty$, et par conséquent elle admet une sous-suite majorée, donc bornée, et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(\lambda_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ($\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante) convergente vers $\lambda \geqslant 0$. Dans ces conditions, C_0 étant fermé par hypothèse de récurrence, $Y_{\varphi(k)}$ converge vers $Y = X - \lambda J_p$ qui est donc un point de C_0. Au final, $X = Y + \lambda J_p$ est bien un élément de C.

2. Soit $X \in C$. Pour tout $Y \in C'$, on a par définition de C', $\langle X, Y\rangle \leqslant 0$. Donc X appartient à C'' par définition de C''. Donc, on a $C \subset C''$.

Soit $X \in C''$. Considérons le projeté orthogonal P de X sur le convexe fermé C.

• Montrons que P et $X - P$ sont orthogonaux. C'est trivial si $P = 0$. Supposons donc P non nul. Nous allons utiliser le fait que C est un cône en écrivant que pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\lambda P \in C$ et donc

$$\|X - P\|^2 \leqslant \|X - \lambda P\|^2,$$

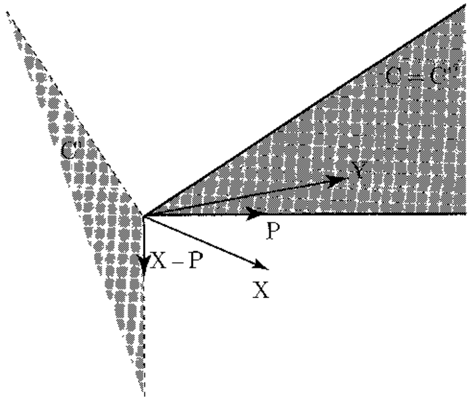
ce qui donne en développant

$$0 \leqslant \lambda^2\|P\|^2 - 2\lambda\langle P, X\rangle + 2\langle P, X\rangle - \|P\|^2.$$

Il s'agit là d'un trinôme du second degré admettant 1 comme racine. Or cette racine est aussi un minimum, autrement dit, $\lambda = 1$ est une racine double, également racine de la dérivée du trinôme : 1 est racine de $2\lambda\|P\|^2 - 2\langle X, P\rangle$. On en déduit que $\|P\|^2 = \langle X, P\rangle$ et $\langle X - P, P\rangle = 0$.

• Comme P est le projeté orthogonal de X sur C, d'après la question 3 de l'exercice précédent, pour tout $Y \in C$, $\langle Y - P, X - P\rangle \leqslant 0$. Or, comme P et $X - P$ sont orthogonaux, cela donne $\langle Y, X - P\rangle \leqslant 0$, autrement dit $X - P \in C'$ (voir figure ci-après).

• Comme $X \in C''$ par hypothèse, on obtient $\langle X, X - P\rangle \leqslant 0$ qui entraîne $\langle X - P, X - P\rangle \leqslant 0$, puisque P et $X - P$ sont orthogonaux. On conclut que $X = P \in C$, et finalement $C = C''$.



3. Il s'agit de montrer que $B \in C$. Notons $C_B = \mathbb{R}_+ B$ et comme précédemment

$$C'_B = \{X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in C_B, \langle X, Y\rangle \leqslant 0\}$$
$$\text{et } C''_B = \{X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in C'_B, \langle X, Y\rangle \leqslant 0\}.$$

Remarquons que $C'_B = \{X \in \mathbb{R}^n, \langle B, X\rangle \leqslant 0\}$. Traduisons l'hypothèse sur ces ensembles : nous avons $C' \subset C'_B$. En effet, prenons $X \in C'$. Alors $-X$ a un produit scalaire positif ou nul avec chaque J_k et par hypothèse, il en va de même avec B. Ainsi, $\langle B, X\rangle \leqslant 0$ et on a bien $X \in C'_B$.

Comme nous avons $C' \subset C'_B$, il est clair que $C''_B \subset C''$ et d'après la question précédente, $C_B \subset C$. On conclut que $B \in C$. $\triangleleft$

L'intérêt de ce résultat apparaît en programmation linéaire, lorsqu'il s'agit d'obtenir des solutions «optimales» pour un système linéaire avec contrainte. On peut d'ailleurs traduire en termes de systèmes ce lemme : soit A *une matrice réelle à n lignes et p colonnes de colonnes* $J_1, \dots, J_p$ *et le système* $AX = B$ *d'inconnue* $X \in \mathbb{R}^p$. *Pour que ce système possède une solution à composantes positives, il suffit que pour tout* $Y \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* ${}^tYJ_i \geqslant 0$ *$(1 \leqslant i \leqslant p)$, on ait* ${}^tYB \geqslant 0$.

L'exercice suivant vient également de la programmation linéaire.

1.45. Éléments de $\mathbb{R}^n$ à composantes positives

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique,

$$A^* = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \setminus \{0\}, \ \ \forall i \in [\![1, n]\!] \ \ x_i \geqslant 0\}$$

et S un sous-espace de E.

1. Soit $C = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ et p la projection orthogonale sur S. Démontrer que $K = p(C)$ est un convexe compact non vide.

2. En déduire que $S \cap A^* \neq \emptyset$ ou $S^\perp \cap A^* \neq \emptyset$.

(**École polytechnique**)

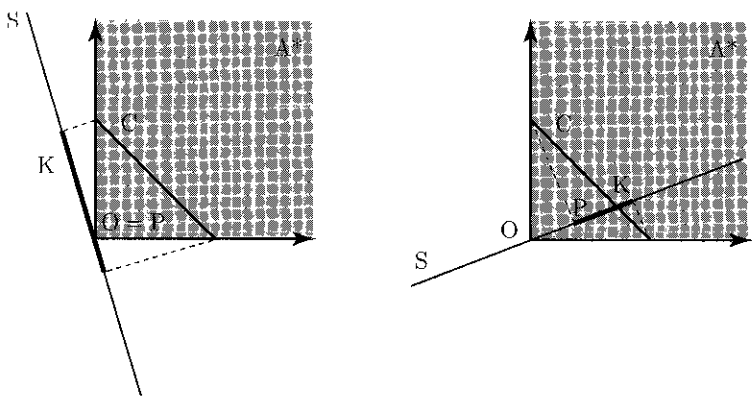
Solution.

1. Si l'on considère une suite de points de C convergente vers $X \in \mathbb{R}^n$, comme les composantes des vecteurs de cette suite sont positives ou nulles, de somme égale à 1, il en va de même des composantes de X par passage à la limite. Donc X est dans C et C est fermé. De plus, C est borné donc C est compact. Comme p est continue, $K = p(C)$ est un compact.

L'ensemble C étant l'intersection du convexe $(\mathbb{R}_+)^n$ et de l'hyperplan affine $x_1 + \cdots + x_n = 1$ (qui est convexe), il est lui-même convexe. L'image d'un convexe par une application linéaire étant un convexe, K est un convexe. Il est non vide, puisque C contient les vecteurs de la base canonique et K leurs images.

On conclut que K est un convexe compact non vide contenu dans S.

2. Considérons le projeté orthogonal P du vecteur nul sur le convexe K comme il a été introduit dans l'exercice 1.43. Par définition de K, il existe $Q \in C$ tel que $P = p(Q)$. Si $P = 0$, le point $Q \in S^\perp$ répond à la question puisqu'il est non nul à composantes positives.



Dans le cas où P est non nul, c'est P qui convient : il est dans S et à composantes positives. En effet, toujours d'après l'exercice 1.43, on a pour tout $X \in K$, $\langle 0 - P, X - P\rangle \leqslant 0$, ou encore $\|P\|^2 \leqslant \langle P, X\rangle$. C'est en particulier vrai pour $X = p(e_i)$ où $e_i \in C$ désigne le i-ième vecteur de la base canonique. Cela donne $\|P\|^2 \leqslant \langle P, p(e_i)\rangle = \langle P, e_i\rangle$, puisque $P \in S$ et p est la projection orthogonale sur S. Autrement dit, les composantes de P sont positives. $\triangleleft$

Les énoncés suivants s'inscrivent dans le thème des espaces hermitiens (thème désormais à la limite du programme des classes préparatoires mais qui intéressera les candidats aux concours de recrutement de professeurs). L'étude des formes hermitiennes trouve son origine dans l'analyse fonctionnelle, plus précisément dans la théorie des espaces de Hilbert, illustrée notamment par les séries de Fourier. Étant donné un espace vectoriel complexe E, *une forme sesquilinéaire est une application* $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *semi-linéaire à gauche et linéaire à droite (si* $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in E$, *on a* $\varphi(\lambda x, y) = \overline{\lambda}\varphi(x,y)$ *et* $\varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x,y)$*). Elle est dite hermitienne si* $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$*. La forme quadratique hermitienne associée est alors* $q : x \longmapsto \varphi(x,x) \in \mathbb{R}$*. Si* $q(x) > 0$ *pour* x *non nul, on dit que* φ *est définie positive : c'est un produit scalaire hermitien. La norme hermitienne associée est* $x \longmapsto \sqrt{q(x)}$.

Le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$ *est donné par*

$$\varphi(X, Y) = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \cdots + \overline{x_n}y_n,$$

avec $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$*. Dans l'espace des fonctions continues* 2π*-périodiques à valeurs complexes, l'application*

$$(f, g) \longmapsto (f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

définit un produit scalaire hermitien. Un espace de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien est un espace hermitien.

On le voit, le parallèle avec les espaces euclidiens est tout tracé : on introduit de même les notions d'orthogonalité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée dans les mêmes conditions... Si bon nombre de résultats géométriques sur les espaces euclidiens trouvent une traduction sur les espaces hermitiens, nous mettrons ici plutôt en avant les différences.

1.46. Inégalités

1. Soit E hermitien, u, v, w trois vecteurs de norme 1 de E. Montrer que

$$\sqrt{1 - |\langle u, w\rangle|^2} \leqslant \sqrt{1 - |\langle u, v\rangle|^2} + \sqrt{1 - |\langle v, w\rangle|^2}.$$

> **2.** Soit A et B deux matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que
>
> $$\sqrt{n^2 - |\operatorname{Tr}(AB)|^2} \leqslant \sqrt{n^2 - |\operatorname{Tr}(A)|^2} + \sqrt{n^2 - |\operatorname{Tr}(B)|^2}.$$
>
> **(École normale supérieure)**

▷ **Solution.**

1. Les trois produits scalaires sont de module inférieur à 1 d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Si u et w sont colinéaires, on a $w = \lambda u$ avec $|\lambda| = 1$ et le premier membre de l'inégalité est nul : il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que la famille (u, w) est libre ; on note $P = \operatorname{Vect}(u, w)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $t \in P^\perp$ tel que $v = \lambda u + \mu w + t$; on pose $a = \langle u, w \rangle$ qui est de module inférieur ou égal à 1. On a alors $\langle u, v \rangle = \lambda + \mu a$ et $\langle v, w \rangle = \overline{\lambda} a + \overline{\mu}$. Par ailleurs, on obtient en écrivant que v est unitaire, $1 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\mu a) + \|t\|^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 1 - |\langle u, v\rangle|^2 &= 1 - |\lambda + \mu a|^2 = 1 - |\lambda|^2 - |\mu a|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\mu a) \\ &= |\mu|^2 - |\mu a|^2 + \|t\|^2 = |\mu|^2(1 - |a|^2) + \|t\|^2, \end{aligned}$$

et de même $1 - |\langle v, w\rangle|^2 = |\lambda|^2(1 - |a|^2) + \|t\|^2$. Il s'agit donc de démontrer que

$$\sqrt{1 - |a|^2} \leqslant \underbrace{\sqrt{|\mu|^2(1 - |a|^2) + \|t\|^2} + \sqrt{|\lambda|^2(1 - |a|^2) + \|t\|^2}}_{A}.$$

En notant A le second membre de l'inégalité précédente, on a

$$\begin{aligned} A^2 &\geqslant |\mu|^2(1 - |a|^2) + |\lambda|^2(1 - |a|^2) + 2\|t\|^2 + 2|\lambda||\mu|(1 - |a|^2) \\ &\geqslant (|\lambda| + |\mu|)^2(1 - |a|^2) + 2\|t\|^2 \geqslant ((|\lambda| + |\mu|)^2 + 2\|t\|^2)(1 - |a|^2). \end{aligned}$$

Comme $1 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\mu a) + \|t\|^2 \leqslant (|\lambda| + |\mu|)^2 + 2\|t\|^2$, on a bien $A^2 \geqslant 1 - |a|^2$.

2. L'application $(A, B) \longmapsto \operatorname{Tr}(A^*B)$ est une forme hermitienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est définie positive. En effet, on a pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{Tr}(A^*A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2 \geqslant 0$ et $\operatorname{Tr}(A^*A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0$. Il s'agit là du produit hermitien canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour une matrice unitaire, on a $\operatorname{Tr}(A^*A) = n$. Ainsi $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est de norme 1. Le résultat demandé résulte alors directement de la première question appliquée à $u = \frac{1}{\sqrt{n}}A^*$, $v = \frac{1}{\sqrt{n}}I_n$ et $w = \frac{1}{\sqrt{n}}B$. ◁

Le produit hermitien canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie des propriétés analogues à celles du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir exercice

1.17). En particulier, si l'on note $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sqrt{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^*\mathrm{A})}$ *la norme de* A, *on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz une majoration du module de la trace en fonction de la norme :*

$$|\mathrm{Tr}(\mathrm{A})| = |\mathrm{Tr}(\mathrm{IA})| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{I})\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sqrt{n}\mathrm{N}(\mathrm{A}).$$

D'autre part, N *est une norme d'algèbre, autrement dit on a toujours* $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$. *En effet, posons* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *et* $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ *avec* $\mathrm{C} = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *Comme* $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\mathrm{AB})^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{ij}|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{l=1}^{n} |b_{lj}|^2\right) \quad \textit{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} |b_{lj}|^2\right) = \mathrm{N}(\mathrm{A})^2\mathrm{N}(\mathrm{B})^2.
\end{aligned}$$

Voici maintenant une inégalité propre aux espaces hermitiens.

1.47. Étude de normes sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ où E est hermitien

Soit E un espace hermitien de dimension $n \geqslant 1$. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on note $\mathrm{N}(u) = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2. On pose $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Montrer que

$$\frac{1}{2}\|u\| \leqslant \mathrm{N}(u) \leqslant \|u\|.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. N est bien à valeurs réelles positives ou nulles. L'homogénéité est vérifiée : si $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\lambda u) &= \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda u(x), x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda||\langle u(x), x\rangle| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| \\ &= |\lambda|\mathrm{N}(u).\end{aligned}$$

Prouvons l'inégalité triangulaire : si u et v sont dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, pour tout $x \in \mathrm{E}$ de norme 1, on a

$$\begin{aligned}|\langle (u+v)(x), x\rangle| &= |\langle u(x), x\rangle + \langle v(x), x\rangle| \leqslant |\langle u(x), x\rangle| + |\langle v(x), x\rangle| \\ &\leqslant \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v),\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\mathrm{N}(u+v) \leqslant \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)$.

Il reste à montrer l'axiome de séparation à savoir que pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, si $\mathrm{N}(u) = 0$, alors $u = 0$. Bien que l'on souligne la plupart du temps les similitudes entre la théorie des espaces euclidiens et celle des espaces hermitiens, l'analogue de ce résultat dans un espace euclidien est inexact : par exemple dans un plan euclidien une rotation d'angle $\pi/2$ correspondrait à une borne supérieure nulle.

Dans un espace euclidien deux formes bilinéaires différentes φ et φ' peuvent donner la même forme quadratique $q(x) = \varphi(x, x) = \varphi'(x, x)$. Par exemple, dans un plan euclidien, si u désigne la rotation d'angle $\pi/2$, $\varphi = 0$ et $\varphi' : (x, y) \longmapsto \langle u(x), y\rangle$, φ et φ' déterminent la même forme quadratique $q = 0$. Bien sûr, si l'on suppose que φ et φ' sont symétriques et qu'elles donnent la même forme quadratique, $\varphi = \varphi'$ d'après l'identité de polarisation :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right).$$

En revanche, dans un espace hermitien, si l'on dispose de deux formes sesquilinéaires (c'est-à-dire semi-linéaires à gauche, linéaires à droite) φ et φ', que l'on ne suppose pas hermitiennes, telles que pour tout x, $\varphi(x, x) = \varphi'(x, x)$, alors $\varphi = \varphi'$. C'est une conséquence de l'identité de polarisation suivante.

Lemme. *Soit $\varphi : (x, y) \in \mathrm{E}^2 \longmapsto \varphi(x, y) \in \mathbb{C}$ sesquilinéaire, $q : x \in \mathrm{E} \mapsto \varphi(x, x)$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on a*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y) - i(q(x+iy) - q(x-iy))\right).$$

Démonstration.

Il suffit de développer les termes suivants :

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$$

$$q(x-y) = q(x) + q(y) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x)$$

$$q(x+iy) = q(x) - q(y) + i\varphi(x,y) - i\varphi(y,x)$$
$$q(x-iy) = q(x) - q(y) - i\varphi(x,y) + i\varphi(y,x).$$

La relation est alors immédiate. $\diamond$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{N}(u) = 0$. On a donc $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Posons $\varphi(x,y) = \langle u(x), y\rangle$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ et $q(x) = \varphi(x,x)$. Alors φ vérifie les hypothèses du lemme. Comme $q = 0$, d'après l'identité de polarisation $\varphi = 0$. En particulier, si $x \in \mathrm{E}$ et $y = u(x)$, on obtient $\langle u(x), y\rangle = \|u(x)\|^2 = 0$. Il s'ensuit que $u(x) = 0$ et que u est nul. On conclut que N est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On peut supposer u non nul. Si $x \in \mathrm{E}$, $\|x\| = 1$, on a, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u(x), x\rangle| \leqslant \|u(x)\|\|x\| = \|u(x)\| \leqslant \|u\|.$$

Par conséquent, $\mathrm{N}(u) \leqslant \|u\|$.

Passons à l'autre inégalité : comme $u \neq 0$, on peut poser $v = \dfrac{u}{\|u\|}$ et alors $\|v\| = 1$. Par homogénéité, il suffit de prouver que $\mathrm{N}(v) \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot$ Considérons la forme sesquilinéaire définie par $\varphi(x,y) = \langle v(x), y\rangle$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ et posons $q(x) = \varphi(x,x)$. Pour $x \in \mathrm{E}$ non nul, on a

$$|q(x)| = |\langle v(x), x\rangle| = \|x\|^2 \left|\left\langle v\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leqslant \|x\|^2\mathrm{N}(v),$$

cette inégalité restant valable si $x = 0$. Par conséquent, si $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, d'après le lemme, on a la majoration

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,y)| &\leqslant \frac{1}{4}\left(|q(x+y)| + |q(x-y)| + |q(x+iy)| + |q(x-iy)|\right)\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathrm{N}(v)\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right)\\
&\leqslant \frac{1}{4}\mathrm{N}(v)\left(4\|x\|^2 + 4\|y\|^2\right) \text{ après développement.}
\end{aligned}$$

Si l'on prend x de norme 1 et $y = v(x)$, il vient

$$|\varphi(x,y)| = \|v(x)\|^2 \leqslant \frac{1}{4}\mathrm{N}(v)\left(4 + 4\|v(x)\|^2\right) \leqslant 2\mathrm{N}(v),$$

puisque $\|v\| = 1$. En passant à la borne supérieure sur les vecteurs x de norme 1, on obtient $\|v\| = 1 \leqslant 2\mathrm{N}(v)$ et finalement l'inégalité voulue. On conclut

$$\boxed{\frac{1}{2}\|u\| \leqslant \mathrm{N}(u) \leqslant \|u\|}. \quad \triangleleft$$

Dans l'exercice suivant, on utilise le fait qu'une matrice unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont de module 1.

1.48. Condition suffisante pour que deux matrices unitaires commutent

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}$. On note $U_n(\mathbb{C})$ le groupe unitaire d'ordre n.

1. Montrer que

$$\forall U \in U_n(\mathbb{C}), \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ \|UA\| = \|AU\| = \|A\|.$$

On considère dans la suite A, B deux matrices de $U_n(\mathbb{C})$ et on pose $C = ABA^{-1}B^{-1}$. On suppose que $AC = CA$, que $\|I-B\| < \sqrt{2}$ et on veut montrer que $AB = BA$.

2. Montrer que A et BAB^{-1} commutent.

3. Montrer qu'il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$, des complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de module 1 et une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ tels que $U^*AU = D$ et $U^*BAB^{-1}U = D'$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{Diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$.

4. Conclure.

(École normale supérieure)

Solution.

Notons pour commencer que l'application $(A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^*B)$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que $\| \ \|$ est tout simplement la norme associée à ce produit hermitien (voir page 85).

1. Pour $U \in U_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{Tr}((UA)^*(UA)) = \mathrm{Tr}(A^*U^*UA) = \mathrm{Tr}(A^*A)$$

donc $\|UA\| = \|A\|$ et de même,

$$\mathrm{Tr}((AU)^*(AU)) = \mathrm{Tr}(U^*A^*AU) = \mathrm{Tr}(A^*AUU^*) = \mathrm{Tr}(A^*A)$$

donc $\|AU\| = \|A\|$.

2. Il s'agit de montrer que $ABAB^{-1} = BAB^{-1}A$ ou encore en passant aux inverses que $BA^{-1}B^{-1}A^{-1} = A^{-1}BA^{-1}B^{-1}$, ce qui s'écrit $A^{-1}CA^{-1} = A^{-1}A^{-1}C$. Or cette dernière relation est vraie, car $CA = AC$ entraîne $A^{-1}C = CA^{-1}$: les matrices A et BAB^{-1} commutent.

3. Les matrices A et BAB^{-1} sont unitaires donc diagonalisables en base orthonormée. Comme elles commutent, elles sont codiagonalisables en base orthonormée. Considérons en effet les endomorphismes a et b canoniquement associés à A et BAB^{-1}. Les sous-espaces propres de a sont deux à deux orthogonaux et stables par b. La restriction de b à l'un de ces sous-espaces propres F est un endomorphisme unitaire, diagonalisable en base orthonormale. On peut donc trouver une base orthonormale de F constituée de vecteurs propres pour b (et pour a). La réunion de ces bases orthonormales donne une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres pour a et b.

Il existe donc $\mathrm{U} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de module 1, et des complexes $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ de module 1 tels que $\mathrm{U^*AU} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{D}$ et $\mathrm{U^*BAB^{-1}U} = \mathrm{Diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) = \mathrm{D}'$. Mais comme A et $\mathrm{BAB^{-1}}$ sont semblables, il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que $\lambda'_i = \lambda_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

4. Il ne reste plus qu'à faire intervenir la dernière hypothèse qui n'a pas encore servi, à savoir que $\|\mathrm{I} - \mathrm{B}\| < \sqrt{2}$. Supposons qu'il existe i tel que $\lambda_{\sigma(i)} \neq \lambda_i$. Si l'on note e_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_i = \mathrm{U}e_i$ on a : $\mathrm{A}f_i = \lambda_i f_i$ et $\mathrm{BAB^{-1}}f_i = \lambda_{\sigma(i)} f_i$ ou encore, $\mathrm{AB^{-1}}f_i = \lambda_{\sigma(i)}\mathrm{B^{-1}}f_i$. Donc $\mathrm{B^{-1}}f_i$ est orthogonal à f_i, car les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux. Ainsi, $\mathrm{B}f_i \perp f_i$ et en vertu du théorème de Pythagore, on a $\|(\mathrm{B}-\mathrm{I})f_i\|^2 = \|\mathrm{B}f_i\|^2 + \|f_i\|^2 = 2$ (f_i est unitaire). Cela contredit le fait que $\|\mathrm{I} - \mathrm{B}\| < \sqrt{2}$.

Conclusion. $\mathrm{A} = \mathrm{BAB^{-1}}$ *i.e.* A et B commutent. $\lhd$

Le lecteur trouvera beaucoup plus d'exercices sur les espaces hermitiens à la fin du chapitre suivant.

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Le théorème spectral est le résultat central de la théorie des endomorphismes auto-adjoints. Il affirme que si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E*, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de* E*. En termes matriciels, cela signifie que pour une matrice symétrique réelle* A*, il existe une matrice orthogonale* P *telle que* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ *soit diagonale. Comme il y a une correspondance bijective entre les endomorphismes symétriques de* E *et les formes bilinéaires symétriques*[1]*, on peut le traduire aussi dans le langage des formes quadratiques : pour toute forme φ bilinéaire symétrique de l'espace euclidien* E*, il existe une base orthonormée pour le produit scalaire de* E *et orthogonale pour φ. Matriciellement, l'écriture* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ *avec* P *orthogonale peut aussi se lire* ${}^t\mathrm{PAP} = \mathrm{D}$ *: les matrices* A *et* D *sont non seulement semblables mais aussi congruentes.*

Ce deuxième aspect du théorème sera surtout développé dans le chapitre 3. Même si une forme quadratique peut apparaître à l'occasion d'un exercice (notamment pour ceux qui font intervenir des matrices symétriques positives), nous avons regroupé ici les énoncés qui portent plutôt sur des propriétés spectrales : diagonalisation et applications diverses, décompositions matricielles (QR, décomposition polaire, décomposition de Choleski, ...) principes variationnels et inégalités concernant les valeurs propres des matrices symétriques, réduction des matrices antisymétriques. La fin du chapitre regroupe des énoncés posés dans un cadre hermitien. La richesse des points de vue se retrouvera dans les exercices : nous verrons qu'il y a souvent plusieurs solutions possibles à un même énoncé.

Pour conclure cette introduction, notons que les variantes du théorème spectral en dimension infinie dans les espaces de Hilbert sont des outils puissants de l'analyse fonctionnelle, adaptés aux équations sur des opérateurs intégraux ou au calcul des variations.

Les premiers exercices correspondent à des applications directes de la diagonalisation des endomorphismes symétriques.

---

1. En associant à u la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \longmapsto \langle u(x), y\rangle$.

2.1. Codiagonalisation

Soit E un espace vectoriel euclidien, f, g, h des éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $fg = h$, $gh = f$, $hf = g$, $f = f^*$, $\det f \neq 0$. Prouver que f, g et h sont diagonalisables dans une même base.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

L'endomorphisme f est bijectif et, puisqu'il est symétrique, diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles. On a $f = gh = gfg$ et $f^2 = (gh)f = g(hf) = g^2$. On en déduit que

$$f = gfg = g(gfg)g = g^2fg^2 = f^5$$

et donc $f^4 = \mathrm{Id}$. Si λ est une valeur propre de f, on a $\lambda^4 = 1$ et donc $\lambda^2 = 1$. L'endomorphisme f^2 est diagonalisable et a pour seule valeur propre 1 : c'est l'identité. On a donc $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Ainsi g, qui est une symétrie, est également diagonalisable. Enfin, l'égalité $f = gfg$ peut s'écrire $fg = gfg^2 = gf$. Les endomorphismes f et g sont diagonalisables et commutent. Il est classique alors de vérifier qu'ils sont diagonalisables dans la même base (voir l'exercice 2.19 du tome 2 d'algèbre). La matrice dans cette base de $h = fg$ est aussi diagonale. ◁

Il est bien connu que le calcul des puissances d'une matrice est relativement simple lorsque celle-ci est diagonalisable.

2.2. Puissances d'une matrice symétrique

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $(\mathrm{A}^n)_{n \geqslant 0}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale. Le vecteur $(1, 1, 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $\sigma_1 = p + q + r$. On montre facilement que le polynôme caractéristique de A est

$$(\mathrm{X} - \sigma_1)(\mathrm{X}^2 - p^2 - q^2 - r^2 + pq + qr + rp) = (\mathrm{X} - \sigma_1)(\mathrm{X}^2 - \sigma_1^2 + 3\sigma_2),$$

où $\sigma_2 = pq + qr + rp$. Les valeurs propres de A sont donc σ_1 et

$\sqrt{\sigma_1^2 - 3\sigma_2}$ (il n'est pas utile de vérifier que $\sigma_1^2 - 3\sigma_2$ est positif, car nous le savons *a priori*). Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}$, où $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sqrt{\sigma_1^2 - 3\sigma_2}, -\sqrt{\sigma_1^2 - 3\sigma_2})$. On peut choisir $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme première colonne de P. La suite $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ possède une limite si, et seulement si, les trois valeurs propres appartiennent à $]-1,1]$, c'est-à-dire si $\sigma_1 \in]-1,1]$ et $\sigma_1^2 - 3\sigma_2 < 1$.

• Si $\sigma_1 \in]-1,1[$ et $\sigma_1^2 - 3\sigma_2 < 1$, la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ converge clairement vers 0.

• Si $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_1^2 - 3\sigma_2 < 1$, alors la suite $(\mathrm{D}^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\mathrm{J} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\mathrm{PJ}\,{}^t\mathrm{P}$. La matrice $\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{P}$ est égale à $\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, où (a,b,c) est la première ligne de ${}^t\mathrm{P}$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Connaissant la première colonne de P, on obtient

$$\mathrm{PJ}\,{}^t\mathrm{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

On notera que, dans le second cas, la limite est la matrice de la projection orthogonale sur l'espace propre de A relatif à la valeur propre 1.

L'exercice suivant s'intéresse à la convergence d'une suite arithmético-géométrique de matrices. La technique est usuelle : on retranche le point fixe pour se ramener à une suite géométrique et c'est alors le rayon spectral de la matrice qui gouverne le comportement de la suite. Le lecteur se reportera aux exercices 2.59 et 2.60 du tome algèbre 2 pour des énoncés généraux.

2.3. Méthode itérative pour une équation linéaire

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^p$, $a = \mathrm{A}^{-1}b$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha > 0$. On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + \alpha(b - \mathrm{A}x_n).$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha > 0$ pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout choix de x_0.

2. On pose $e_n = a - x_n$. Déterminer le plus petit réel $\mathrm{K}(\alpha)$ tel que, tout choix de x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|e_{n+1}\| \leqslant \mathrm{K}(\alpha)\|e_n\|$ (il s'agit de la norme euclidienne canonique).

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ℓ vérifie $\alpha(b - \mathrm{A}\ell) = 0$ et donc $\ell = \mathrm{A}^{-1}b = a$. On pose donc $e_n = a - x_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e_{n+1} = e_n - \alpha(b - \mathrm{AX}_n) = e_n - \alpha \mathrm{A} e_n = (\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A})e_n.$$

On en déduit, pour tout n, $e_n = (\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A})^n e_0$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout choix de x_0 si, et seulement si, la suite $(\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A})^n$ tend vers 0.

La matrice A étant symétrique réelle, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PDP}$. On a alors $\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}$, où $\Delta = \mathrm{Diag}(1-\alpha\lambda_1, \dots, 1-\alpha\lambda_p)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A})^n = {}^t\mathrm{P}\Delta^n\mathrm{P}$. La suite $(\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A})^n$ converge vers 0 si, et seulement si, Δ^n converge vers 0, c'est-à-dire si, et seulement si, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on a $|1 - \alpha\lambda_i| < 1$. Comme α et les λ_i sont positifs (car A est définie positive), cela équivaut à ce que pour tout i, $\alpha\lambda_i < 2$, *i.e.* $\alpha \max(\lambda_1, \dots, \lambda_p) < 2$.

Conclusion. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers a) pour tout choix de x_0 si, et seulement si,

$$\alpha < \frac{2}{\max(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} = \frac{2}{\rho(\mathrm{A})}.$$

2. On cherche le plus petit réel $\mathrm{K}(\alpha)$ tel que $\|e_{n+1}\| \leqslant \mathrm{K}(\alpha)\|e_n\|$, pour tout x_0. Comme $e_{n+1} = (\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A})e_n$ pour tout n, il est clair que $\mathrm{K}(\alpha) = \|\!|\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A}|\!\|$ convient. C'est la plus petite valeur possible, car on souhaite qu'elle soit valable pour toute condition initiale e_0. D'après le cours, comme $\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A}$ est symétrique, on a

$$\mathrm{K}(\alpha) = \rho(\mathrm{I}_p - \alpha\mathrm{A}) = \max(|1 - \alpha\lambda_1|, \dots, |1 - \alpha\lambda_p|). \quad \triangleleft$$

Le lecteur se reportera à la note qui suit l'exercice 1.5 pour la preuve du fait que $\|\!|\mathrm{A}|\!\| = \rho(\mathrm{A})$ pour une matrice symétrique.

Nous mettons ici quelques exercices supplémentaires sur les projecteurs orthogonaux. Ce sont des endomorphismes symétriques, et donc redevables du théorème spectral.

2.4. Décomposition en somme de droites et plans stables

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que E est somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par p et q.

(**École normale supérieure**)

Solution.

Il semble clair qu'il faut raisonner par récurrence sur la dimension de E. La propriété est évidente pour $n = 1$ et $n = 2$. Si l'on suppose qu'elle est vérifiée pour un espace de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et que l'on considère un espace euclidien E de dimension n, il suffit alors de démontrer l'existence d'un sous-espace F de dimension 1 ou 2 stable par p et q. En effet, les endomorphismes p et q étant symétriques (puisque ce sont des projecteurs orthogonaux), $F^\perp$ est également stable par p et q : pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, $(p(y), x) = (y, p(x)) = 0$, car $p(x) \in F$; donc $p(y) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par p et il en est de même pour q. La dimension de $F^\perp$ est inférieure ou égale à $n - 1$ et il est stable par p et q. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient une décomposition de $F^\perp$ en sous-espaces stables par p et q de dimension 1 ou 2, à laquelle on ajoute F pour obtenir la décomposition cherchée de E.

Il reste à démontrer l'existence de F. Un sous-espace stable par p et q qui contient x contient aussi $p(x)$ et $q(x)$: si sa dimension est inférieure ou égale à 2, il y a donc une relation de liaison entre x, $p(x)$ et $q(x)$. Cela suggère de considérer l'endomorphisme $p + q$; il est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(p + q)$ et x un vecteur propre associé. On a $p(x) + q(x) = \lambda x$. Considérons $F = \mathrm{Vect}(x, p(x))$. C'est un sous-espace de dimension 1 ou 2. Comme $p(p(x)) = p(x)$, F est stable par p. Les deux relations $q(x) = \lambda x - p(x)$ et $q(p(x)) = \lambda q(x) - q^2(x) = (\lambda - 1)q(x)$ montrent que F est stable par q, ce qui achève la démonstration. ◁

Bien entendu au lieu de $p + q$ on peut prendre n'importe quelle combinaison linéaire de p et q à coefficients non nuls.

2.5. Spectre de la différence de deux projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien de dimension $2n$, F et F' deux sous-espaces supplémentaires de E qui sont de dimension n. On note π (resp. π') le projecteur orthogonal sur F (resp. F'), $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, 0, \ldots, 0)$ les valeurs propres de $\pi - \pi\pi'\pi$. Montrer que les valeurs propres de $\pi - \pi'$ sont les $\pm\sqrt{\sigma_i}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Remarquons que $\pi - \pi'$ et $\pi - \pi\pi'\pi$ sont auto-adjoints et donc diagonalisables en base orthonormée. En particulier, le spectre de ces endomorphismes est réel. Comme $\mathrm{Ker}(\pi - \pi\pi'\pi)$ contient $\mathrm{F}^\perp = \mathrm{Ker}\,\pi$, il est de dimension supérieure ou égale à $\dim \mathrm{F}^\perp = n$. Cela explique que 0 est valeur propre de $\pi - \pi\pi'\pi$ avec une multiplicité supérieure ou égale à n.

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base de E obtenue en réunissant une base $\mathcal{B}_1$ de F et une base $\mathcal{B}_2$ de F'. On note P (resp. P') la matrice de π (resp. π') dans la base $\mathcal{B}$. Elles s'écrivent par blocs de la manière suivante

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, la matrice dans $\mathcal{B}$ de $\pi - \pi\pi'\pi$ est

$$\mathrm{P} - \mathrm{PP'P} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n - \mathrm{AB} & \mathrm{A} - \mathrm{ABA} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est $\chi_{\pi - \pi\pi'\pi} = \mathrm{X}^n \det((\mathrm{X}-1)\mathrm{I}_n + \mathrm{AB})$.
Par hypothèse, on a donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - \sigma_i) = \det((\mathrm{X}-1)\mathrm{I}_n + \mathrm{AB})$.

Quant à $\pi - \pi'$, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ -\mathrm{B} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique est, d'après un résultat classique (que le lecteur trouvera dans l'exercice 1.27 du tome 2 d'algèbre),

$$\chi_{\pi-\pi'} = \det((\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\mathrm{I}_n^2 + \mathrm{AB}) = \det((\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{I}_n + \mathrm{AB}).$$

Ainsi, on a l'identité $\chi_{\pi-\pi'} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}^2 - \sigma_i)$. Les racines de $\chi_{\pi-\pi'}$ sont réelles comme nous l'avons dit en introduction, donc les σ_i sont tous positifs et les racines de $\chi_{\pi-\pi'}$ sont les $\pm\sqrt{\sigma_i}$. ◁

L'énoncé suivant est un cas particulier de l'exercice 2.13, un peu plus simple à traiter.

2.6. Produit de deux projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que pq est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $[0, 1]$.

(**École polytechnique**)

Solution.

On peut noter que le résultat est évident lorsque p et q commutent, car dans ce cas pq est aussi un projecteur.

Soit λ une valeur propre non nulle de pq et x un vecteur propre associé. On a $p(q(x)) = \lambda x$ donc $x \in \operatorname{Im} p$. Par suite, comme $p = p^*$,

$$\lambda\|x\|^2 = (pq(x), x) = (q(x), p(x)) = (q(x), x) = \|q(x)\|^2$$

ce qui prouve que λ est positif et aussi que $\lambda \leqslant 1$, puisque $\|q(x)\| \leqslant \|x\|$. On a donc $\operatorname{Sp} pq \subset [0, 1]$.

Pour la diagonalisabilité on va travailler matriciellement. En prenant une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$ on peut supposer que q a pour matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \operatorname{rg} q$ et on note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & {}^t\mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 \end{pmatrix}$ la matrice de p dans la même base (on laisse de côté les cas triviaux $r = 0$ et $r = n$). Alors pq a pour matrice $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ \mathrm{A}_2 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A_1 est symétrique donc diagonalisable et le spectre de AB est la réunion de $\{0\}$ et du spectre de A_1. Il est clair que pour toutes les valeurs propres non nulles de A_1 la dimension du sous-espace propre de AB est égale à la multiplicité de cette valeur propre. Il nous faut donc juste prouver que $\operatorname{rg} \mathrm{AB} = \operatorname{rg} \mathrm{A}_1$. Cela revient à montrer que si $\mathrm{A}_1\mathrm{X} = 0$ alors $\mathrm{A}_2\mathrm{X} = 0$ (pour X vecteur colonne de taille r). Ici c'est facile car la propriété $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donne $\mathrm{A}_1^2 + {}^t\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1$. Donc si $\mathrm{A}_1\mathrm{X} = 0$ on a ${}^t\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2\mathrm{X} = 0$ puis $\|\mathrm{A}_2\mathrm{X}\|^2 = 0$ soit $\mathrm{A}_2\mathrm{X} = 0$ en multipliant par ${}^t\mathrm{X}$ à gauche. $\lhd$

L'exercice 2.13 montrera que si f, g sont des endomorphismes auto-adjoints positifs, alors $f \circ g$ est toujours diagonalisable avec des valeurs propres positives.

Le sujet de l'exercice suivant a été développé dans la seconde épreuve écrite du concours Polytechnique MP en 2002.

2.7. Frame d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien, $(y_j)_{j\in \mathrm{J}}$ une famille de vecteurs de E telle qu'il existe A et B strictement positifs vérifiant

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{A}\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle x, y_j\rangle^2 \leqslant \mathrm{B}\|x\|^2.$$

1. Montrer que la famille $(y_j)_{j\in \mathrm{J}}$ engendre E.

2. Avec $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $y_1 = (1,0)$, $y_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $y_3 = y_2$ conviennent.

3. Si $A = B = 1$ et si $\|y_j\| = 1$ pour tout j, montrer que $(y_j)_{j\in J}$ est une base orthonormale de E.

4. Si $A = B$ montrer que $x = \frac{1}{A} \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle y_j$ pour tout $x \in E$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Posons $F = \mathrm{Vect}(y_j)_{j\in J}$. Pour montrer que $F = E$ on va prouver que son orthogonal est nul. C'est ici naturel, car notre hypothèse porte sur les produits scalaires $\langle x, y_j\rangle$. Effectivement, si $x \in F^\perp$ on a pour tout $j \in J$ $\langle x, y_j\rangle = 0$ et donc $A\|x\|^2 = 0$. Par suite $\|x\| = 0$ et $x = 0$. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$ et $F = E$: la famille $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice.

2. Si $x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$S = \sum_{j=1}^{3} \langle x, y_j\rangle^2 = a^2 + 2\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(5a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{3}).$$

On en déduit que

$$S = \frac{1}{2}\left(\left(b\frac{\sqrt{3}}{2} + 2a\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4}b^2\right) \geqslant \frac{1}{8}\|x\|^2.$$

De l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, on tire

$$S \leqslant \frac{1}{2}(5a^2 + b^2 + \sqrt{3}(a^2+b^2)) \leqslant \frac{5+\sqrt{3}}{2}\|x\|^2.$$

On a donc les inégalités voulues, avec $A = \frac{1}{8}$ et $B = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

3. On a, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle^2$. En particulier, pour $x = y_i$, on obtient

$$1 = \sum_{j\in J} \langle y_i, y_j\rangle^2 = 1 + \sum_{j\neq i} \langle y_i, y_j\rangle^2.$$

On en déduit que $\langle y_i, y_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$. La famille $(y_j)_{j\in J}$ est donc orthonormale. Cette famille est donc libre et comme elle est également génératrice, il s'agit d'une base orthonormale de E.

4. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle y_j$ pour $x \in$ E. On a, pour $(x, x') \in \mathrm{E}^2$,

$$\langle f(x), x'\rangle = \sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle\langle y_j, x'\rangle = \langle x, \sum_{j\in J}\langle x', y_j\rangle y_j\rangle = \langle x, f(x')\rangle.$$

L'endomorphisme f est symétrique donc diagonalisable. Si x est un vecteur propre relatif à la valeur propre λ, on a

$$\lambda\|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle = \sum_{j\in J}\langle x, y_j\rangle^2 = \mathrm{A}\|x\|^2,$$

par hypothèse. On a donc $\lambda = \mathrm{A}$. L'endomorphisme f est diagonalisable et a pour seule valeur propre A. C'est donc l'homothétie de rapport A. On a, pour tout $x \in$ E, $f(x) = \mathrm{A}x$ et donc $x = \dfrac{1}{\mathrm{A}} \sum_{j\in J} \langle x, y_j\rangle y_j$. $\lhd$

Des familles de vecteurs $(y_j)_{j\in J}$ d'un espace de Hilbert vérifiant la condition de l'énoncé sont appelées des frames (d'où le titre donné à notre exercice). Elles jouent un rôle important dans la théorie des ondelettes.

C'est un exercice classique que de montrer qu'une matrice de trace nulle à coefficients dans un corps de caractéristique nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle (le lecteur trouvera cela dans l'exercice 7.11 du tome 1 d'algèbre). Dans l'exercice suivant, on montre que pour une matrice réelle on peut même imposer une matrice de passage orthogonale.

2.8. Matrices à termes diagonaux égaux

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{PAP}$ ait tous ses termes diagonaux égaux.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons qu'il suffit de prouver le résultat dans le cas d'une matrice symétrique. En effet, si on écrit $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$, avec A_1 symétrique et A_2 antisymétrique on a, pour toute matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

$${}^t\mathrm{PAP} = {}^t\mathrm{PA}_1\mathrm{P} + {}^t\mathrm{PA}_2\mathrm{P}.$$

Comme ${}^t\mathrm{PA}_2\mathrm{P}$ est antisymétrique, les termes de sa diagonale sont nuls : les termes diagonaux de ${}^t\mathrm{PAP}$ sont ceux de ${}^t\mathrm{PA}_1\mathrm{P}$. On supposera donc désormais A symétrique. Quitte à retrancher à A la matrice scalaire

$\dfrac{\operatorname{Tr} A}{n} I_n$ on peut aussi supposer que $\operatorname{Tr} A = 0$. On cherche donc à montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Pour cela, on va raisonner par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ euclidien canoniquement associé à A. On va commencer par chercher une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que le coefficient $(1,1)$ de la matrice de f dans cette base soit nul. Or, ce coefficient vaut $\langle f(e_1), e_1\rangle$. Il nous suffit donc de trouver un vecteur unitaire e_1 qui est orthogonal à son image par f puis de le compléter n'importe comment en une base orthonormale. Comme f est symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. On va chercher notre vecteur e_1 dans cette base de vecteurs propres. Si $e_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$ on a

$$\langle f(e_1), e_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2.$$

Comme $\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ il suffit de prendre les a_i tous égaux à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (afin que le vecteur e_1 soit unitaire). La matrice de f dans une base orthonormale dont le premier vecteur est e_1 est de la forme

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & A' & \\ \times & & & \end{array}\right)$$

où A' est une matrice symétrique d'ordre $n-1$ telle que $\operatorname{Tr} A' = \operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr} A = 0$. Dit matriciellement, A est orthogonalement semblable à B et il suffit donc de prouver le résultat pour B. On applique pour cela l'hypothèse de récurrence à la matrice A'. Il existe $Q \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ et A'' de diagonale nulle telles que ${}^t Q A' Q = A''$. Posons alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Il est clair que $P \in O_n(\mathbb{R})$ et un calcul par blocs prouve que

$${}^t PBP = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & A'' & \\ \times & & & \end{array}\right).$$

C'est une matrice de diagonale nulle. Cela termine la récurrence. ◁

Voici la formulation en termes de formes quadratiques du résultat qu'on vient de montrer : si u est un endomorphisme auto-adjoint et de trace nulle d'un espace euclidien E, *et si $q : x \longmapsto \langle u(x), x\rangle$ est la forme quadratique associée à u, alors on peut trouver une base orthonormale de* E *formée de vecteurs q-isotropes. Le lecteur est invité à étudier l'exercice 3.3 sur l'existence de bases formées de vecteurs isotropes.*

Dans les exercices suivants, on s'intéresse aux matrices symétriques réelles positives (resp. définies positives). Ce sont les matrices A *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que la forme quadratique associée sur $\mathbb{R}^n$, à savoir $q_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \longmapsto {}^t\mathrm{XAX}$, est une forme quadratique positive (resp. définie positive). À l'aide des valeurs propres, on dispose de la caractérisation suivante : la matrice symétrique réelle* A *est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$). Dans ces conditions, on retiendra que les coefficients diagonaux de* A *sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs), puisqu'il s'agit des réels $q_{\mathrm{A}}(e_i) = {}^te_i\mathrm{A}e_i$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

2.9. Caractérisation des matrices positives avec la trace

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A est positive, si et seulement si $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) \geqslant 0$ pour toute matrice symétrique positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont réels, tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}$.

• Supposons A positive. Alors, les λ_i sont dans $\mathbb{R}_+$ et si B est une matrice symétrique positive, on a

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{PB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{D}({}^t\mathrm{PBP})) = \mathrm{Tr}(\mathrm{DB}'),$$

avec $\mathrm{B}' = {}^t\mathrm{PBP}$ congruente à B. Il s'ensuit que la matrice B′ est positive puisqu'elle représente la même forme quadratique que B. Si on écrit $\mathrm{B}' = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, il vient $\mathrm{Tr}(\mathrm{DB}') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \geqslant 0$, puisque chaque b_{ii} est positif ou nul. On conclut que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) \geqslant 0$.

• Réciproquement, supposons que A n'est pas positive. Une des valeurs propres de A est strictement négative, disons λ_1 pour fixer les idées. On pose $\mathrm{B}' = \mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{PB}'\,{}^t\mathrm{P}$. La matrice B est positive et symétrique et $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{DB}') = \lambda_1 < 0$. L'équivalence est prouvée. ◁

L'exercice 2.13 éclairera ce résultat puisqu'il montrera que la produit AB *de deux matrices symétriques positives est diagonalisable avec des valeurs propres dans* $\mathbb{R}_+$. *Nous verrons aussi dans l'exercice 2.43 une majoration fine de* $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB})$ *toujours pour* A, B *symétriques positives.*

2.10. Étude d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_+$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. symétriques positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère

$$\mathcal{C} = \{(\mathrm{X}, \mathrm{S}) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S},\ \ \mathrm{S} - \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} \in \mathcal{S}^+\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe.

2. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des réels non nuls et $\mathrm{S} = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_k^2, 0, \ldots, 0)$. Montrer que

$$(\mathrm{X}, \mathrm{S}) \in \mathcal{C} \iff \forall i \in [\![k+1, n]\!]\ \ x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2} \leqslant 1.$$

3. Montrer que tout élément de $\mathcal{C}$ est barycentre à coefficients positifs d'éléments de $\{(\mathrm{X}, \mathrm{S}) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S},\ \ \mathrm{S} = \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}\}$. On étudiera d'abord le cas $n = 1$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Notons que si $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} = (x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique. Pour X et Y dans $\mathbb{R}^n$, on a ${}^t\mathrm{Y}\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}\mathrm{Y} = ({}^t\mathrm{X}\mathrm{Y})^2 \geqslant 0$. La matrice $\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}$ est donc symétrique positive. Pour (X, S), $(\mathrm{X}', \mathrm{S}')$ dans $\mathcal{C}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on pose $(\mathrm{Z}, \mathrm{T}) = \lambda(\mathrm{X}, \mathrm{S}) + (1 - \lambda)(\mathrm{X}', \mathrm{S}')$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} - \mathrm{Z}\,{}^t\mathrm{Z} &= \lambda\mathrm{S} + (1-\lambda)\mathrm{S}' - (\lambda\mathrm{X} + (1-\lambda)\mathrm{X}')\,{}^t(\lambda\mathrm{X} + (1-\lambda)\mathrm{X}') \\
&= \lambda\mathrm{S} + (1-\lambda)\mathrm{S}' - \lambda^2\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} - (1-\lambda)^2\mathrm{X}'\,{}^t\mathrm{X}' - \lambda(1-\lambda)(\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}' + \mathrm{X}'\,{}^t\mathrm{X}) \\
&= \lambda(\mathrm{S} - \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}) + (1-\lambda)(\mathrm{S}' - \mathrm{X}'\,{}^t\mathrm{X}') \\
&\qquad + \lambda(1-\lambda)(\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} + \mathrm{X}'\,{}^t\mathrm{X}' - \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}' - \mathrm{X}'\,{}^t\mathrm{X}) \\
&= \lambda(\mathrm{S} - \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}) + (1-\lambda)(\mathrm{S}' - \mathrm{X}'\,{}^t\mathrm{X}') + \lambda(1-\lambda)(\mathrm{X} - \mathrm{X}')\,{}^t(\mathrm{X} - \mathrm{X}').
\end{aligned}$$

Cette matrice est symétrique positive, car somme de matrices symétriques positives. Ainsi $\lambda(\mathrm{X}, \mathrm{S}) + (1 - \lambda)(\mathrm{X}', \mathrm{S}')$ appartient à $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est convexe.

2. On a, pour tout $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$,

$$ {}^tY(S - X\,{}^tX)Y = {}^tYSY - ({}^tXY)^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 y_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2. $$

• Si $(X, S) \in \mathcal{C}$, on a $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^2 y_i^2 - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \geqslant 0$ pour tout Y. En prenant $y_1 = \cdots = y_k = 0$, on obtient $\Big(\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leqslant 0$ et donc $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i y_i = 0$, pour tout $(y_{k+1}, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Ceci implique clairement $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. L'hypothèse devient donc $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^2 y_i^2 - \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i\Big)^2 \geqslant 0$ pour tout $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. En prenant $y_i = \dfrac{x_i}{\lambda_i^2}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on obtient

$$ \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2} - \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\Big)^2 \geqslant 0. $$

Si $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{x_i^2}{\lambda_i^2} > 0$, on simplifie et on obtient $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{x_i^2}{\lambda_i^2} \leqslant 1$, inégalité qui reste vraie si la somme est nulle.

• Réciproquement, si les conditions $x_i = 0$ pour $i > k$ et $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{x_i^2}{\lambda_i^2} \leqslant 1$ sont réalisées, on a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$ \begin{aligned} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{\lambda_i} \lambda_i y_i\Big)^2 \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\Big) \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 y_i^2\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 y_i^2. \end{aligned} $$

On en déduit que $(X, S) \in \mathcal{C}$.

3. Notons $\mathcal{F} = \{(X, S) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}, \quad S = X\,{}^tX\}$. Commençons par traiter le cas $n = 1$. Soit $(x, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s - x^2 \geqslant 0$. Si $x \neq 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{x^2}{s} \leqslant 1$ et on peut écrire

$$ (x, s) = \frac{x^2}{s}\left(\frac{s}{x}, \frac{s^2}{x^2}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{s}\right)(0, 0). $$

Si $x = 0$, on a $s \geqslant 0$ et

$$ (0, s) = \frac{1}{2}\Big((\sqrt{s}, s) + (-\sqrt{s}, s)\Big). $$

Pour traiter le cas général, on se ramène au cas d'une matrice S diagonale. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $S = PD\,{}^tP$. On peut écrire

$$S - X\,{}^tX = P(D - {}^tPX\,{}^tXP)\,{}^tP = P(D - Z\,{}^tZ)\,{}^tP,$$

où $Z = {}^tPX$. La matrice $D - Z\,{}^tZ$ est symétrique positive, car congruente à $S - X\,{}^tX$. Il suffit de démontrer le résultat pour (Z, D). En effet, si (Z, D) est barycentre à coefficients positifs d'éléments de $\mathcal{F}$, il existe un entier r, des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de somme 1 et des vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ tels que $(Z, D) = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i (X_i, X_i\,{}^tX_i)$. On a alors

$$\begin{aligned}(X, S) = (PZ, PD\,{}^tP) &= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i PX_i, \sum_{i=1}^{r} PX_i\,{}^tX_i\,{}^tP\right)\\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (PX_i, (PX_i)\,{}^t(PX_i)),\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché pour (S, X).

On suppose dorénavant que S est diagonale. Si $S = 0$, alors $X\,{}^tX = 0$ et donc $X = 0$. Il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut supposer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non nuls tels que $S = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_k^2, 0 \ldots, 0)$. D'après la question 2, on a $x_i = 0$ si $i \in [\![k+1, n]\!]$ et $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{x_i^2}{\lambda_i^2} \leqslant 1$. Cette dernière relation incite à prendre comme coefficients de la combinaison linéaire les $\dfrac{x_i^2}{\lambda_i^2}$.

Si $x_i \neq 0$, on peut écrire $(x_i, \lambda_i^2) = \dfrac{x_i^2}{\lambda_i^2}\left(\dfrac{\lambda_i^2}{x_i}, \dfrac{\lambda_i^4}{x_i^2}\right)$. On note X_i le vecteur dont la seule la coordonnée non nulle est la i-ième qui vaut $\dfrac{\lambda_i^2}{x_i^2}$. La matrice $X_i\,{}^tX_i$ est diagonale, le seul terme non nul de la diagonale étant le i-ième qui vaut $\dfrac{\lambda_i^4}{x_i^2}$. On en déduit que si $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$,

$$(X, S) = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}(X_i, X_i\,{}^tX_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}(X_i, X_i\,{}^tX_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right)(0, 0).$$

Si les x_i ne sont pas tous non nuls (pour $i \leqslant k$), on peut supposer qu'il existe $j \in [\![2, k]\!]$ tel que $x_i \neq 0$ si $i \leqslant j$ et $x_i = 0$ si $i > j$. En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$(X, \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_j^2, 0 \ldots 0)) = \sum_{i=1}^{j} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}(X_i, X_i\,{}^tX_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{j} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right)(0, 0)$$

et donc

$$(X,S) = \frac{x_1^2}{\lambda_1^2}(X_1,S_1) + \sum_{i=2}^{j} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}(X_i, X_i\,{}^tX_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{j} \frac{x_i^2}{\lambda_i^2}\right)(0,0) \quad (1),$$

où $S_1 = \mathrm{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$, avec $\mu_i = \dfrac{\lambda_1\lambda_i}{x_1}$ si $i = 1$ ou $j+1 \leqslant i \leqslant k$ et $\mu_i = 0$ sinon.

Il suffit de démontrer que (X_1, S_1) peut s'écrire comme barycentre à coefficients positifs d'éléments de $\mathcal{F}$. Considérons les 2^{k-j} vecteurs-colonnes de la forme

$${}^t(\mu_1, 0, \dots, 0, \varepsilon_{j+1}\mu_{j+1}, \dots, \varepsilon_k\mu_k, 0, \dots, 0),$$

où les ε_i sont égaux à ± 1. On les note $Y_1, \dots, Y_{2^{n-k}}$. On obtient $\dfrac{1}{2^{n-k}} \sum\limits_{i=1}^{2^{n-k}} Y_i = X_1$, car hormis le premier, les coefficients s'annulent deux à deux et $\dfrac{1}{2^{n-k}} \sum\limits_{i=1}^{2^{n-k}} Y_i\,{}^tY_i = S_1$. En effet les coefficients diagonaux de $Y_i\,{}^tY_i$ sont égaux à ceux de S_1 et les autres sont deux à deux opposés. Ainsi, $(X_1, S_1) = \dfrac{1}{2^{n-k}} \sum\limits_{i=1}^{2^{n-k}} (Y_i, Y_i\,{}^tY_i)$ et (X, S) peut s'écrire comme barycentre à coefficients positifs d'éléments de $\mathcal{F}$ comme on le voit en remplaçant (X_1, S_1) par son expression dans l'égalité (1). $\lhd$

Dans les exercices suivants, il est souvent demandé de vérifier que si u est un endomorphisme d'un espace euclidien (resp. A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), alors $u^* \circ u$ (resp. ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$) est un endomorphisme symétrique positif (resp. une matrice symétrique positive). De plus, si u est un isomorphisme (resp. A inversible), $u^* \circ u$ (resp. ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$) est défini positif (resp. définie positive). Nous détaillerons la preuve de ce fait important les premières fois et nous y ferons référence par la suite.

2.11. Caractérisation des symétries orthogonales

Soit E un espace euclidien de dimension n, s une symétrie de E.

1. Que dire de $s^* \circ s$?

2. Montrer que $P(X) = \det(X\,\mathrm{Id}_E + s^* \circ s)$ est un polynôme réciproque, c'est-à-dire vérifie $P(X) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ ($n = \deg P$).

3. Montrer que $P(1) \geqslant 2^n$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. L'endomorphisme $s^* \circ s$ est symétrique. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$, on a

$$\langle s^* \circ s(x), x\rangle = \|s(x)\|^2 > 0,$$

donc $s^* \circ s$ est défini positif. Ainsi $s^* \circ s$ est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont strictement positives. On peut noter de plus que $\det(s^* \circ s) = \det s^* \det s = (\det s)^2 = 1$, puisque $s^2 = \mathrm{Id_E}$.

2. Si P est réciproque et si z est une racine non nulle de P alors $\frac{1}{z}$ est aussi racine de P. Or les racines de P sont les opposés des valeurs propres de $s^* \circ s$. On va donc commencer par regarder si l'ensemble de ces valeurs propres (qui sont non nulles) est stable par passage à l'inverse.

Soit λ une valeur propre de $s^* \circ s$ et x un vecteur propre. On pose $y = s(x)$. On a alors $s^*(y) = \lambda x = \lambda s(y)$. On en déduit que

$$(s^* \circ s)(y) = \frac{1}{\lambda}(s^* \circ s^*)(y) = \frac{1}{\lambda} y.$$

Autrement dit, $\frac{1}{\lambda}$ est aussi valeur propre de $s^* \circ s$. Si $\lambda \neq 1$, on a $\frac{1}{\lambda} \neq \lambda$ et $s(\mathrm{E}_\lambda) \subset \mathrm{E}_{\frac{1}{\lambda}}$, où l'on note E_λ l'espace propre relatif à la valeur propre λ. Mais le même résultat appliqué à $\frac{1}{\lambda}$ montre qu'en fait $s(\mathrm{E}_\lambda) = \mathrm{E}_{\frac{1}{\lambda}}$: s réalise un isomorphisme entre ces deux sous-espaces propres et les valeurs propres λ et $\frac{1}{\lambda}$ ont même ordre de multiplicité. Outre 1, dont on note m l'ordre de multiplicité, les valeurs propres distinctes de $s^* \circ s$ peuvent se noter $\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \lambda_r, \frac{1}{\lambda_r}$, les valeurs propres λ_i et $\frac{1}{\lambda_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant r$ ayant même multiplicité n_i. On a alors

$$\mathrm{Q} = \det(s^* \circ s - \mathrm{X}\,\mathrm{Id_E}) = (-1)^n(\mathrm{X}-1)^m \prod_{i=1}^{r} \left((\mathrm{X}-\lambda_i)\left(\mathrm{X}-\frac{1}{\lambda_i}\right)\right)^{n_i}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{P} = \mathrm{Q}(-\mathrm{X}) &= (\mathrm{X}+1)^m \prod_{i=1}^{r} \left((\mathrm{X}+\lambda_i)\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\lambda_i}\right)\right)^{n_i} \\ &= (\mathrm{X}+1)^m \prod_{i=1}^{r} \left(\mathrm{X}^2 + (\lambda_i + \lambda_i^{-1})\mathrm{X} + 1\right)^{n_i}.\end{aligned}$$

Il est alors clair sur cette expression que $\mathrm{X}^n \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

3. On a $\mathrm{P}(1) = 2^m \prod_{i=1}^{r} (2 + \lambda_i + \lambda_i^{-1})^{n_i}$. On vérifie aisément que pour tout $t > 0$, on a $t + t^{-1} \geqslant 2$, avec égalité si, et seulement si, $t = 1$. On en déduit que $P(1) \geqslant 2^m 4^{n_1+\cdots+n_r}$. Comme $2\sum_{i=1}^{r} n_i + m = n$, cela donne exactement l'inégalité $P(1) \geqslant 2^n$. Il y a égalité si, et seulement si, 1 est la seule valeur propre de $s^* \circ s$. Comme $s^* \circ s$ est diagonalisable, on a alors $s^* \circ s = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire $s^* = s$.

Conclusion. On a $P(1) = 2^n$ si, et seulement si, s est une symétrie orthogonale. ◁

Le résultat de l'exercice suivant est classique et très important.

2.12. Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme auto-adjoint positif. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme auto-adjoint positif h tel que $u = h^2$. Montrer que h est un polynôme en u.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ étant la valeur propre associée à e_i. On définit h dans la base $\mathcal{B}$, on posant $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. L'endomorphisme h est auto-adjoint, car diagonalisable dans une base orthonormale, positif et vérifie clairement $h^2 = u$.

Si k est un endomorphisme auto-adjoint positif tel que $k^2 = u$, k commute avec u, donc laisse invariants les sous-espaces propres de u. La restriction de k à E_λ, espace propre de u relatif à la valeur propre λ, est un endomorphisme auto-adjoint positif donc le carré est $\lambda\,\mathrm{Id}_{E_\lambda}$. Sa seule valeur propre (positive) possible est $\sqrt{\lambda}$. Comme il est diagonalisable, c'est $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E_\lambda}$. Ainsi, pour tout i, $k(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i = h(e_i)$ et on a donc $k = h$.

Il est facile d'exhiber un polynôme P tel que $P(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$ (par interpolation de Lagrange). La construction de h montre que pour un tel P on a $h = P(u)$. ◁

Le résultat admet bien entendu une traduction matricielle immédiate : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice symétrique positive, il existe une unique matrice* B *symétrique positive telle que* $A = B^2$. *De plus* B *est un polynôme en* A. *On généralise sans peine aux racines k-ièmes pour tout* $k \geqslant 2$.

Voici une première application de l'existence de la racine carrée.

2.13. Produit de deux matrices symétriques positives

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A et B symétriques positives.

1. On suppose de plus que A est définie positive. Montrer que AB est diagonalisable et que son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que le résultat de la première question reste vrai si on ne suppose plus A définie positive, mais seulement positive.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On peut écrire $A = S^2$ avec S symétrique définie positive. Dans ces conditions. le produit AB s'écrit $AB = S^2B = S(SBS)S^{-1}$ et AB est semblable à la matrice SBS qui est symétrique et positive. En effet. $SBS = {}^tSBS$ est congruente à B (elles représentent la même forme quadratique). En particulier, AB est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives.

Notons que la réciproque est vraie. Si M *est diagonalisable à valeurs propres positives, on peut l'écrire* $M = P^{-1}DP$ *avec* D *diagonale et* P *inversible. Il suffit alors d'écrire* $M = P^{-1}\,{}^tP^{-1}\,{}^tPDP$ *et de constater que la matrice* $A = P^{-1}\,{}^tP^{-1}$ *est symétrique définie positive et que la matrice* $B = {}^tPDP$ *est symétrique positive.*

On peut donner un autre éclairage du fait que AB *est diagonalisable. Comme* A^{-1} *est définie positive, la forme bilinéaire symétrique* $(X, Y) \longmapsto \langle X, A^{-1}Y\rangle$ *est un produit scalaire. On observe alors que* AB *définit un endomorphisme auto-adjoint pour ce produit scalaire, puisque*

$$\langle ABX, A^{-1}Y\rangle = \langle BX, Y\rangle = \langle X, BY\rangle = \langle X, A^{-1}(ABY)\rangle.$$

2. On peut encore écrire $A = S^2$, mais S est seulement symétrique positive. On utilise encore la matrice SBS qui est symétrique positive, car congruente à B. On note r le rang de SBS et on considère des vecteurs propres $X_1, \dots, X_r$ associés aux valeurs propres strictement positives $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de SBS. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on a $SBSX_k = \lambda_k X_k$ et donc $AB(SX_k) = \lambda_k SX_k$.

Comme $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r) \cap \mathrm{Ker}(SBS) = \{0\}$, on a *a fortiori* $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r) \cap \mathrm{Ker}\, S = \{0\}$. On en déduit que la famille $(SX_1, \dots, SX_r)$ est libre, car la restriction de S à un supplémentaire de Ker S est injective. On a donc une famille libre de r vecteurs propres de AB associés à des valeurs propres strictement positives.

Pour conclure que AB est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives, il suffit de montrer que l'espace propre relatif à la valeur propre 0 est de dimension $n - r$, c'est-à-dire que $\mathrm{rg}(AB) = r = \mathrm{rg}(SBS)$.

Par construction (voir exercice 2.12), on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} S$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker}(SB)$ et donc $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(SB)$.

Soit T une matrice symétrique positive telle que $B = T^2$. On a, si $X \in \operatorname{Ker}(SBS)$,

$$0 = {}^tXSBSX = {}^tXST^2SX = \|TSX\|^2.$$

On en déduit $TSX = 0$ et donc $BSX = 0$. On a donc $\operatorname{Ker}(SBS) \subset \operatorname{Ker}(BS)$ et comme l'inclusion inverse est évidente, $\operatorname{Ker}(SBS) = \operatorname{Ker}(BS)$. On en déduit que

$$\operatorname{rg}(SBS) = \operatorname{rg}(BS) = \operatorname{rg} {}^t(BS) = \operatorname{rg}(SB) = \operatorname{rg}(AB). \lhd$$

On peut aussi se placer dans une base orthonormale qui diagonalise A, isoler le noyau, et raisonner par blocs comme dans l'exercice 2.6.

Présenté comme un critère original de diagonalisabilité pour une matrice réelle, l'exercice suivant n'est qu'une autre écriture de la première question de celui qui précède.

2.14. Condition de diagonalisabilité d'une matrice réelle

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tPP$ est une matrice symétrique définie positive.

2. Montrer que toute matrice S symétrique définie positive s'écrit $S = {}^tPP$ avec P inversible.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice S symétrique définie positive telle que ${}^tA = S^{-1}AS$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La matrice ${}^tPP$ est clairement symétrique et vérifie, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX\,{}^tPPX = \|PX\|^2 \geqslant 0$. De plus, P étant inversible, si $X \neq 0$, PX n'est pas nul et $\|PX\|^2 > 0$. Donc ${}^tPP$ est symétrique définie positive.

2. La forme quadratique q_S associée à S est définie positive et on peut donc trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour q_S. Si $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage de cette base à la base canonique, on a en vertu de la formule de changement de base, $S = {}^tPI_nP = {}^tPP$.

On peut également utiliser la racine carrée de S *(voir exercice 2.12) : la matrice* S *s'écrit* $S = P^2$ *avec* P *symétrique positive. En particulier, on a* $S = {}^tPP$. *On se reportera aussi à l'exercice 2.29 où l'on montrera* *que* P *peut être choisie triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs.*

3. Si A est diagonalisable, il existe D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors

$$ {}^tA = {}^tP^{-1}D\,{}^tP = {}^tP^{-1}P^{-1}AP\,{}^tP = (P\,{}^tP)^{-1}A(P\,{}^tP). $$

D'après la question 1, la matrice $S = P\,{}^tP$ est symétrique définie positive et ${}^tA = S^{-1}AS$.

Supposons réciproquement qu'il existe S symétrique définie positive telle que ${}^tA = S^{-1}AS$. Cette égalité s'écrit $AS = S\,{}^tA = {}^t(AS)$: la matrice $B = AS$ est symétrique et $A = BS^{-1}$. C'est une situation analogue à celle de l'exercice précédent (la matrice définie positive est cette fois à droite). Les questions préliminaires de l'énoncé invitent à écrire la matrice symétrique définie positive S^{-1} sous la forme $S^{-1} = {}^tPP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$. On obtient alors

$$ A = B\,{}^tPP = P^{-1}PB\,{}^tPP. $$

La matrice $PB\,{}^tP$ est symétrique réelle donc diagonalisable et A qui lui est semblable est également diagonalisable. $\triangleleft$

Si l'on dispose du théorème de réduction de Jordan, il est possible de démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ *(où* K *est un corps commutatif) est semblable à sa transposée.*

L'énoncé suivant apporte une généralisation un peu plus difficile.

2.15. Condition d'existence de m vecteurs propres indépendants

Montrer que les deux propriétés suivantes d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes :

(i) A possède m vecteurs propres linéairement indépendants ;

(ii) il existe une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang m ayant des valeurs propres positives telle que $AS = S\,{}^tA$.

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

• Si A possède m vecteurs propres indépendants, on voit en choisissant une base dont les m premiers vecteurs sont ces vecteurs propres, que A est semblable à une matrice A' de la forme $A' = \begin{pmatrix} D & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où D est diagonale d'ordre m, $B \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{R})$. On pose

$J_m = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que $A'J_m = J_m {}^tA' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si P est une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A' = PAP^{-1}$, on obtient $PAP^{-1}J_m = J_m {}^tP^{-1} {}^tA {}^tP$ et donc $AP^{-1}J_m {}^tP^{-1} = P^{-1}J_m {}^tP^{-1} {}^tA$. La matrice $S = P^{-1}J_m {}^tP^{-1}$ est symétrique et de rang m comme J_m. Comme J_m et S expriment la même forme quadratique dans des bases différentes, S est positive puisque J_m l'est manifestement. Les valeurs propres de S sont donc positives et S répond à la question.

• Supposons réciproquement qu'il existe une matrice S symétrique de rang m telle que $AS = S {}^tA$. Comme S est positive de rang m elle est congruente[2] à la matrice J_m : il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $J_m = {}^tQSQ$. Si l'on note $P = {}^tQ$, on a $S = P^{-1}J_m {}^tP^{-1}$. La relation $AS = S {}^tA$ devient $A'J_m = J_m {}^tA'$ avec $A' = PAP^{-1}$. Si l'on écrit $A' = \begin{pmatrix} D & B \\ E & C \end{pmatrix}$ avec D carrée de taille m, on obtient ${}^tD = D$ et $E = 0$. Autrement dit, $A' = \begin{pmatrix} D & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec D symétrique réelle. La matrice D est diagonalisable et la restriction de l'endomorphisme canoniquement associé à A' au sous-espace engendré par les m premiers vecteurs possède donc une base de vecteurs propres. Cette base est constituée de m vecteurs propres indépendants pour A'. Comme A est semblable à A', A possède également m vecteurs propres indépendants. ◁

Il s'agit dans les deux exercices qui suivent de résoudre une équation dans $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ faisant intervenir des endomorphismes définis positifs ou des matrices définies positives.

2.16. Une équation matricielle

> Soit B une matrice symétrique définie positive, A une matrice dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Prouver qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive K telle que $K - AK {}^tA = B$. (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons $\mathcal{S}$ le sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Définissons l'application

$$\begin{array}{rccc} & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ \varphi : & K & \longmapsto & K - AK {}^tA. \end{array}$$

2. Le lecteur pourra se reporter aux rappels sur la classification des formes quadratiques page 212.

Cette application est bien définie car si K est symétrique,

$$ {}^{t}(\mathrm{K} - \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A}) = {}^{t}\mathrm{K} - {}^{t}({}^{t}\mathrm{A})\,{}^{t}\mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A} = \mathrm{K} - \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A} $$

et $\mathrm{K} - \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A}$ est symétrique. Clairement, φ est linéaire.

Montrons que φ est injective. Soit $\mathrm{K} \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a $\mathrm{K} = \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A}$ et par une récurrence immédiate, $\mathrm{K} = \mathrm{A}^m\mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathrm{A}^m = 0$, puisque le rayon spectral $\rho(\mathrm{A})$ de A est strictement inférieur à 1 (se reporter à l'exercice 2.59 du tome 2 d'algèbre). Donc $\mathrm{K} = 0$ et φ est injective.

L'espace $\mathcal{S}$ étant de dimension finie, φ est surjective. Il existe donc $\mathrm{K} \in \mathcal{S}$ tel que $\varphi(\mathrm{K}) = \mathrm{B}$ *i.e.* $\mathrm{K} - \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A} = \mathrm{B}$. Il reste à prouver que K est définie positive. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a, en remplaçant K par $\mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A} + \mathrm{B}$ de manière itérée,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{K}x, x\rangle &= \langle \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A}x, x\rangle + \langle \mathrm{B}x, x\rangle = \langle \mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A}x, {}^{t}\mathrm{A}x\rangle + \langle \mathrm{B}x, x\rangle \\
&= \langle \mathrm{AK}\,{}^{t}\mathrm{A}\,{}^{t}\mathrm{A}x, {}^{t}\mathrm{A}x\rangle + \langle \mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}x, {}^{t}\mathrm{A}x\rangle + \langle \mathrm{B}x, x\rangle \\
&= \langle \mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A}^2x, {}^{t}\mathrm{A}^2x\rangle + \langle \mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}x, {}^{t}\mathrm{A}x\rangle + \langle \mathrm{B}x, x\rangle \\
&\;\;\vdots \\
&= \langle \mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A}^m x, {}^{t}\mathrm{A}^m x\rangle + \cdots + \langle \mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}x, {}^{t}\mathrm{A}x\rangle + \langle \mathrm{B}x, x\rangle \\
&= \langle \mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A}^m x, {}^{t}\mathrm{A}^m x\rangle + \sum_{k=0}^{m-1} \langle \mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}^k x, {}^{t}\mathrm{A}^k x\rangle.
\end{aligned}
$$

Or $\lim\limits_{m\to+\infty} {}^{t}\mathrm{A}^m = 0$, donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \langle \mathrm{K}\,{}^{t}\mathrm{A}^m x, {}^{t}\mathrm{A}^m x\rangle = 0$ (par continuité des applications linéaires et du produit scalaire en dimension finie) et finalement en faisant tendre m vers l'infini

$$ (\mathrm{K}x|x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\langle \mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}^k x, {}^{t}\mathrm{A}^k x\rangle}_{\substack{\geqslant 0 \text{ car} \\ \mathrm{B} \text{ est définie positive}}} \geqslant \langle \mathrm{B}x, x\rangle > 0. $$

Donc K est définie positive. ◁

2.17. Équation dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Soit E un espace euclidien, a et b deux endomorphismes de E symétriques définis positifs.

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $b = ac + ca$. Montrer que c est symétrique défini positif.

2. Dans le cas où $\dim \mathrm{E} = 2$, montrer que si a et c sont des endomorphismes de E symétriques définis positifs, $ac + ca$ n'est pas nécessairement défini positif.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Considérons l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathrm{E}) \\ c & \longmapsto & ac + ca. \end{array}$$

Il est aisé de vérifier que φ est linéaire. Montrons que φ est injective. Comme a est symétrique, considérons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée formée de vecteurs propres pour a. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ la valeur propre associée à e_i : $a(e_i) = \lambda_i e_i$. Prenons $c \in \operatorname{Ker} \varphi$. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$0 = (ac + ca)(e_i) = a(c(e_i)) + c(a(e_i)) = a(c(e_i)) + c(\lambda_i e_i)$$

et donc $a(c(e_i)) = -\lambda_i c(e_i)$. Or $-\lambda_i < 0$ et λ_i ne peut donc être dans le spectre de a qui est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc $c(e_i) = 0$. Par conséquent, $c = 0$ et φ est injective.

Comme $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est de dimension finie, φ est un isomorphisme. En particulier, il existe un unique $c \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $ac + ca = b$.

On a

$$b = b^* = (ac + ca)^* = c^* a^* + a^* c^* = c^* a + a c^*.$$

Ainsi, on a vérifié $\varphi(c) = \varphi(c^*)$ et par conséquent $c = c^*$, puisque φ est injectif. L'endomorphisme c est symétrique.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} c$ et $x \neq 0$ dans E tel que $c(x) = \lambda x$. On a

$$\begin{aligned} 0 < \langle b(x), x\rangle &= \langle ac(x), x\rangle + \langle ca(x), x\rangle = \langle a(\lambda x), x\rangle + \langle a(x), c(x)\rangle \\ &= \lambda\langle a(x), x\rangle + \lambda\langle a(x), x\rangle = 2\lambda\langle a(x), x\rangle \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $\langle a(x), x\rangle > 0$ puisque a est défini positif, λ est strictement positif. Le spectre de c est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ et c est symétrique défini positif.

2. Une matrice réelle $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive si, et seulement si, $\alpha > 0$ et son déterminant $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$. En effet, si $\alpha > 0$ et $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, le produit des valeurs propres de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ est strictement positif et ces valeurs propres sont de même signe. Leur somme vaut $\alpha + \gamma$. Or α est du même signe que γ, car $\alpha\gamma > \beta^2$. Ainsi $\alpha + \gamma > 0$ et finalement les valeurs propres sont strictement positives. La matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ est bien définie positive. La réciproque est immédiate (voir aussi l'exercice suivant).

Considérons les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{AC} + \mathrm{CA}$$

avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. La matrice C est définie positive dès lors que $\gamma - \beta^2 > 0$. On a

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3\beta \\ 3\beta & 4\gamma \end{pmatrix}.$$

B n'est pas définie positive si $8\gamma - 9\beta^2 \leqslant 0$. Prenons $\beta = 1$ et $\gamma \in]1, 9/8[$, par exemple $\gamma = 17/16$. Alors ces inéquations sont vérifiées (B est en fait de signature $(1, 1)$).

Dans E, on prend une base orthonormée et les endomorphismes a et c associés à A et C respectivement dans cette base et les contre-exemples voulus sont construits. $\triangleleft$

La caractérisation analytique des matrices définies positives de taille $(2, 2)$ *donnée dans la seconde question de l'exercice précédent se généralise pour les matrices de taille quelconque. Elle est basée sur le signe des mineurs principaux.*

2.18. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives

Soit $\mathrm{M} = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que M est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux $\mathrm{D}_k = \det(m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n$) sont strictement positifs.

(École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Supposons M définie positive et notons q_{M} la forme quadratique canoniquement associée à M : $q_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{XMX}$ pour $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$. Alors, $(m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ n'est autre que la matrice de la restriction de q_{M} à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Cette restriction étant évidemment définie positive, sa matrice a un déterminant D_k strictement positif.

Pour la réciproque, procédons par récurrence sur n. Le résultat est clair pour $n = 1$. On suppose que la propriété est vraie au rang $n - 1$ ($n \geqslant 2$) et on considère une matrice M symétrique réelle d'ordre n dont les n déterminants extraits correspondants aux k premières lignes et aux k premières colonnes ($1 \leqslant k \leqslant n$) sont positifs. On note N la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de M. Elle vérifie les mêmes hypothèses que M. Par hypothèse de récurrence, elle est définie positive. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, à coefficients diagonaux strictement positifs telles que ${}^t\mathrm{PNP} = \mathrm{D}$. On pose $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice Q est orthogonale et il existe

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$^t\mathrm{QMQ} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{M}'.$$

Pour tout $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} ^t\mathrm{XM'X} &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2 + a_n x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(x_i + \frac{a_i}{\lambda_i} x_n \right)^2 + \left(a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{\lambda_i} \right) x_n^2. \end{aligned}$$

Il faut démontrer que le dernier coefficient est strictement positif. En ajoutant à la dernière ligne de M' la i-ième multipliée par $-\dfrac{a_i}{\lambda_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on obtient

$$\det \mathrm{M}' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{a_i^2}{\lambda_i} \end{vmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \left(a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{\lambda_i} \right).$$

Par hypothèse le déterminant de M est strictement positif, donc $\det \mathrm{M}' = (\det \mathrm{Q})^2 \det \mathrm{M} = \det \mathrm{M} > 0$. Les λ_i étant positifs, on en déduit que $a_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{a_i^2}{\lambda_i} > 0$. De l'expression de $^t\mathrm{XM'X}$, on déduit que M' est définie positive. Il en est de même de M qui lui est congruente. $\triangleleft$

Une autre solution plus simple, cependant moins dans l'esprit du programme des classes préparatoires, utilisant l'orthogonalité au sens d'une forme quadratique sera présentée dans l'exercice 3.15.

La caractérisation établie dans l'exercice précédent montre que l'ensemble des matrices symétriques définies positives forme un ouvert de l'espace des matrices symétriques réelles de taille n.

Notons que l'on ne peut caractériser les matrices symétriques positives par la positivité des mineurs principaux comme le montre la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *En prenant tous les mineurs diagonaux c'est toutefois possible comme le montre l'exercice suivant.*

2.19. Caractérisation des matrices positives

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique réelle. On note A_I la sous-matrice $(a_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ pour toute partie non vide $I \subset [\![1, n]\!]$. Montrer que A est positive si et seulement si $\det A_I \geqslant 0$ pour toute partie non vide I.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On notera $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $q : X \longmapsto {}^tXAX$ la forme quadratique canoniquement associée à A.

• Supposons A est positive et soit $I \subset [\![1, n]\!]$ non vide. La restriction de la forme quadratique q au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$ est positive et sa matrice dans la base $(e_i)_{i\in I}$ est A_I. On a donc $\det A_I \geqslant 0$.

• Supposons réciproquement que $\det A_I \geqslant 0$ pour toute partie non vide I. On va montrer que $A + \varepsilon I_n$ est définie positive pour tout $\varepsilon > 0$. Cela suffit pour conclure, puisque si $X \in \mathbb{R}^n$ est fixé et non nul, alors $q(X) + \varepsilon\|X\|^2 > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, et donc $q(X) \geqslant 0$ en faisant tendre ε vers 0^+. Pour prouver que $A + \varepsilon I_n$ est définie positive on va utiliser la caractérisation de Sylvester démontrée dans l'exercice précédent et montrer que les mineurs principaux de cette matrice sont strictement positifs. Comme les matrices extraites $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ vérifient la même propriété que A il suffit donc de prouver que $\det(A + \varepsilon I_n) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'agit évidemment d'une fonction polynôme en ε de degré n (à savoir $\chi_A(-\varepsilon)$) qu'on peut écrire

$$\det(A + \varepsilon I_n) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} + a_n\varepsilon^n$$

avec $a_0 = \det A \geqslant 0$ et $a_n = 1$. Le résultat provient de ce que tous les coefficients a_k sont positifs ou nuls. En effet, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$a_{n-k} = \sum_{|I|=k} \det A_I.$$

Une manière agréable de prouver cela est de considérer plutôt le déterminant de la matrice $A + \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ qui conduit à un polynôme en $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Soit alors $i_1 < i_2 < \cdots i_k$ des indices de $[\![1, n]\!]$. En développant par multilinéarité, il est facile de voir que le coefficient du terme $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\dots\varepsilon_{i_k}$ est exactement le déterminant de la matrice A_I avec $I = [\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. La formule annoncée plus haut s'en déduit en prenant $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$. ◁

Le thème suivant est l'étude des matrices symétriques réelles à coefficients positifs. Le premier énoncé étudie en dimension 2 un problème difficile qui sera abordé plus loin.

2.20. Matrice symétrique de taille 2 à coefficients positifs

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il une matrice symétrique à coefficients réels strictement positifs orthogonalement semblable à D ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique à coefficients strictement positifs orthogonalement semblable à D. Il existe donc $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PD\,{}^tP$. Quitte à remplacer P par $P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on peut supposer que $P \in SO_2(\mathbb{R})$: dit plus abstraitement, si A se diagonalise dans une base orthonormée, elle se diagonalise aussi dans une base orthonormée directe (il suffit de remplacer l'un des vecteurs propres par son opposé). Posons alors $P = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. On a alors, après deux lignes de calcul,

$$A = PD\,{}^tP = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2 t + \lambda_2 \sin^2 t & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin t \cos t \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin t \cos t & \lambda_1 \sin^2 t + \lambda_2 \cos^2 t \end{pmatrix}$$

ce qui donne encore en utilisant les formules de duplication

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cos 2t & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2t \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2t & \lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \cos 2t \end{pmatrix}.$$

On cherche à avoir tous les coefficients de A strictement positifs. Une condition nécessaire est que $\mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2$ soit strictement positif. Il est aussi nécessaire que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ en raison des coefficients non diagonaux. Ces deux conditions sont en fait suffisantes : en effet, il suffit alors de choisir t de sorte que $\cos 2t$ soit assez petit pour que les coefficients diagonaux soit strictement positifs et que $\sin 2t$ ait le signe de $\lambda_1 - \lambda_2$.

Conclusion. Il existe une matrice symétrique à coefficients réels strictement positifs semblable à D si, et seulement si, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Si on souhaite seulement avoir des coefficients positifs ou nuls la condition est $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$. C'est ce résultat qui sera généralisé dans l'exercice 2.22.

L'énoncé suivant concerne le théorème de Perron-Frobenius dans le cadre de matrices symétriques. La preuve est plus simple que dans le cas général que le lecteur trouvera dans le tome algèbre 2 (exercice 2.10).

2.21. Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle à coefficients strictement positifs. On note $\rho = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,A} |\lambda|$ le rayon spectral de A. Montrer que ρ est valeur propre simple de A et que le sous-espace propre associé à ρ est engendré par une matrice colonne à coefficients strictement positifs.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Notons $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A. Nous savons que si X est un vecteur unitaire alors ${}^t\mathrm{X}\mathrm{A}\mathrm{X} \leqslant \lambda_1$. En effet, il suffit de considérer une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de A, e_i étant associé à λ_i, et de décomposer X dans cette base : si $\mathrm{X} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ on a

$$ {}^t\mathrm{XAX} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1. $$

On peut aussi noter qu'il y a égalité si et seulement si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 (toutes les composantes x_i pour les $\lambda_i < \lambda_1$ doivent être nulles).

Pour $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ on notera $|\mathrm{X}|$ le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs absolues de celles de X. Pour tout X unitaire, l'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$ |{}^t\mathrm{XAX}| \leqslant {}^t|\mathrm{X}|\mathrm{A}|\mathrm{X}| \leqslant \lambda_1 $$

car A est à coefficients positifs. Si on prend pour X un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ quelconque de A on en déduit que $|\lambda| \leqslant \lambda_1$. Autrement dit, $\lambda_1 = \rho$ et le rayon spectral de A est bien une valeur propre (en particulier λ_1 est positif, et même strictement, puisque A n'est pas nulle).

L'inégalité ci-dessus montre de plus que si X est un vecteur propre unitaire associé à λ_1 alors $|\lambda_1| \leqslant {}^t|\mathrm{X}|\mathrm{A}|\mathrm{X}| \leqslant \lambda_1$. On a donc ${}^t|\mathrm{X}|\mathrm{A}|\mathrm{X}| = \lambda_1$ et $|\mathrm{X}|$ est aussi un vecteur propre associé à λ_1. Montrons que toutes les composantes de $|\mathrm{X}|$ sont strictement positives. En effet, si $x_i = 0$ pour un entier i, la i-ième coordonnée de la relation $\mathrm{A}|\mathrm{X}| = \lambda_1|\mathrm{X}|$ conduit à $\sum\limits_{j \neq i} a_{ij}|x_j| = 0$ et comme les coefficients de A sont strictement positifs cela implique $x_j = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $\mathrm{X} = 0$ ce qui est absurde.

On a donc montré que A admet un vecteur propre pour λ_1 dont les coordonnées sont strictement positives. Pour conclure, il ne reste plus qu'à prouver que l'espace propre associé à λ_1 est de dimension 1. Comme

A est diagonalisable cela revient à dire que λ_1 est une valeur propre simple. Si $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sont deux vecteurs propres de A pour la valeur propre λ_1, les composantes de X et X′ sont, d'après ce qui précède, toutes non nulles. Posons $t = \dfrac{x'_1}{x_1}$. Le vecteur $X' - tX$ est dans l'espace propre pour la valeur propre λ_1 et sa première composante est nulle, donc il est nul. On a donc $X' = tX$ et le résultat demandé. ◁

On s'intéresse désormais à une sorte de réciproque. Étant donnés n réels, à quelles conditions est-il possible de trouver une matrice symétrique à coefficients positifs admettant ces réels comme valeurs propres ? On notera que si dans l'exercice précédent la matrice A est seulement à coefficients positifs ou nuls on a toujours $\rho(A) \in \mathrm{Sp}\, A$ et l'existence d'un vecteur propre à coordonnées positives ou nulles ; en revanche l'espace propre associé n'est plus nécessairement de dimension 1. Cela fournit déjà une condition nécessaire sur le n-uplet de réels.

2.22. Théorème de Suleimanova (1949)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Soit α (resp. β) une valeur propre de A (resp. B) et X (resp. Y) un vecteur propre associé et $s \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} A & sX\,{}^tY \\ sY\,{}^tX & B \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si M est symétrique à coefficients positifs de plus grande valeur propre $\lambda \geqslant 0$, alors M admet un vecteur propre associé à λ à coefficients positifs.

3. En déduire que si $\lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ vérifient $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geqslant 0$, il existe M symétrique de taille n à coefficients positifs de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec multiplicité).

(École polytechnique)

Solution.

1. La matrice C est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée, avec des valeurs propres réelles. On cherche les vecteurs propres de C sous la forme $\begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix}$, avec $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. Si Z est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ orthogonal à X, on a

$$\mathrm{C}\begin{pmatrix}\mathrm{Z}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{AZ}\\ s\mathrm{Y}\,{}^t\mathrm{XZ}s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\mathrm{Z}\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\mathrm{Z}\\0\end{pmatrix}.$$

Cela montre que $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathrm{C}$. Ainsi toute valeur propre de A différente de α est valeur propre de C et la dimension de l'espace propre associé est supérieure ou égale à la dimension de l'espace propre correspondant de A. De plus, α est valeur propre de C lorsque son ordre de multiplicité pour A est supérieur ou égal à 2. En considérant les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\\mathrm{T}\end{pmatrix}$, où T est un vecteur propre de B orthogonal à Y, on obtient le même résultat pour les valeurs propres de B. On peut ainsi obtenir $p+q-2$ vecteurs propres linéairement indépendants deux à deux orthogonaux. Notons que si $s=0$, les vecteurs $\begin{pmatrix}\mathrm{X}\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\\mathrm{Y}\end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de C. Dans ce cas, que nous écartons désormais, on a $\operatorname{Sp}\mathrm{C} = \operatorname{Sp}\mathrm{A} \cup \operatorname{Sp}\mathrm{B}$. Cherchons enfin des vecteurs propres de la forme $\mathrm{U} = \begin{pmatrix}a\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\end{pmatrix}$, où a est réel. Un tel vecteur est orthogonal aux vecteurs propres précédemment déterminés. On obtient

$$\mathrm{CU} = \begin{pmatrix}a\mathrm{AX} + s\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{YY}\\ sa\mathrm{Y}\,{}^t\mathrm{XX} + \mathrm{BY}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a\alpha + s\|\mathrm{Y}\|^2)\mathrm{X}\\ (sa\|\mathrm{X}\|^2 + \beta)\mathrm{Y}\end{pmatrix}.$$

Le vecteur U est vecteur propre de C si et seulement si on a $a\alpha + s\|\mathrm{Y}\|^2 = a(sa\|\mathrm{X}\|^2 + \beta)$. Cette équation du second degré en a qui s'écrit $s\|\mathrm{X}\|^2a^2 + (\beta-\alpha)a - s\|\mathrm{Y}\|^2 = 0$ a deux solutions

$$a = \frac{1}{2s\|\mathrm{X}\|^2}\Big(\alpha - \beta \pm \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + 4s^2\|\mathrm{X}\|^2\|\mathrm{Y}\|^2}\Big),$$

la valeur propre correspondante étant $sa\|\mathrm{X}\|^2 + \beta$. On obtient donc les deux dernières valeurs propres

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(\alpha + \beta \pm \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + 4s^2\|\mathrm{X}\|^2\|\mathrm{Y}\|^2}\Big).$$

Si $s=0$, on retrouve α et β, comme prévu.

Conclusion. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont les valeurs propres de A et $\beta_1,\dots,\beta_q$ celles de B, comptées avec multiplicité, avec $\alpha=\alpha_1$ et $\beta=\beta_1$, alors les valeurs propres de C sont $\frac{1}{2}\big(\alpha+\beta-\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4s^2\|\mathrm{X}\|^2\|\mathrm{Y}\|^2}\big)$, $\frac{1}{2}\big(\alpha+\beta+\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4s^2\|\mathrm{X}\|^2\|\mathrm{Y}\|^2}\big)$, $\alpha_2,\dots,\alpha_p$, $\beta_2,\dots,\beta_q$.

2. C'est ce que nous avons rappelé en préambule : voir la solution de l'exercice précédent.

3. On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est évident ; on prend $\mathrm{M} = (\lambda_1)$. Supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$ ($n \geqslant 2$)

et considérons des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geqslant 0$. On a alors $\lambda_1 + \lambda_n \geqslant -\lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} \geqslant 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient une matrice N de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ symétrique à coefficients positifs, de valeurs propres $\lambda_1 + \lambda_n$, $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. D'après la question 2, N possède pour la valeur propre $\lambda_1 + \lambda_n$ un vecteur propre X à coefficients positifs que nous pouvons supposer unitaire. Considérons la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{N} & s\mathrm{X} \\ s\,{}^t\mathrm{X} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $s \in \mathbb{R}_+$. C'est une matrice symétrique à coefficients positifs. On applique le résultat de la question 1, en prenant $p = n-1$, $q = 1$, $\mathrm{A} = \mathrm{N}$, $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{Y} = 1$, $\alpha = \lambda_1 + \lambda_n$, $\beta = 0$. Les valeurs propres de M sont $\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4s^2})$, $\frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4s^2})$, $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. On choisit s pour que les deux autres valeurs propres soient λ_1 et λ_n. Leur somme est $\alpha = \lambda_1 + \lambda_n$ et leur produit $-s^2$. Il suffit de choisir s tel que $s^2 = -\lambda_1 \lambda_n$. C'est possible, car $\lambda_1 \lambda_n \leqslant 0$. $\triangleleft$

Le problème général de savoir si pour des réels $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ *donnés il existe* A *symétrique à coefficients positifs de valeurs propres* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *est très ardu et à notre connaissance non résolu. Il est évidemment nécessaire que* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{Tr} \mathrm{A} \geqslant 0$ *mais aussi, d'après le théorème de Perron-Frobenius, que* $\lambda_1 = \rho(\mathrm{A})$ *autrement dit que* $\lambda_1 \geqslant |\lambda_n|$ *(cette seconde condition est automatiquement vérifiée dans la question 3 de l'exercice ci-dessus). Ces seules conditions ne sont toutefois pas suffisantes : on doit aussi avoir* $\operatorname{Tr} \mathrm{A}^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \geqslant 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$. *Ainsi le 5-uplet* $(2, 1, 1, -2, -2)$ *qui vérifie les deux premières conditions ne saurait convenir. Mais cette hypothèse supplémentaire se révèle aussi insuffisante...*

Lorsque qu'on considère une base de vecteurs unitaires formant une famille obtusangle (voir l'exercice 1.3), il s'avère que la matrice de passage de cette base à son orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt est à coefficients positifs. C'est ce que l'on propose de démontrer dans l'exercice suivant.

2.23. Matrice de passage à coefficients positifs

1. Soit a un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. On suppose que les valeurs propres de $\mathrm{Id_E} - a$ sont strictement positives et que $\operatorname{Tr} a^p \geqslant 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que les valeurs propres de a sont dans $]-1, 1[$.

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont les coefficients sont positifs et telle que $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est définie positive. Montrer que les coefficients de $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}$ sont positifs.

3. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de vecteurs unitaires de E telle que, pour tout $i \neq j$, $\langle f_i, f_j \rangle < 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ son orthonormalisé de Gram-Schmidt et M la matrice de passage de $(f_1, \ldots, f_n)$ à $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que les coefficients de M sont positifs ou nuls.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Le spectre de $\mathrm{Id}_E - a$ est $\{1 - \lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}\, a\}$. Les valeurs propres sont réelles, car a est auto-adjoint. Puisqu'elles sont strictement positives, on a $\lambda < 1$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, a$. Notons $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de a et n_i l'ordre de multiplicité de λ_i. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lambda_1 \leqslant -1$. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr}\, a^p = \sum_{i=1}^{k} n_i \lambda_i^p = \lambda_1^p \left(n_1 + \sum_{i=2}^{p} n_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^p \right).$$

Si $\lambda_i \geqslant 0$, on a $\left| \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| \leqslant \lambda_i < 1$; cela reste vrai si $\lambda_i < 0$, car $0 > \lambda_i > \lambda_1$. Ainsi, pour tout $i \geqslant 2$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^p = 0$ et $\mathrm{Tr}\, a^p \underset{p \to +\infty}{\sim} n_1 \lambda_1^p$. Pour p assez grand et impair, on a $\mathrm{Tr}\, a^p < 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On conclut que $\lambda_1 > -1$ et que toutes les valeurs propres de a sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

2. Soit a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. Il est auto-adjoint car A est symétrique. Les valeurs propres de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - a$ sont strictement positives, car cet endomorphisme est défini positif. Enfin, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}\, a^p \geqslant 0$, car les coefficients de A, donc de A^p, sont positifs. D'après la question 1, les valeurs propres de a, et donc de A, sont dans $]-1, 1[$.

La matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est donc inversible. Déterminons son inverse. La matrice A est diagonalisable : il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PDP}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{A}^k = {}^t\mathrm{PD}^k\mathrm{P}$. Puisque les valeurs propres de A sont dans $]-1, 1[$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{D}^k = 0$ et donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}^k = 0$.

On peut écrire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \right) = \mathrm{I} - \mathrm{A}^p$ et donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} (\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^p).$$

En faisant p tendre vers $+\infty$, on en déduit que $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}^k$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, les coefficients de A^k sont positifs, ceux de $(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^{-1}$ le sont aussi.

3. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de vecteurs unitaires de E telle que, pour tout $i \neq j$, $\langle f_i, f_j \rangle < 0$. Notons $G = (\langle f_i, f_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de Gram de cette base. La matrice $A = I_n - G$ est symétrique et à coefficients positifs. De plus, $G = I_n - A$ est définie positive (voir exercice 1.26). On peut donc appliquer la question précédente et dire que G^{-1} est à coefficients positifs. Il s'agit maintenant de relier G^{-1} à la matrice de passage M entre la base $(f_1, \dots, f_n)$ et son orthonormalisée de Gram-Schmidt $(e_1, \dots, e_n)$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée et que M^{-1} contient les coordonnées des vecteurs $(f_1, \dots, f_n)$ dans cette base, on a $G = {}^tM^{-1}M^{-1}$. En passant à l'inverse on a donc $G^{-1} = M\,{}^tM$. Or, $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La dernière colonne du produit $M\,{}^tM$ contient donc la dernière colonne de M multipliée par m_{nn}. On en déduit que la dernière colonne de M *contient des coefficients positifs*. Pour conclure, il suffit de faire une récurrence sur le nombre n de vecteurs. ◁

Nous abordons maintenant le thème très riche des décompositions matricielles. Celle présentée dans l'exercice suivant, facilement équivalente à la décomposition polaire qui sera vue plus loin, est utilisée en analyse numérique pour la résolution des systèmes linéaires et l'inversion des matrices. Elle revient à démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement équivalente à une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs. Ces derniers sont appelés valeurs singulières de A : ce sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique positive ${}^tAA$.

2.24. Décomposition en valeurs singulières

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA$ est symétrique positive.

2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs tels que

$$A = U\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)V.$$

3. En déduire que A est somme d'au plus n matrices de rang 1.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Nous avons déjà rencontré plusieurs fois ce fait classique : la matrice ${}^tAA$ est symétrique et pour montrer qu'elle est positive, on constate que la forme quadratique q associée est positive. Si $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$q(X) = {}^t X({}^t AA)X = \|AX\|^2 \geqslant 0,$$

$\mathbb{R}^n$ étant muni de son produit scalaire canonique. Ainsi ${}^t AA$ est positive.

2. *Analyse.* S'il existe deux matrices orthogonales U et V telles que $A = U\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V$, alors

$$\begin{aligned} {}^t AA &= {}^t V\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,{}^t UU\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V \\ &= {}^t V\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)V. \end{aligned}$$

donc $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ sont nécessairement les valeurs propres de ${}^t AA$ ce qui détermine les réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de manière unique.

Synthèse. D'après la question 1 la matrice ${}^t AA$ est symétrique positive donc diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Si on note $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ ses valeurs propres avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positifs, il existe $V \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^t AA = {}^t V\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)V.$$

Posons alors $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a donc ${}^t AA = {}^t(DV)DV$; cela implique l'existence d'une matrice $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UDV$ comme cela a été montré dans l'exercice 1.28 de manière géométrique (les colonnes des deux matrices forment des familles isométriques). Donnons tout de même une rédaction matricielle de ce résultat important.

On cherche $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^t V = UD$. Posons $A\,{}^t V = B$ de coefficients $(b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. L'égalité ${}^t BB = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$ se traduit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, par

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \lambda_i^2 \delta_{i,j}.$$

En appelant $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de B, on a donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\langle C_i, C_j \rangle = \lambda_i^2 \delta_{i,j}.$$

Autrement dit, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthogonale et pour tout i, $\|C_i\|^2 = \lambda_i^2$. Soit $J = \{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. Posons $u_i = \dfrac{1}{\lambda_i} C_i$ pour $i \in J$. La famille $(u_i)_{i \in J}$ est orthonormale. On la complète en une base orthonormale $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. La matrice U dont les vecteurs colonnes sont $u_1, \ldots, u_n$ est orthogonale et on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = \lambda_i u_i$. En effet, si $i \in J$, c'est vrai par construction et si $i \notin J$, cela résulte de ce que $\lambda_i = 0$ et $C_i = 0$.

Matriciellement, cela se traduit par l'égalité $B = U\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ souhaitée.

3. La matrice A s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}\,\mathrm{Diag}(0,\ldots,0,\lambda_i,0,\ldots,0,\ldots)\mathrm{V}\\ &= \sum_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{U}\,\mathrm{Diag}(0,\ldots,0,\lambda_i,0,\ldots,0,\ldots)\mathrm{V},\end{aligned}$$

avec $\mathrm{rg}(\mathrm{U}\,\mathrm{Diag}(0,\ldots,0,\lambda_i,0,\ldots,0,\ldots)\mathrm{V}) = 1$, si $i \in \mathrm{J}$. La matrice A est somme d'au plus n matrices de rang 1. ◁

Notons que le résultat de la dernière question s'obtient de manière tout à fait élémentaire et reste vrai avec une matrice A *dans* $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ *pour un corps* K *quelconque : il suffit de considérer les matrices obtenues en gardant une colonne non nulle de* A *et dont les autres colonnes sont nulles. Il y en a au plus* n*, elles sont toutes de rang* 1 *et leur somme fait bien* A.

Par ailleurs, la décomposition en valeurs singulières de la deuxième question permet de donner une expression du pseudo-inverse de A *(voir exercice 1.12). En effet, si on note* $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ *et* $\widetilde{\mathrm{D}} = \mathrm{Diag}(\widetilde{\lambda_1},\ldots,\widetilde{\lambda_n})$ *où* $\widetilde{\lambda_i} = \dfrac{1}{\lambda_i}$ *si* λ_i *est non nul et* 0 *sinon, alors* $\mathrm{B} = \mathrm{V}\widetilde{\mathrm{D}}\mathrm{U}$ *est le pseudo-inverse de* A.

Nous verrons plus loin que la décomposition en valeurs singulières équivaut très facilement à la décomposition polaire. L'une ou l'autre de ces décompositions peut donc être utilisée pour résoudre l'exercice suivant.

2.25. Dilatation isométrique d'une contraction

Soit E un espace euclidien de dimension $2n$, F un sous-espace de E de dimension n, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ et p la projection orthogonale de E sur F. Montrer l'équivalence entre

(i) $\forall x \in \mathrm{F},\ \ \|u(x)\| \leqslant \|x\|$;

(ii) $\exists v \in \mathrm{O(E)},\ \ u = p \circ v_{|\mathrm{F}}$.

(École normale supérieure)

Solution.

• Une des implications est évidente. En effet, s'il existe $v \in \mathrm{O(E)}$ tel que $u = p \circ v_{|\mathrm{F}}$, on a, pour tout $x \in \mathrm{F}$,

$$\|u(x)\| = \|p \circ v(x)\| \leqslant \|v(x)\| = \|x\|,$$

car une projection orthogonale est de norme triple inférieure à 1.

• Supposons réciproquement que (i) est réalisé. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ quelconque de F. On complète $\mathcal{B}_0$ en une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. Un endomorphisme v de E vérifie (ii) si sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ est orthogonale et s'écrit par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où B, C et D appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, A étant une matrice donnée (de norme triple inférieure à 1), on cherche à la compléter par des matrices B, C, D de manière à ce que M soit orthogonale. En calculant ${}^t\mathrm{MM}$, on voit que ceci est réalisé si, et seulement si,

$$\begin{cases} {}^tAA + {}^tCC = I_n \\ {}^tBA + {}^tDC = I_n \\ {}^tBB + {}^tDD = 0_n. \end{cases}$$

La matrice ${}^tAA$ est symétrique positive, car pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tX\,{}^tAAX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. L'hypothèse se traduit par l'inégalité ${}^tX\,{}^tAAX = \|AX\|^2 \leqslant \|X\|^2$. En prenant pour X un vecteur propre de ${}^tAA$ de norme 1, on en déduit que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont inférieures à 1 (et positives). On les note $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, où les λ_i sont dans $[0,1]$. D'après l'exercice précédent, il existe des matrices orthogonales U et V telles que $A = U\Delta_A V$, où $\Delta_A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

On va chercher B, C et D sous la forme $U\Delta_B V$, $U\Delta_C V$, et $U\Delta_D V$ respectivement, avec Δ_B, Δ_C et Δ_D diagonales. On a alors

$$\begin{cases} {}^tAA + {}^tCC = {}^tV(\Delta_A^2 + \Delta_C^2)V, \\ {}^tBA + {}^tDC = {}^tV(\Delta_B\Delta_A + \Delta_D\Delta_C)V, \\ {}^tBB + {}^tDD = {}^tV(\Delta_B^2 + \Delta_D^2)V. \end{cases}$$

La matrice M a les propriétés voulues si, et seulement si,

$$\begin{cases} \Delta_A^2 + \Delta_C^2 = I_n \\ \Delta_B\Delta_A + \Delta_D\Delta_C = 0 \\ \Delta_B^2 + \Delta_D^2 = I_n \end{cases}$$

La première condition est réalisée si $\Delta_C = \mathrm{Diag}(\sqrt{1-\lambda_1^2}, \ldots, \sqrt{1-\lambda_n^2})$, ce qui est possible, car les λ_i appartiennent à $[0,1]$. On constate ensuite qu'en prenant $\Delta_B = \Delta_C$ et $\Delta_D = -\Delta_A$, on obtient une matrice M et donc un endomorphisme v de E ayant les propriétés voulues. ◁

Nous en venons maintenant à la décomposition polaire.

2.26. Décomposition polaire (1)

Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit u un endomorphisme quelconque de E. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal v et un endomorphisme auto-adjoint positif h tel que $u = vh$. Montrer que h est unique. Montrer que si u n'est pas inversible, v n'est pas unique.

2. Montrer que $u^*u = uu^* \iff vh = hv$.

3. Montrer que, pour tout $w \in \mathrm{O(E)}$, on a $|\operatorname{Tr}(wu)| \leqslant \operatorname{Tr} h$.

4. Montrer que l'application N de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{N}(u) = \operatorname{Tr} h$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Si $u = vh$, avec v orthogonal et h auto-adjoint positif, on a $u^* = h^*v^* = hv^{-1}$ et $u^*u = h^2$. L'endomorphisme u^*u est auto-adjoint et positif, car pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u^*u(x), x\rangle = \|u(x)\|^2 \geqslant 0$. Classiquement (voir exercice 2.12), il existe un unique endomorphisme auto-adjoint positif h tel que $h^2 = u^*u$.

Si u est inversible, h l'est aussi, et on a nécessairement $v = uh^{-1}$. On vérifie que cet endomorphisme est orthogonal : $v^* = h^{*-1}u^* = h^{-1}u^*$ et $v^*v = h^{-1}u^*uh^{-1} = h^{-1}h^2h^{-1} = \mathrm{Id_E}$. Dans ce cas, le couple (v, h) existe et est unique.

Supposons maintenant que u ne soit pas inversible. L'égalité $u^*u = h^2 = h^*h$ implique encore l'existence de $v \in \mathrm{O(E)}$ tel que $u = vh$ (c'est le résultat de l'exercice 1.28). Lors de l'oral on reproduirait par exemple la preuve déjà donnée dans la solution de l'exercice 2.24 : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u^*u, λ_i étant la valeur propre associée à e_i. On suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont différents de 0 (où $r \in [\![0, n-1]\!]$ est le rang de u^*u) et que $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle u^*u(e_i), e_j\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \lambda_i & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on pose $f_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} u(e_i)$; la famille $(f_1, \dots, f_r)$ est orthonormale. On la complète en une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ de E. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \sqrt{\lambda_i} f_i$, par définition si $i \leqslant r$ et parce que les deux termes sont nuls sinon. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v(e_i) = f_i$. L'endomorphisme v est orthogonal et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \sqrt{\lambda_i} v(e_i) = v(\sqrt{\lambda_i} e_i) = v(h(e_i))$. On a donc $u = vh$. On voit que dans ce cas v n'est pas unique, car on peut choisir arbitrairement la base $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ de $(\operatorname{Im} u)^\perp$.

2. Avec les notations de la question précédente, on a $u^*u = h^2$ et $uu^* = vh^2v^{-1}$. On en déduit que

$$u^*u = uu^* \iff vh^2 = h^2v.$$

Si v et h commutent, il est clair que v commute également avec h^2. Si réciproquement v commute avec h^2, alors v commute aussi avec h qui est un polynôme en h^2 (en vertu de l'exercice 2.12).

3. On a $\mathrm{Tr}(wu) = \mathrm{Tr}(wvh)$. Quand w décrit $\mathrm{O(E)}$, wv décrit aussi $\mathrm{O(E)}$. Il s'agit donc de prouver que $|\mathrm{Tr}(wh)| \leqslant \mathrm{Tr}(h)$ pour tout w de $\mathrm{O(E)}$. En gardant les notations précédentes, on a

$$\mathrm{Tr}(wh) = \sum_{i=1}^{n} \langle (wh)(e_i), e_i \rangle = \sqrt{\lambda_i} \langle w(e_i), e_i \rangle.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle w(e_i), e_i \rangle| \leqslant 1$, car w est orthogonal. On en déduit que $|\mathrm{Tr}(wh)| \leqslant \sum\limits_{i=1} \sqrt{\lambda_i} = \mathrm{Tr}(h)$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et l'endomorphisme h qui lui est associé comme à la question 1. Comme h est symétrique positif, on a $\mathrm{Tr}\, h \geqslant 0$ et $\mathrm{N}(u)$ appartient à $\mathbb{R}_+$. Si $\mathrm{N}(u) = 0$, les valeurs propres de h sont nulles donc $h = 0$ et comme u s'écrit $u = vh$ avec $v \in \mathrm{O(E)}$, on a $u = 0$.

La question précédente prouve que $\mathrm{N}(u) = \sup\limits_{w \in \mathrm{O(E)}} |\mathrm{Tr}(wu)|$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\alpha u) &= \sup_{w \in \mathrm{O(E)}} |\mathrm{Tr}(w(\alpha u))| = \sup_{w \in \mathrm{O(E)}} |\alpha| |\mathrm{Tr}(wu)| \\ &= |\alpha| \sup_{w \in \mathrm{O(E)}} |\mathrm{Tr}(wu)| = |\alpha| \mathrm{N}(u).\end{aligned}$$

Enfin, si $u, u' \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, pour tout $w \in \mathrm{O(E)}$, on a

$$\begin{aligned}|\mathrm{Tr}(w(u+u'))| = |\mathrm{Tr}(wu) + \mathrm{Tr}(wu')| &\leqslant |\mathrm{Tr}(wu)| + |\mathrm{Tr}(wu')| \\ &\leqslant \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(u').\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{N}(u+u') \leqslant \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(u')$. On conclut que N est bien une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. $\triangleleft$

La décomposition polaire est un résultat important qui est souvent posé à l'oral de manière matricielle. Voici un second énoncé, que nous rajoutons parce que la solution que nous donnons pour passer du cas inversible au cas général est différente.

2.27. Décomposition polaire (2)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose A inversible. Montrer qu'il existe un unique couple (O, S) telle que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.

2. On ne suppose plus que A est inversible. Vérifier que A s'écrit $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ avec O orthogonale et S symétrique positive.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Il ne s'agit là que de la traduction matricielle de la première question de l'exercice précédent. Supposons que (O, S) réponde au problème, on a ${}^t\mathrm{AA} = {}^t\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{OOS} = \mathrm{S}^2$ et S est donc l'unique racine symétrique définie positive de la matrice définie positive ${}^t\mathrm{AA}$ (voir exercices 2.14 et 2.12). L'unicité de O en découle. Pour l'existence, S désignant cette racine carrée, on pose $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$ et on vérifie qu'il s'agit d'une matrice orthogonale :

$$ {}^t\mathrm{OO} = {}^t\mathrm{S}^{-1}\,{}^t\mathrm{AAS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n. $$

Le couple (O, S) répond bien au problème.

2. Là encore, on peut adapter la première question de l'exercice précédent. On peut également utiliser un argument de densité : comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut considérer une suite $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A. On écrit chaque A_p sous la forme $\mathrm{A}_p = \mathrm{O}_p\mathrm{S}_p$ avec O_p orthogonale et S_p symétrique définie positive. De la suite $(\mathrm{O}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ contenue dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on peut extraire une sous-suite convergente vers une matrice $\mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Quitte à considérer cette extraction, on peut supposer que O_p converge vers O. Dans ces conditions, il en va de même $\mathrm{S}_p = \mathrm{O}_p^{-1}\mathrm{A}$ qui converge vers une matrice S. Bien évidemment, par passage à la limite, S est symétrique et $\mathrm{S} = \mathrm{O}^{-1}\mathrm{A}$. De plus, S est également positive, car pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$,

$$ 0 \leqslant {}^t\mathrm{XS}_p\mathrm{S} \xrightarrow[p\to\infty]{} {}^t\mathrm{XSX}, $$

et ${}^t\mathrm{XSX} \geqslant 0$. On obtient donc $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ avec O orthogonale et S symétrique positive. $\lhd$

La grande similitude qu'il y a entre les solutions des deux exercices qui précèdent et celle de l'exercice 2.24 n'est pas un hasard. Il est effectivement très simple de passer de la décomposition polaire à la décomposition en valeurs singulières et vice-versa. Expliquons-le matriciellement. Si $\mathrm{A} = \mathrm{UDV}$ *avec* U, V *orthogonales et* D *diagonale positive il suffit d'écrire* $\mathrm{A} = (\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}^{-1})({}^t\mathrm{VDV})$ *pour avoir une décomposition polaire. Réciproquement, si* $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ *avec* O *orthogonale et* S *symétrique positive, il suffit de dire que* S *est orthogonalement semblable à une matrice diagonale positive pour obtenir une décomposition* UDV.

Voici une jolie application géométrique de la décomposition polaire : il s'agit de déterminer les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *pour la triple norme associée à la norme euclidienne de* E. *On retiendra que de manière générale la décomposition polaire est très utile pour situer des matrices relativement au groupe orthogonal (voir par exemple le calcul de* $\max\limits_{\mathrm{P}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(\mathrm{PA})$ *dans la question 3 de l'exercice 2.26).*

2.28. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

> Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \|u\| \leqslant 1\}$. Montrer que les points extrémaux de B (*i.e.* les $u \in B$ tels que $B - \{u\}$ est convexe) sont exactement les éléments de O(E).
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

La norme triple de l'énoncé est bien entendu la norme subordonnée à la norme euclidienne de E qui sera notée $\|\ \|$. Un point A d'un convexe X est extrémal si $X - \{A\}$ est encore convexe, ce qui équivaut à dire que A ne peut pas s'écrire comme milieu de deux points distincts de X. Par exemple, les points extrémaux d'un carré plein de $\mathbb{R}^2$ sont ses sommets.

Il est possible d'avoir une petite intuition du résultat en regardant la dimension 1. Dans ce cas, E s'identifie à $\mathbb{R}$ de même que $\mathcal{L}(E)$ et B s'identifie au segment $[-1, 1]$. Ses points extrémaux sont 1 et -1 ce qui correspond bien à $O(E) = \{\pm \mathrm{Id}_E\}$. Traitons maintenant le cas général.

• Commençons par prouver qu'un élément $u \in O(E)$ est extrémal. Bien entendu $u \in B$ puisque $\|u\| = 1$. Supposons pour cela que $u = \dfrac{1}{2}(v + w)$ avec $(v, w) \in B^2$. Soit $x \in E$ unitaire. On a

$$\begin{aligned}\|x\| = 1 = \|u(x)\| = \frac{1}{2}\|v(x) + w(x)\| &\leqslant \frac{1}{2}\|v(x)\| + \frac{1}{2}\|w(x)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|v\| + \|w\|) \leqslant 1.\end{aligned}$$

La première inégalité provient de l'inégalité triangulaire, la seconde de la définition de la norme triple et la dernière résulte du fait que v et w sont dans B. Toutes ces inégalités sont en fait des égalités. On a donc $\|v\| = \|w\| = 1$, $\|v(x)\| = \|w(x)\| = 1$ et de plus les vecteurs $v(x)$ et $w(x)$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour une norme euclidienne). On a donc nécessairement $v(x) = w(x)$. Comme cela vaut pour tout vecteur unitaire x, on a par linéarité $v = w$. Donc u est bien un point extrémal de B.

• Inversement, soit $u \in B$ n'appartenant pas à O(E). On va montrer que u n'est pas extrémal. On va travailler matriciellement en considérant la matrice A de u dans une base orthonormée de E et utiliser la décomposition polaire de A (cf. exercice 2.26 et 2.27) : A s'écrit $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique positive. La matrice S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$, où l'on suppose $d_1 \leqslant \dots \leqslant d_n$: $S = {}^t\mathrm{PDP}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ (et $n = \dim E$). Comme $\|S\| = \|A\| \leqslant 1$, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $d_k \in [0, 1]$. Par hypothèse, A n'est pas orthogonale donc d_1 est striclement inférieur à 1. On peut alors écrire d_1 sous la forme $d_1 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ avec $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ (car d_1 n'est pas un point extrémal du segment $[-1, 1]$). Posons $\mathrm{D}' = \mathrm{Diag}(\alpha, d_2, \ldots, d_n)$ et $\mathrm{D}'' = \mathrm{Diag}(\beta, d_2, \ldots, d_n)$. On a $\frac{1}{2}(\mathrm{D}' + \mathrm{D}'') = \mathrm{D}$ avec $\mathrm{D}' \neq \mathrm{D}''$ et donc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}'\mathrm{P} + \mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}''\mathrm{P}).$$

Les matrices $\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}'\mathrm{P}$ et $\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}''\mathrm{P}$ sont de norme 1. En effet, pour tout vecteur X de norme 1, on a

$$\|\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}'\mathrm{PX}\|^2 = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{PD}'\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{OO}\,{}^t\mathrm{PD}'\mathrm{PX} = {}^t(\mathrm{PX})\mathrm{D}'^2(\mathrm{PX}) \leqslant 1,$$

car $\|\mathrm{PX}\| = 1$ et les coefficients diagonaux de D'^2 sont compris entre 0 et 1. On a donc $\|\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}'\mathrm{P}\| \leqslant 1$. Il en est de même de $\mathrm{O}\,{}^t\mathrm{PD}''\mathrm{P}$. En repassant aux endomorphismes, u peut donc s'écrire comme milieu de deux éléments distincts de B : ce n'est pas un point extrémal. $\lhd$

2.29. Décomposition de Choleski. Décomposition QR

1. *Décomposition de Choleski.* Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique définie positive. Démontrer l'existence d'une unique matrice P de taille n, triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PP}$.

2. *Décomposition QR.* Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec Q orthogonale de taille n et $\mathrm{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $\mathrm{A} = \mathrm{QR}$.

(**École normale supérieure**)

$\rhd$ **Solution.**

1. Considérons $\varphi : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in (\mathbb{R}^n)^2 \longmapsto {}^t\mathrm{XAY}$. Il s'agit là d'un produit scalaire. Il est possible d'orthonormaliser au sens de Gram-Schmidt la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ pour φ. Si l'on note $\mathrm{P} = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage des ε_i aux e_i, comme I_n est la matrice de φ dans la base des ε_i, on a $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PI}_n\mathrm{P} = {}^t\mathrm{PP}$. La matrice P est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs : en effet, ce sont les produits scalaires $\varphi(e_i, \varepsilon_i)$ et ils sont strictement positifs d'après les règles de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Si Q est une autre matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs vérifiant $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{QQ} = {}^t\mathrm{PP}$, la matrice

$D = {}^t P^{-1} {}^t Q = PQ^{-1}$ est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Elle est donc diagonale et ${}^t D = QP^{-1} = D^{-1}$, ce qui signifie qu'elle est orthogonale. Comme elle est à coefficients strictement positifs. $D = I_n$ et $P = Q$. L'unicité est prouvée.

On peut aussi justifier l'unicité de la manière suivante : si $A = {}^t QQ$, *avec* Q *triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.* Q *peut être vue comme la matrice de passage d'une base* $\mathcal{C}$ *à la base canonique. Comme* $I_n = {}^t Q^{-1} A Q^{-1}$, *la base* $\mathcal{C}$ *est orthonormée pour* φ. *Le fait que* Q *soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs entraîne que* $\mathcal{C}$ *est l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt de la base canonique. Donc* $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *et* $P = Q$.

2. Si le couple (Q, R) convient, ${}^t AA = {}^t R \, {}^t QQR = {}^t RR$. La première question nous garantit l'unicité de R et donc celle de Q.

Passons à l'existence : la matrice ${}^t AA$ est définie positive (voir par exemple l'exercice 2.14). D'après la première question, elle s'écrit ${}^t AA = {}^t RR$ avec R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. On pose $Q = AR^{-1}$. Calculons ${}^t QQ$:

$${}^t QQ = {}^t R^{-1} \, {}^t AAR^{-1} = {}^t R^{-1} \, {}^t RRR^{-1} = I_n.$$

La matrice Q est bien orthogonale et l'existence du couple (Q, R) est prouvée. ◁

Cette décomposition avait déjà fait l'objet de l'exercice 1.21. On avait alors interprété le produit QR *comme un produit de matrices de passage faisant intervenir l'orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt des colonnes de* A. *Cela fournit d'ailleurs un algorithme de calcul effectif de* Q *et* R. *Notons qu'une autre méthode due à Householder permet aussi, par multiplications successives par des matrices de réflexions, de déterminer le couple* QR. *Signalons que si on écrit* $R = DT$ *avec* D *diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs (ceux de* R*) et* T *matrice triangulaire supérieure avec des* 1 *sur la diagonale, on obtient la décomposition d'Iwasawa* $A = QDT$. *Notons enfin qu'on peut poser l'exercice à l'envers et déduire la décomposition de Choleski à partir de la décomposition QR. Si* A *est symétrique définie positive on sait qu'elle s'écrit* $A = B^2$ *avec* B *symétrique définie positive (voir l'exercice 2.12). On écrit alors* $B = QR$ *et il vient* $A = B^2 = {}^t BB = {}^t RR$.

Ces décompositions vont assurer la transition avec le vaste sujet suivant qui porte sur les inégalités autour du déterminant et des valeurs propres de matrices réelles. En l'occurrence, l'inégalité d'Hadamard donne une majoration du déterminant d'une matrice symétrique réelle à l'aide de ses coefficients diagonaux.

2.30. Inégalité d'Hadamard

1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique positive. Démontrer que

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2. Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme auto-adjoint de E défini positif. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et $\mathcal{A}$ l'ensemble des bases orthonormales de E. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \inf_{(e_1,\ldots,e_n)\in\mathcal{A}} \prod_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Si on note $\varphi : (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \longmapsto {}^tXAY$ la forme bilinéaire symétrique associée à A et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $a_{ii} = \varphi(e_i, e_i) \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ puisque A est supposée positive. Si A n'est pas définie positive, on a donc $0 = \det A \leqslant a_{11} \cdots a_{nn}$. Supposons désormais A définie positive. Nous allons proposer trois argumentations.

Première méthode (à partir de la décomposition de Choleski) : on écrit comme dans l'exercice précédent $A = {}^tPP$ avec $P = (p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs. En passant au déterminant, il vient $\det A = \det {}^tP \det P = (\det P)^2 = \prod\limits_{i=1}^{n} p_{ii}^2$ puisque P est triangulaire. Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ki}^2 \geqslant p_{ii}^2$ et finalement

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} p_{ii}^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Deuxième méthode (à partir de la diagonalisation de A) : il existe des matrices $O = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ orthogonale et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $A = OD\,{}^tO$. On en déduit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^2\lambda_j$. Comme $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^2 = 1$, puisque O est orthogonale, on obtient, par concavité de la fonction ln, $\ln a_{ii} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \ln \lambda_j$, puis

$$\ln \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij}^2 \ln \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \ln \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2 \right) = \sum_{j=1}^{n} \ln \lambda_j,$$

car O est orthogonale. On a donc

$$\ln \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geqslant \ln \det \mathrm{A},$$

d'où l'inégalité recherchée.

Troisième méthode (à partir de la décomposition QR*)* : c'est la preuve qui a été présentée dans l'exercice 1.21. Soit B l'unique matrice symétrique définie positive telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2 = {}^t\mathrm{BB}$. Si $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ sont les colonnes de B on a d'après l'exercice mentionné $\det \mathrm{B} \leqslant \|\mathrm{C}_1\| \ldots \|\mathrm{C}_n\|$. Or

$$\det \mathrm{A} = (\det \mathrm{B})^2 \leqslant \|\mathrm{C}_1\|^2 \ldots \|\mathrm{C}_n\|^2 = a_{11} \ldots a_{nn}.$$

2. Les valeurs propres de f sont réelles positives et f est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$, chaque ε_i étant vecteur propre relatif à la valeur propre λ_i. Le produit des λ_i est le déterminant de f.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale quelconque de E et $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de f dans cette base. On a $\prod_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale et d'après la question précédente,

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det f = \det \mathrm{A} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle.$$

On en déduit $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \inf_{(e_1, \ldots, e_n) \in \mathcal{A}} \prod_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle$ et en considérant la base $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{A}$, on conclut qu'il y a en fait égalité. ◁

Le résultat suivant se déduit aisément de l'inégalité d'Hadamard.

2.31. Inégalité de Fischer

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B} \\ {}^t\mathrm{B} & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}$ une matrice réelle symétrique positive écrite en blocs, les blocs A_1 et A_2 étant carrés.

Montrer que $\det \mathrm{A} \leqslant \det \mathrm{A}_1 \det \mathrm{A}_2$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On note p et q les tailles respectives des matrices A_1 et A_2. Nous allons donner deux solutions.

• Puisque A_1 et A_2 sont symétriques réelles, il existe des matrices $P \in O_p(\mathbb{R})$ et $Q \in O_q(\mathbb{R})$ et des matrices diagonales D_1 et D_2 telles que $D_1 = {}^t PD_1P$ et $D_2 = {}^t QD_2Q$. On pose $S = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. On remarque que $S \in O_n(\mathbb{R})$ et on note $A' = {}^t SAS$. On obtient

$$A' = \begin{pmatrix} {}^t PA_1 & {}^t PB \\ {}^t Q\,{}^t B & {}^t QA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t PA_1P & {}^t PBQ \\ {}^t Q\,{}^t BP & {}^t QA_2Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & B' \\ {}^t B' & D_2 \end{pmatrix},$$

où $B' = {}^t PBQ$. La matrice $A' = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est encore symétrique positive et l'on a

$$\det A = \det A', \quad \det A_1 \det A_2 = \det D_1 \det D_2 = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Cela revient donc à démontrer que $\det A' \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ pour une matrice A' symétrique positive, ce qui est fait dans l'exercice 2.30.

• Voici une seconde solution qui n'utilise pas l'inégalité d'Hadamard, mais la décomposition de Choleski. On peut se restreindre au cas où A est définie positive, car sinon $\det A = 0$ et $\det A_1 \det A_2 \geqslant 0$, puisque A_1 et A_2 sont aussi positives. On peut alors écrire $A = {}^t PP$ avec P triangulaire supérieure (cf. exercice 2.29). Posons $P = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$ où les blocs ont la même taille que dans A. On a alors $A_1 = {}^t UU$ et $A_2 = {}^t VV + {}^t WW$. Comme $\det A = (\det P)^2 = (\det U)^2 (\det W)^2$ et que $\det A_1 = (\det U)^2$ le problème se ramène à montrer que

$$(\det W)^2 = \det({}^t WW) \leqslant \det A_2 = \det({}^t WW + {}^t VV).$$

Cela découle de l'inégalité classique suivante : si M, N sont symétriques positives, $\det(M + N) \geqslant \det M + \det N \geqslant \det M$. Le lecteur en trouvera la preuve dans l'exercice 3.29 du chapitre 3. ◁

Le résultat se généralise sans mal avec plus de blocs.

On trouvera encore dans l'exercice suivant une application de l'inégalité d'Hadamard.

2.32. Recherche d'un minimum

Soit A une matrice symétrique définie positive et α un réel strictement positif. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de déterminant supérieur ou égal à α.

Montrer que $\inf_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{Tr}(AS) = n(\alpha \det A)^{1/n}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Il existe $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale à termes diagonaux strictement positifs, et P orthogonale telles que $A = PD\,{}^tP$. On en déduit que si $S \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(PD\,{}^tPS) = \mathrm{Tr}(D\,{}^tPSP)$. La matrice $S' = {}^tPSP = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique définie positive, $\det S' = \det S$ et

$$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(DS') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.$$

Par concavité du logarithme on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AS)\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i s_{ii}) \geqslant \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{n}\ln\left(\det A \prod_{i=1}^{n} s_{ii}\right).$$

Il a été démontré dans l'exercice 2.30 que si S' est symétrique définie positive, on a $\prod_{i=1}^{n} s_{ii} \geqslant \det S'$. On en déduit

$$\ln\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AS)\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(\det A \det S') \geqslant \frac{1}{n}\ln(\alpha \det A)$$

et donc

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AS) \geqslant (\alpha \det A)^{1/n}.$$

On obtient finalement $\mathrm{Tr}(AS) \geqslant n\,(\alpha \det A)^{1/n}$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Montrons qu'on peut choisir S pour qu'il y ait égalité, ce qui terminera la démonstration. On choisit S telle que S' soit diagonale avec $s_{ii} = \dfrac{\lambda}{\lambda_i}$ $(\lambda > 0)$. On a alors $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(DS') = n\lambda$. On choisit λ pour que $\det S = \det S' = \alpha$. Il faut $\dfrac{\lambda^n}{\det A} = \alpha$ soit $\lambda = (\alpha \det A)^{1/n}$. La matrice $S = {}^tPS'P$ appartient alors à $\mathcal{S}$ et $\mathrm{Tr}(AS) = n(\alpha \det A)^{1/n}$. ◁

On peut en déduire l'inégalité de Minkowski suivante : si A, B *sont symétriques définies positives alors*

$$(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leqslant (\det(A+B))^{1/n}.$$

En effet, prenons $\alpha = 1$ *pour simplifier. Pour* $S \in \mathcal{S}$ *on a*

$$(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\Big(\operatorname{Tr}(AS) + \operatorname{Tr}(BS)\Big) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(A+B)S$$

et il suffit de passer à la borne inférieure pour conclure. Une autre démonstration de cette inégalité est donnée dans l'exercice 3.32.

2.33. Image de S^2 par une fonction, où S est la boule unité

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Pour X et Y dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\varphi(X,Y) = ({}^t XAX)({}^t YAY) - ({}^t XAY)^2.$$

Déterminer l'image par φ de $B = \{(X,Y),\ \|X\| \leqslant 1,\ \|Y\| \leqslant 1\}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

On note S la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. On remarque que si $n = 1$, φ est la fonction nulle et $\varphi(B) = \{0\}$. Nous écartons ce cas pour la suite. Puisque φ est continue et que $B = S^2$ est connexe, l'image de B par φ est connexe. C'est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. La forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ par $(X,Y) = {}^t XAY$ est un produit scalaire et on a $\varphi(X,Y) = (X,X)(Y,Y) - (X,Y)^2 \geqslant 0$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la valeur 0 étant obtenue pour $X = 0$. On a donc la borne inférieure de l'intervalle image.

On note $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A. On se place dans une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique) de vecteurs propres, disons $(e_1, \ldots, e_n)$ avec $Ae_i = \lambda_i e_i$. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de X et Y dans cette base. On obtient

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i\right)^2 \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i\lambda_j (x_i^2 y_j^2 - x_i x_j y_i y_j)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Puisque les valeurs propres de A sont positives et rangées par ordre décroissant, on a $\varphi(X, Y) \leqslant \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$ et en reprenant le calcul précédent dans l'autre sens avec $A = I_n$, on obtient

$$\sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2 - ({}^t XY)^2 \leqslant 1,$$

avec égalité si X et Y sont orthogonaux et de norme 1. Ainsi, on a la majoration

$$\varphi(X, Y) \leqslant \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \leqslant \lambda_1 \lambda_2.$$

Comme $\varphi(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2$, on conclut que $\boxed{\varphi(B) = [0, \lambda_1 \lambda_2]}$. ◁

On peut considérer $f(X) = \varphi(X, X) = \|AX\|^2 - ({}^t XAX)^2$ et étudier les bornes d'une telle fonction sur $\mathbb{R}^n$. C'est ce que propose l'exercice suivant à ceci près que l'on considère un endomorphisme symétrique plutôt qu'une matrice.

2.34. Majoration et minoration d'une fonction

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme auto-adjoint. Pour $x \in E$, on pose

$$f(x) = \|u(x)\|^2 - (u(x), x)^2.$$

1. La fonction f est-elle minorée ?

2. À quelle condition est-elle majorée ? Calculer alors $\sup_E f$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. L'endomorphisme u est diagonalisable dans une base orthonormale. On note $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres, e_i étant associé à la valeur propre λ_i.

Étudions l'image par f d'un vecteur propre de u. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(te_i) = \lambda_i^2 (t^2 - t^4)$. Si $\lambda_i \neq 0$, $f(te_i)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers

$+\infty$ et f n'est pas minorée. La fonction f n'est minorée que si tous les λ_i sont nuls, *i.e.* si $u = 0$. On a alors $f = 0$.

2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \right)^2 .$$

S'il existe i et j tels que $\lambda_i \lambda_j < 0$, on considère x tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$. On prend $x = \dfrac{t}{\sqrt{|\lambda_i|}} e_i + \dfrac{t}{\sqrt{|\lambda_j|}} e_j$ $(t \in \mathbb{R})$. On obtient $f(x) = t^2(|\lambda_i| + |\lambda_j|)$, qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Ainsi f n'est pas majorée.

On suppose désormais que tous les λ_i ont le même signe. Quitte à changer u en $-u$, on peut supposer qu'ils sont positifs. En isolant les termes contenant λ_1, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\lambda_1 - \lambda_i) x_i^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \right)^2 \\ &= \frac{\lambda_1^2}{4} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\lambda_1 - \lambda_i) x_i^2 - \left(\frac{\lambda_1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \right)^2 \leqslant \frac{\lambda_1^2}{4}, \end{aligned}$$

car pour tout i, $\lambda_1 - \lambda_i \geqslant 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$. Puisque $f\left(\dfrac{e_1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\lambda_1^2}{4}$, la borne supérieure cherchée est $\dfrac{\lambda_1^2}{4}$. Si les valeurs propres de u sont toutes de même signe, on obtient donc

$$\boxed{\sup_{\mathrm{E}} f = \frac{1}{4} \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \lambda^2}. \quad \triangleleft$$

2.35. Inégalité de Kantorovich

Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On note λ_{min} (resp. λ_{max}) la plus petite (resp. grande) valeur propre de A. Montrer que si $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$,

$$({}^t\mathrm{XX})^2 \leqslant ({}^t\mathrm{XAX})({}^t\mathrm{XA}^{-1}\mathrm{X}) \leqslant \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} \right)^2 ({}^t\mathrm{XX})^2.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres distinctes ou confondues de A. Cela revient à démontrer que pour $X \in \mathbb{R}^n$ de norme 1,

$$1 \leqslant ({}^t XAX)({}^t XA^{-1}X) \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2.$$

Compte-tenu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire, on notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de X dans une base orthonormale de vecteurs propres

$$\begin{aligned}({}^t XAX)({}^t XA^{-1}X) &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} x_i^2\right)\\ &\geqslant \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}} x_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

Passons à la majoration. Comme $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ pour $a, b \geqslant 0$, on a, de manière astucieuse,

$$\begin{aligned}\sqrt{({}^t XAX)({}^t XA^{-1}X)} &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_n}{\lambda_i} x_i^2\right)}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}\left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_n}{\lambda_i} x_i^2\right)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} + \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right) x_i^2\right)\end{aligned}$$

L'étude rapide de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_n}{x}$ sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$ montre que cette fonction est décroissante sur $[\lambda_1, \sqrt{\lambda_1 \lambda_n}]$ et croissante sur $[\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}, \lambda_n]$. Elle admet donc un maximum en λ_1 ou en λ_n. Comme $f(\lambda_1) = f(\lambda_n) = 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$, on peut majorer ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{({}^t XAX)({}^t XA^{-1}X)} &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}\left(\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) x_i^2\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)\sum_{i=1}^n x_i^2\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right).\end{aligned}$$

En élevant au carré, on obtient l'inégalité souhaitée. ◁

2.36. Inégalité de convexité

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique définie positive de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que pour $p > 0$ on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}^p\right)^{1/p}$$

lorsque $p \geqslant 1$ et

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk}^p\right)^{1/p}$$

lorsque $p \leqslant 1$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons que pour $p \geqslant 1$, la fonction $t \longmapsto t^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$. Par hypothèse, on peut écrire $A = PD\,{}^tP$ où $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O(n)$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{kk} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j p_{kj}^2$. Comme les p_{kj}^2 sont positifs ou nuls de somme égale à 1, la convexité de $t \longmapsto t^p$ nous assure que si $p \geqslant 1$,

$$a_{kk}^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p p_{kj}^2.$$

En sommant de $k = 1$ à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p p_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p \sum_{k=1}^{n} p_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p.$$

En passant à la puissance $\dfrac{1}{p}$, on obtient la première inégalité. La seconde s'établit de même en observant que pour $p \leqslant 1$, $t \longmapsto t^p$ est concave. ◁

Nous avons déjà observé que si u est un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E alors la plus grande (resp. petite) valeur propre de u est égale à $\max\limits_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$ (resp. $\min\limits_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$. Le principe du minimax de Courant-Fischer-Weyl, que dans la suite nous baptiserons plus simplement théorème du minimax, donne une expression variationnelle pour les autres valeurs propres de u. Plus précisément, si on numérote *dans l'ordre croissant les valeurs propres distinctes ou confondues de u, la p-ième valeur propre n'est autre que le minimum pris sur tous les sous-espaces* F *de dimension p du maximum du produit scalaire $\langle u(x), x\rangle$ sur la sphère unité de* F. *Nous verrons ensuite plusieurs inégalités qui sont des conséquences directes de ce résultat et qui, à l'oral, peuvent être proposées à la suite de l'exercice suivant ou posées directement.*

2.37. Théorème du minimax

Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme auto-adjoint de E, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de vecteurs propres de f, e_i étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

1. Pour tout $h \in [\![1,n]\!]$, on pose $\mathrm{E}_h = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_h)$ et $\mathrm{F}_h = \mathrm{Vect}(e_h, \dots, e_n)$ et on note f_1 et f_2 les endomorphismes de E_h et F_h respectivement, induits par f. Caractériser λ_h connaissant f_1 et f_2.

2. *Théorème du minimax.* Soit $\mathcal{A}_h$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension h. Démontrer que

$$\lambda_h = \min_{\mathrm{F}\in\mathcal{A}_h}\left[\max_{\substack{x\in\mathrm{F}\\ \|x\|=1}}\langle f(x), x\rangle\right] = \max_{\mathrm{F}\in\mathcal{A}_{n-h+1}}\left[\min_{\substack{x\in\mathrm{F}\\ \|x\|=1}}\langle f(x), x\rangle\right].$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Remarquons que pour tout sous-espace F de E, les bornes de la fonction continue $x \longmapsto \langle f(x), x\rangle$ définie sur la sphère unité de F sont atteintes, puisque cette sphère est compacte car F est de dimension finie. Les quantités $\max\limits_{\substack{x\in\mathrm{F}\\ \|x\|=1}}\langle f(x), x\rangle$ et $\min\limits_{\substack{x\in\mathrm{F}\\ \|x\|=1}}\langle f(x), x\rangle$ sont donc bien définies.

1. Si $x \in \mathrm{E}_h$ s'écrit $x = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i e_i$, avec $(x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{R}^h$, alors on a

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{h} x_i\lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \langle f_1(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{h} x_i^2\lambda_i \leqslant \lambda_h \sum_{i=1}^{h} x_i^2 \leqslant \lambda_h\|x\|^2.$$

Si $\|x\| = 1$, alors $\langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_h$. Comme de plus, $\langle f_1(e_h), e_h\rangle = \lambda_h$, on obtient $\lambda_h = \max\limits_{\substack{x\in\mathrm{E}_h\\ \|x\|=1}}\langle f_1(x), x\rangle$.

De même, pour $x \in \mathrm{F}_h$, $x = \sum\limits_{i=h}^{n} x_i e_i$, avec $(x_h, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-h+1}$, on a $\langle f_2(x).x\rangle = \sum_{i=h}^{n} x_i^2\lambda_i \geqslant \lambda_h \sum_{i=h}^{n} x_i^2 \geqslant \lambda_h$ si $\|x\| = 1$. Sachant que, de plus $\langle f_2(e_h), e_h\rangle = \lambda_h$, on conclut que $\lambda_h = \min\limits_{\substack{x\in F_h\\ \|x\|=1}} \langle f_2(x), x\rangle$.

2. Pour $F \in \mathcal{A}_h$. F et F_h ne peuvent être en somme directe puisque $\dim F + \dim F_h > n$. Ainsi, on a $F\cap F_h \neq \emptyset$. Si x est un élément de $F\cap F_h$ de norme 1, on a d'après la question 1, $\langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_h$. On en déduit que $\max\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \geqslant \lambda_h$ et cela étant vrai pour tout $F \in \mathcal{A}_h$,

$$\inf_{F\subset \mathcal{A}_h} \left[\max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right] \geqslant \lambda_h.$$

Sachant que, de plus, $\max\limits_{\substack{x\in E_h\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle = \lambda_h$, on obtient

$$\min_{F\in \mathcal{A}_h} \left[\max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right] = \lambda_h.$$

De même, pour $F \in \mathcal{A}_{n-h+1}$, on montre que $\dim(F \cap E_h) \geqslant 1$; si x est un élément de $F \cap E_h$ de norme 1, alors $\langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_h$ et donc $\min\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_h$. Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathcal{A}_{n-h+1}$, on en déduit $\sup\limits_{F\in \mathcal{A}_{n-h+1}} \left[\min\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right] \leqslant \lambda_h$. Sachant que $\min\limits_{\substack{x\in F_h\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle = \lambda_h$, on obtient $\max\limits_{F\in \mathcal{A}_{n-h+1}} \left[\min\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right] = \lambda_h$. ◁

Parmi les questions proposées à l'oral à la suite de ce résultat en voici une qui est immédiate : si a et b sont deux endomorphismes auto-adjoints de spectre $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ pour a (resp. $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ pour b) et si pour tout $x \in E$, $\langle a(x), x\rangle \leqslant \langle b(x), x\rangle$ alors $\lambda_k \leqslant \mu_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

L'application donnée par l'exercice suivant est plus intéressante.

2.38. Théorème d'entrelacement de Cauchy

Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme auto-adjoint de E, G un hyperplan de E, p la projection orthogonale sur G et g l'endomorphisme induit sur G par $p \circ f$.

1. Montrer que g est auto-adjoint.

2. Soit $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_{n-1}$ les valeurs propres de g. Montrer que

$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

(École polytechnique, École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On a, pour $(x, y) \in \mathrm{G}^2$,

$$\langle g(x), y\rangle = \langle p \circ f(x), y\rangle = \langle f(x), p(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle,$$

puisque p est auto-adjoint (c'est un projecteur orthogonal), et de même $\langle x, g(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Sachant que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ puisque f est auto-adjoint, on en déduit que $\langle g(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$: g est donc auto-adjoint.

2. Pour $1 \leqslant h \leqslant n-1$, notons $\mathcal{A}_h$ (resp. $\mathcal{A}'_h$) l'ensemble des sous-espaces de E (resp. de G) de dimension h. Pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{A}'_h$, on a

$$\max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle g(x), x\rangle = \max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle.$$

En appliquant le théorème du minimax à l'endomorphisme auto-adjoint g de G, on obtient, pour $1 \leqslant h \leqslant n-1$,

$$\lambda'_h = \min_{\mathrm{F} \in \mathcal{A}'_h} \left[\max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle g(x), x\rangle\right] = \min_{\mathrm{F} \in \mathcal{A}'_h} \left[\max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right].$$

De l'inclusion $\mathcal{A}'_h \subset \mathcal{A}_h$, on déduit

$$\min_{\mathrm{F} \in \mathcal{A}'_h} \left[\max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right] \geqslant \min_{\mathrm{F} \in \mathcal{A}_h} \left[\max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right],$$

c'est-à-dire $\lambda'_h \geqslant \lambda_h$.

On obtient de même,

$$\lambda'_h = \max_{\mathrm{F} \in \mathcal{A}'_{n-h}} \left[\min_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle\right]$$

et, puisque $\mathcal{A}'_{n-h} \subset \mathcal{A}_{n-h}$,

$$\max_{F \in \mathcal{A}'_{n-h}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle \right] \leqslant \max_{F \in \mathcal{A}_{n-h}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle \right],$$

c'est-à-dire $\lambda'_h \leqslant \lambda_{h+1}$. On a finalement, pour $1 \leqslant h \leqslant n-1$,

$$\lambda_h \leqslant \lambda'_h \leqslant \lambda_{h+1} \quad \triangleleft.$$

Cet exercice est souvent posé de manière matricielle : si A *est une matrice symétrique réelle de taille* n *et si* B *est la sous-matrice de* A *obtenue en ôtant la ligne et la colonne d'indice* k *fixé, alors on a*

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

où $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* A *et* $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1}$ *sont celles de* B. *Il s'agit évidemment du résultat de l'exercice appliqué à l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^n$ *canoniquement associé à* A *et en prenant pour* G *l'hyperplan* $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \neq k}$ *où* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

On peut en déduire une preuve très courte du théorème de Sylvester (voir exercices 2.18 et 3.15) qui caractérise les matrices symétriques définies positives par la stricte positivité de tous les mineurs principaux. Le sens direct est aisé et on prouve la réciproque par récurrence sur n *le cas* $n = 1$ *étant immédiat. Soit donc* A *symétrique de taille* n *dont les mineurs principaux sont strictement positifs. Soit* B *extraite de* A *en ôtant la dernière ligne et la dernière colonne : l'hypothèse de récurrence s'applique à* B *qui est donc définie positive. Or les valeurs propres* $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ *de* A *vérifient*

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n$$

les μ_i *étant les valeurs propres de* B *qui sont donc strictement positives. On en déduit que* $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sont strictement positifs. Mais comme le déterminant de* A *est strictement positif il en est forcément de même de la dernière valeur propre* λ_1 *et cela termine la récurrence :* A *est définie positive.*

Formulé matriciellement, l'exercice suivant apparaît comme une réciproque de l'exercice 2.38.

2.39. Une réciproque au théorème d'entrelacement de Cauchy

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ des réels tels que

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 \ldots < \lambda_{n-1} < \mu_{n-1} < \lambda_n.$$

Prouver l'existence d'une matrice symétrique d'ordre n de bloc supérieur gauche $\mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ et de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que la matrice cherchée M s'écrive

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \mu_2 & & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \mu_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

On calcule $\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$. En multipliant par $\dfrac{a_i}{\mathrm{X} - \mu_i}$ la i-ième ligne de la matrice et en l'ajoutant à la dernière, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtient une matrice triangulaire d'où l'on déduit

$$\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}) = (\mathrm{X} - \mu_1) \cdots (\mathrm{X} - \mu_{n-1}) \left(\mathrm{X} - a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{\mathrm{X} - \mu_i} \right).$$

On veut que la fraction rationnelle $\mathrm{F} = \mathrm{X} - a_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{a_i^2}{\mathrm{X} - \mu_i}$ s'annule en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Comme F est une fraction rationnelle de degré 1 et de coefficient dominant 1, on voit que cela est réalisé si, et seulement si, $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, où $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i)$ et $\mathrm{Q} = \prod\limits_{i=1}^{n-1} (\mathrm{X} - \mu_i)$.

Décomposons $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ en éléments simples. La partie entière est du premier degré avec un coefficient dominant 1. Il existe donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \mathrm{X} + \alpha_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{\alpha_i}{\mathrm{X} - \mu_i}$. Il faut choisir $a_1, \ldots, a_n$ tel que $a_n = -\alpha_n$ et $a_i^2 = -\alpha_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. On a, pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\alpha_j = \frac{\mathrm{P}(\mu_j)}{\mathrm{Q}'(\mu_j)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (\mu_j - \lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ i \neq j}} (\mu_j - \mu_i)}.$$

Étant données les conditions sur $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$, on a $\alpha_j < 0$, car le numérateur de cette fraction a le signe de $(-1)^{n-j}$ (en effet, $\mu_j - \lambda_i < 0$ si $j+1 \leqslant i \leqslant n$) et son dénominateur a le signe de $(-1)^{n-1-j}$ ($\mu_j - \mu_i < 0$ si $j+1 \leqslant i \leqslant n-1$). En prenant $a_n = -\alpha_n$ et $a_j = \sqrt{-\alpha_j}$, on obtient une matrice M dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. ◁

Le lecteur pourra généraliser le résultat au cas où les inégalités sont larges.

Voici une autre application importante du théorème du minimax.

2.40. Théorème de perturbation de Weyl

Soit A, B deux matrices symétriques réelles de taille n de spectres respectifs $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ et $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$. Démontrer que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$|\lambda_p - \mu_p| \leqslant |\!|\!| \mathrm{A} - \mathrm{B} |\!|\!|,$$

la triple norme étant associée à la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On considère une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ (resp. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$) de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres pour A (resp. pour B). Fixons $p \in [\![1, n]\!]$ et supposons par exemple $\lambda_p \geqslant \mu_p$. Si on note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_n)$, on a (voir la première question de l'exercice 2.37)

$$\lambda_p = \min_{\substack{x \in \mathrm{G} \\ \|x\|=1}} \langle \mathrm{A}x, x \rangle \quad \text{et} \quad \mu_p = \max_{\substack{x \in \mathrm{F} \\ \|x\|=1}} \langle \mathrm{B}x, x \rangle.$$

Comme $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} > n$, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. En prenant x_0 de norme 1 dans cette intersection, il vient

$$|\lambda_p - \mu_p| = \lambda_p - \mu_p \leqslant \langle \mathrm{A}x_0, x_0 \rangle - \langle \mathrm{B}x_0, x_0 \rangle = \langle (\mathrm{A} - \mathrm{B})x_0, x_0 \rangle,$$

et donc $|\lambda_p - \mu_p| \leqslant \|(\mathrm{A} - \mathrm{B})x_0\| . \|x_0\| \leqslant |\!|\!| \mathrm{A} - \mathrm{B} |\!|\!|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme triple. ◁

On en déduit que l'application $\mathrm{A} \longmapsto \lambda_p$ *qui à une matrice symétrique réelle associe sa* p*-ième valeur propre (par ordre croissant) est* 1*-lipschitzienne donc continue.*

La première question de l'énoncé suivant étudie les liens qu'il y a entre la diagonale et le spectre d'une matrice symétrique. Nous en donnons ici *une solution utilisant le théorème du minimax. Le lecteur en trouvera une autre preuve basée sur le principe du minimax de Ky-Fan dans l'exercice 2.42.*

2.41. Théorème de majoration de Schur

1. Soit E un espace euclidien de dimension n, $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme auto-adjoint de E, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de u dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. Démontrer que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p \leqslant a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{pp}.$$

2. Soit a et b deux endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien E. Démontrer que $\mathrm{Tr}(e^b(b-a) - e^b + e^a) \geqslant 0$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Démontrons le résultat par récurrence sur p. Pour $p = 1$, on sait que

$$\lambda_1 = \inf_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle \leqslant \langle u(e_1), e_1\rangle = a_{11}.$$

Supposons $p \geqslant 2$. On note $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, $\widetilde{u}$ l'endomorphisme auto-adjoint de F dont la matrice dans $(e_1,\dots,e_p)$ est $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. D'après le théorème du minimax, on a $\lambda_p \leqslant \max\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle u(x), x\rangle$. Il existe donc un vecteur $\varepsilon_p \in F$ de norme 1 tel que $\lambda_p \leqslant \langle u(\varepsilon_p), \varepsilon_p\rangle$. On choisit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p-1}$ de telle manière que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\dots,\varepsilon_p)$ soit une base orthonormée de F. Le système $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p, e_{p+1},\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E. Si $(a'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la matrice de u dans cette base, l'hypothèse de récurrence nous donne $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{p-1} \leqslant a'_{11} + \cdots + a'_{p-1,p-1}$. Comme $\lambda_p \leqslant \langle u(\varepsilon_p), \varepsilon_p\rangle = a'_{pp}$, on obtient

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{p-1} + \lambda_p \leqslant a'_{11} + \cdots + a'_{p-1,p-1} + a'_{pp} = \mathrm{Tr}(\widetilde{u}).$$

Comme on a également $\mathrm{Tr}(\widetilde{u}) = a_{11} + \cdots + a_{p-1,p-1} + a_{pp}$, on peut conclure

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_p \leqslant a_{11} + \cdots + a_{pp}.$$

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^y(y-x) - e^y + e^x = e^y(y - x - 1 + e^{x-y}) \geqslant 0,$$

car pour tout réel t, $e^t - 1 - t \geqslant 0$.

On prend $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale diagonalisant b ; on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de a et b respectivement et $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de a dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. On a alors

$$\mathrm{Tr}(e^b(b-a)) = \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i}(\mu_i - a_{ii}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(e^b - e^a) = \sum_{i=1}^{n}(e^{\mu_i} - e^{\lambda_i})$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e^b(b-a) - e^b + e^a) &= \sum_{i=1}^{n}(e^{\mu_i}(\mu_i - a_{ii}) - e^{\mu_i} + e^{\lambda_i})\\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(e^{\mu_i}(\mu_i - \lambda_i) - e^{\mu_i} + e^{\lambda_i})}_{\geqslant 0} + \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i}(\lambda_i - a_{ii}).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\mu_i}(\lambda_i - a_{ii}) \geqslant 0$. Pour ce faire, on va appliquer une transformation d'Abel en faisant intervenir, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la quantité $\mathrm{D}_i = (a_{11} + \cdots + a_{ii}) - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_i)$. D'après la première question, $\mathrm{D}_i \geqslant 0$ et d'autre part, $\mathrm{D}_n = \mathrm{Tr}(a) - \mathrm{Tr}(a) = 0$. On peut écrire, avec la convention $\mathrm{D}_0 = 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i}(\lambda_i - a_{ii}) &= \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i}(\mathrm{D}_{i-1} - \mathrm{D}_i) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\mu_{i+1}}\mathrm{D}_i - \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i}\mathrm{D}_i\\ &= -e^{\mu_n}\mathrm{D}_n + \sum_{i=1}^{n-1}(e^{\mu_{i+1}} - e^{\mu_i})\mathrm{D}_i\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(e^{\mu_{i+1}} - e^{\mu_i})\mathrm{D}_i \geqslant 0,\end{aligned}$$

car les différences $e^{\mu_{i+1}} - e^{\mu_i}$ et les D_i sont positifs. L'inégalité est prouvée. ◁

La première question a montré le théorème de majoration de Schur. Une autre manière de le prouver consiste à établir que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = \inf_{(x_1,\dots,x_p)} \sum_{i=1}^{p}(u(x_i), x_i)$$

où la borne inférieure porte sur toutes les familles orthonormales de p vecteurs (voir 2.42). Le résultat en découle directement en prenant la famille $(e_1,\dots,e_p)$.

En fait le théorème de Schur élucide complètement les liens qu'il y a entre la diagonale et le spectre d'une matrice symétrique : si on se donne $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ *et* $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ *deux* n*-uplets de réels vérifiant* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p \leqslant a_1 + \cdots + a_p$*, pour tout* p *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$ *alors il existe une matrice symétrique* A *ayant* $a_1, \ldots, a_n$ *comme coefficients diagonaux et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *pour valeurs propres.*

2.42. Inégalités de Ky-Fan

Soit A et B deux matrices symétriques réelles de taille n. On range leurs valeurs propres par ordre décroissant

$$\lambda_1(\mathrm{A}) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\mathrm{A}).$$

1. Démontrer que $\lambda_1(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \lambda_1(\mathrm{A}) + \lambda_1(\mathrm{B})$.

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i(\mathrm{A}) + \lambda_i(\mathrm{B})).$$

(**École normale supérieure, École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A, e_i étant relatif à la valeur propre $\lambda_i(\mathrm{A})$. Pour tout vecteur $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. de norme 1, on a

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{AX} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathrm{A}) x_i^2 \leqslant \lambda_1(\mathrm{A}) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \lambda_1(\mathrm{A}).$$

Comme pour $\mathrm{X} = e_1$, on a égalité, on en déduit que

$$\lambda_1(\mathrm{A}) = \sup_{\|\mathrm{X}\|=1} \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX} \rangle.$$

On a évidemment le même résultat pour B et A + B. On en déduit que, pour tout X de norme 1,

$$\langle \mathrm{X}, (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{X} \rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX} \rangle + \langle \mathrm{X}, \mathrm{BX} \rangle \leqslant \lambda_1(\mathrm{A}) + \lambda_1(\mathrm{B}).$$

En prenant la borne supérieure du membre de gauche, on obtient

$$\lambda_1(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \lambda_1(\mathrm{A}) + \lambda_1(\mathrm{B}).$$

2. On note E_k l'ensemble des familles $(X_1, \dots, X_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ de norme 1, deux à deux orthogonaux. Démontrons que

$$\sup_{(X_1,\dots,X_k)\in E_k} \sum_{j=1}^{k} \langle X_j, AX_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A).$$

Soit $(X_1, \dots, X_k) \in E_k$ et $M = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ la matrice des coordonnées des vecteurs $X_1, \dots, X_k$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On a

$$\sum_{j=1}^{k} \langle X_j, AX_j\rangle = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2.$$

On note $s_i = \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}^2$. On majore les valeurs propres $\lambda_i(A)$ avec $i \geqslant k$ par $\lambda_k(A)$. On obtient

$$\sum_{j=1}^{k} \langle X_j, AX_j\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(A) s_i + \lambda_k(A) \sum_{i=k}^{n} s_i.$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i = \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = k$, car les vecteurs X_j sont unitaires, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \langle X_j, AX_j\rangle &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(A) s_i + \lambda_k(A) \left(k - \sum_{i=1}^{k-1} s_i\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) s_i + k\lambda_k(A).\end{aligned}$$

La famille $(X_1, \dots, X_k)$ étant orthonormale, on peut obtenir une matrice N orthogonale en ajoutant $n-k$ colonnes à la matrice M. On en déduit que $s_i \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} n_{ij}^2 = 1$, d'où l'on tire

$$\sum_{j=1}^{k} \langle X_j, AX_j\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) + k\lambda_k(A) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A).$$

Comme il y a égalité pour $(X_1, \dots, X_k) = (e_1, \dots, e_k) \in E_k$, on a le résultat annoncé.

On en déduit que, pour tout $(X_1, \dots, X_k) \in E_k$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\langle X_j, (A+B)X_j\rangle &= \sum_{j=1}^{k}\langle X_j, AX_j\rangle + \sum_{j=1}^{k}\langle X_j, BX_j\rangle \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i(A) + \lambda_i(B)\right).\end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure du membre de gauche, on obtient

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i(A)+\lambda_i(B)). \quad \triangleleft$$

Un théorème de Lidskii généralise l'inégalité de la question 2 à une somme de valeurs propres d'indices $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ quelconques (au lieu des entiers de 1 à k).

Voici encore un exercice qui se ramène à démontrer le théorème de majoration de Schur.

2.43. Majoration de Tr(AB)

> Soit A et B deux matrices symétriques réelles positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On ordonne leurs valeurs propres : $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ pour A et $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ pour B. Montrer que
>
> $$\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n.$$
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On se ramène au cas où A est diagonale en écrivant $A = {}^t PDP$, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a alors

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}({}^t PDPB) = \mathrm{Tr}(DPB\,{}^tP) = \mathrm{Tr}(DB') = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{ii},$$

où $B' = PB\,{}^tP = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour utiliser la croissance de la suite $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on fait une transformation d'Abel. On pose, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $s_k = \sum_{i=k}^{n} b_{ii}$. L'expression de Tr(AB) devient

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(s_i - s_{i+1}) + \lambda_n s_n = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})s_i,$$

en posant $\lambda_0 = 0$. On obtient de même $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) t_i$, en posant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $t_k = \sum_{i=k}^{n} \mu_i$ et $\mu_0 = 0$. Puisque, pour tout i, $\lambda_i - \lambda_{i-1} \geqslant 0$, il suffit de démontrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $s_k \leqslant t_k$. C'est ce qui a été vu par deux méthodes différentes dans les deux exercices précédents. $\triangleleft$

L'énoncé suivant donne une expression variationnelle de l'écart maximal entre deux valeurs propres d'une matrice symétrique. Comme dans l'exercice précédent, on utilise une transformation d'Abel. C'est une idée souvent utile lorsque l'on travaille sur une somme et que l'on souhaite exploiter une suite d'inégalités du type $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. On fait alors apparaître les différences $\lambda_i - \lambda_{i-1}$ dont on connaît le signe.

2.44. Écart maximal entre deux valeurs propres

Soit S une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note

$$E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ \|X\| = \|Y\| = 1, \ \langle X, Y \rangle = 0\}.$$

Démontrer que $\max\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n} |\lambda_i - \lambda_j| = 2 \sup\limits_{(X,Y) \in E} |{}^t XSY|$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On suppose que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de S, V_i étant associé à la valeur propre λ_i.

Soit $(X, Y) \in E$, qu'on écrit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i V_i$. On a $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$ et ${}^t XSY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$. Pour utiliser la décroissance de la suite $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on fait une transformation d'Abel. On pose, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ et $s_0 = 0$. On a alors

$$ {}^t XSY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) s_i,$$

car $s_n = 0$. On en déduit que

$$2|{}^t\mathrm{XSY}| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_{i+1})|s_i| \leqslant 2(\lambda_1 - \lambda_n)\max(|s_1|, \ldots, |s_{n-1}|).$$

Pour obtenir $2 \sup\limits_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in \mathrm{E}} |{}^t\mathrm{XSY}| \leqslant (\lambda_1 - \lambda_n)$, il suffit de démontrer que $2|s_i| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. On utilise $s_n = 0$. On en déduit que, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $s_i = \sum\limits_{j=1}^{i} x_j y_j = -\sum\limits_{j=i+1}^{n} x_j y_j$ et donc

$$2s_i = \sum_{j=1}^{i} x_j y_j + \sum_{j=i+1}^{n} x_j(-y_j).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs X et Z, où $\mathrm{Z} = \sum\limits_{j=1}^{i} y_j \mathrm{V}_j - \sum\limits_{j=i+1}^{n} y_j \mathrm{V}_j$, on obtient

$$2|s_i| \leqslant \|\mathrm{X}\|\|\mathrm{Z}\| \leqslant \|\mathrm{X}\|\|\mathrm{Y}\| \leqslant 1,$$

ce qui $2 \sup\limits_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in \mathrm{E}} |{}^t\mathrm{XSY}| \leqslant \lambda_1 - \lambda_n$. On prend $\mathrm{X} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_n)$ et $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_n)$. On vérifie que $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{E}$ et que $2\,{}^t\mathrm{XSY} = \lambda_1 - \lambda_n$, d'où l'égalité souhaitée. $\lhd$

Le dernier exercice sur ce thème très riche porte encore sur l'étude des valeurs propres d'une somme d'endomorphismes (ou de matrices réelles) symétriques.

2.45. Valeurs propres d'endomorphismes dont la somme est positive

Soit V un espace euclidien de dimension r et E l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de V. Pour tout $a \in \mathrm{E}$, on note $\lambda_1(a) \geqslant \lambda_2(a) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r(a)$ ses valeurs propres.

1. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathrm{E}^k$ tel que $a_1 + \cdots + a_k$ soit positif. Montrer que

$$(i_1 + i_2 + \cdots + i_k < k + r) \Longrightarrow (\lambda_{i_1}(a_1) + \cdots + \lambda_{i_k}(a_k) \geqslant 0).$$

Considérer pour $j \in [\![1, k]\!]$ le sous-espace V_j engendré par les vecteurs propres de a_j associés aux valeurs propres $\lambda_{i_j}(a_j)$, $\lambda_{i_j+1}(a_j), \ldots, \lambda_r(a_j)$.

2. Soit $(a, b) \in \mathrm{E}^2$ tel que b soit positif. Montrer que

$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad \lambda_i(a) \leqslant \lambda_i(a + b).$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Considérons une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ de V, constituée de vecteurs propres de a_j tels que e_i soit associé à la valeur propre $\lambda_i(a_j)$ et posons $V_j = \mathrm{Vect}(e_{i_j}, e_{i_j+1}, \dots, e_r)$. On a donc $\dim V_j = r - i_j + 1$. D'autre part, par définition, les valeurs propres de la restriction de a_j à V_j sont inférieures ou égales à $\lambda_{i_j}(a_j)$. On en déduit que, pour tout $x \in V_j$, $\langle a_j(x), x\rangle \leqslant \lambda_{i_j}(a_j)\|x\|^2$.

Si un vecteur x non nul appartient à $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$, on a

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}(a_j)\|x\|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{k} \langle a_j(x), x\rangle \geqslant \left\langle \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)(x), x \right\rangle \geqslant 0,$$

car $\sum_{j=1}^{k} a_j$ est positif. On en déduit que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}(a_j) \geqslant 0$.

Pour conclure, il reste à démontrer que $\bigcap_{j=1}^{k} V_j$ n'est pas réduit au vecteur nul. On sait que

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) \geqslant \dim V_1 + \dim V_2 - r.$$

On montre facilement, par récurrence sur k, que

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^{k} V_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \dim V_j - (k-1)r.$$

Compte tenu de la valeur de $\dim V_j$, on obtient

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^{k} V_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{k} (r - i_j + 1) - (k-1)r \geqslant r + k - \sum_{j=1}^{k} i_j > 0.$$

2. Posons $a_1 = -a$ et $a_2 = a + b$. On a donc $a_1 + a_2 \geqslant 0$. Comme $-\lambda_r(a) \geqslant \cdots \geqslant -\lambda_2(a) \geqslant -\lambda_1(a)$ sont les valeurs propres de $-a$, on a pour $i \in [\![1,r]\!]$, $-\lambda_i(a) = \lambda_{r+1-i}(-a) = \lambda_{r+1-i}(a_1)$. On peut donc appliquer la question 1 avec $k = 2$, $i_1 = r + 1 - i$ et $i_2 = i$. On obtient $\lambda_{r+1-i}(-a) + \lambda_i(a+b) = -\lambda_i(a) + \lambda_i(a+b) \geqslant 0$, ce qui est le résultat voulu. ◁

La seconde question découle aussi immédiatement du théorème du minimax, puisque pour tout x on a $\langle a(x), x\rangle \leqslant \langle (a+b)(x), x\rangle$ (voir la remarque qui suit l'exercice 2.37).

La série d'exercices à venir porte sur les matrices antisymétriques et les endomorphismes antisymétriques d'un espace euclidien E. *On dit qu'un endomorphisme u de* E *est antisymétrique si $u^* = -u$ c'est-à-dire si l'on a, pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$. On vérifie aisément que u est antisymétrique si, et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est antisymétrique.*

2.46. Étude de $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})^4$, pour A et B antisymétriques

> Soit A et B deux matrices antisymétriques réelles. Montrer que $\mathrm{Tr}(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})^4 \geqslant 0$. À quelle condition cette trace est-elle nulle ?
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Posons $\mathrm{C} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On a

$$^t\mathrm{C} = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{B} = (-\mathrm{B})(-\mathrm{A}) - (-\mathrm{A})(-\mathrm{B}) = -\mathrm{C}.$$

La matrice C est antisymétrique, donc $\mathrm{D} = \mathrm{C}^2 = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{C}^4 = \mathrm{Tr}\,\mathrm{D}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} d_{ij}d_{ji} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} d_{ij}^2 \geqslant 0.$$

Si $\mathrm{Tr}\,\mathrm{C}^4 = 0$, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ij} = 0$. Mais par définition,

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{ki} = -\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2.$$

On a donc $c_{ik} = 0$, pour tout couple (i,k), $\mathrm{C} = 0$ et donc $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. ◁

L'exercice suivant donne un résultat élémentaire très classique : il s'agit de constater que l'endomorphisme u est antisymétrique dès que, pour tout vecteur x, $\langle u(x), x\rangle = 0$ et qu'alors son rang est pair.

2.47. Parité du rang d'un endomorphisme antisymétrique

> Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
>
> Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,u$ et que le rang de u est pair.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On déduit de l'hypothèse que, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} 0 = \langle u(x+y), x+y\rangle &= \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle \\ &= \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle, \end{aligned}$$

et donc $\langle u(y), x\rangle = -\langle y, u(x)\rangle$: u est antisymétrique, *i.e.* $u^* = -u$.

Si $x \in \operatorname{Ker} u$, on a, pour tout $y \in E$, $\langle u(y), x\rangle = -\langle y, u(x)\rangle = 0$ et $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$. Ainsi $\operatorname{Ker} u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$ et par égalité des dimensions, $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$. Soit v la restriction de u à $\operatorname{Im} u$, considérée comme à valeurs dans $\operatorname{Im} u$. Comme u, l'endomorphisme v est antisymétrique. De plus, il est injectif, puisque $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, et il est donc bijectif. En conséquence, on a

$$\det v^* = \det v = \det(-v^*) = (-1)^r \det(v^*),$$

où r est le rang de u. Comme $\det v^* \neq 0$, on obtient $(-1)^r = 1$ et le rang de u est pair. ◁

L'exercice suivant fait observer qu'en dimension 3 les endomorphismes antisymétriques se décrivent aisément à l'aide du produit vectoriel.

2.48. Endomorphismes antisymétriques en dimension 3

Soit E un espace vectoriel orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

(i) il existe un unique $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = a \wedge x \ ;$$

(ii) pour tout $x \in E$, on a $\langle f(x), x\rangle = 0$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est claire car, pour tout $(x, y) \in E^2$, le produit vectoriel $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y. Supposons donc que (ii) est réalisé. On a alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle f(x+y), x+y\rangle &= \langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, f est antisymétrique et sa matrice A dans une base orthonormale directe est antisymétrique. Il existe $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur a de coordonnées (p, q, r) convient. Si un autre vecteur b convient, on a, pour tout $x \in E$,

$$(a - b) \wedge x = a \wedge x - b \wedge x = f(x) - f(x) = 0.$$

Le vecteur $a - b$ est colinéaire à tout vecteur de E donc est nul et $a = b$. $\triangleleft$

L'exercice qui suit est l'occasion d'un premier pas vers la réduction des matrices antisymétriques. Nous allons constater que le spectre d'une matrice réelle antisymétrique est composé d'imaginaires purs.

2.49. Carré d'une matrice antisymétrique

> Soit S une matrice symétrique réelle. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de S pour qu'il existe une matrice antisymétrique réelle telle que $A^2 = S$.
>
> (**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Pour commencer, montrons que les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ d'une matrice antisymétrique réelle A sont imaginaires pures. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$. On en déduit que ${}^t\overline{X}\,{}^tA = -{}^t\overline{X}A = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$, puis que ${}^t\overline{X}AX = -\lambda\,{}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X$. Puisque ${}^t\overline{X}X \neq 0$ (il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$), on a donc $\lambda = -\overline{\lambda}$ et λ est imaginaire pur.

Si $S = A^2$, avec A antisymétrique, les valeurs propres de S sont les carrés de celles de A. Ce sont donc des réels négatifs. De plus, les valeurs propres non réelles, c'est-à-dire non nulles, de A sont deux à deux conjuguées, c'est-à-dire opposées. On en déduit que les valeurs propres non nulles de S ont toutes une multiplicité paire.

Supposons réciproquement que les valeurs propres de S soient négatives ou nulles et que les valeurs propres non nulles aient une multiplicité paire. Il existe alors un entier $r \leqslant \frac{n}{2}$ et des réels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que les valeurs propres de S comptées avec multiplicité soient $-\alpha_1^2, -\alpha_1^2, \ldots, -\alpha_r^2, -\alpha_r^2, 0, \ldots, 0$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}(-\alpha_1^2, -\alpha_1^2, \ldots, -\alpha_r^2, -\alpha_r^2, 0, \ldots, 0)$ telles que $S = {}^tPDP$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si l'on pose $R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $R_\alpha^2 = -\alpha^2 I_2$. On considère la matrice diagonale par blocs

$$\Delta = \begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\alpha_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

qui est clairement antisymétrique et vérifie $\Delta^2 = D$. On pose $A = {}^t P \Delta P$; la matrice A est encore antisymétrique et $A^2 = S$. La matrice S est le carré d'une matrice antisymétrique. ◁

Nous terminons ce thème en donnant un résultat complet sur la réduction des endomorphismes antisymétriques.

2.50. Réduction des endomorphismes antisymétriques

Soit f un endomorphisme antisymétrique bijectif d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\dim E$ est un entier pair. On le note $2p$.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2p})$ de E et des réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que, pour $i \in [\![1, p]\!]$,

$$f(e_{2i}) = -a_i e_{2i-1} \quad \text{et} \quad f(e_{2i-1}) = a_i e_{2i}.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On a

$$\det f = \det f^* = \det(-f) = (-1)^{\dim E} \det f.$$

Comme $\det f \neq 0$, on en déduit que $(-1)^{\dim E} = 1$ et donc que $\dim E$ est un entier pair.

2. On remarque que si la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2p})$ convient les plans $\mathrm{Vect}(e_{2i-1}, e_{2i})$ doivent être stables par f pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On va donc montrer l'existence d'un plan stable par f qui convient et faire une récurrence sur la dimension ensuite.

Comme f est inversible, il n'a aucune valeur propre réelle : en effet, si $f(x) = \lambda x$ on a $0 = \langle f(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2$ donc $x = 0$, car $\lambda \neq 0$ (on a d'ailleurs vu dans l'exercice précédent que les valeurs propres de f sont imaginaires pures). En revanche f^2, qui est auto-adjoint, est diagonalisable. Soit e_1 un vecteur propre unitaire de f^2 associé à une valeur propre

λ_1. Le vecteur $f(e_1)$ est orthogonal à e_1 et non nul : choisissons e_2 unitaire positivement colinéaire à $f(e_1)$. Il existe donc a_1 strictement positif tel que $f(e_1) = a_1 e_2$. Comme $f(e_2)$ est colinéaire à $f^2(e_1) = \lambda_1 e_1$ le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par f et la matrice de l'endomorphisme induit par f dans la base (e_1, e_2) est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais comme cet endomorphisme induit est antisymétrique et la base (e_1, e_2) orthonormée, on a forcément $a_2 = -a_1$. Cela règle déjà le cas $p = 1$.

On démontre alors la propriété par récurrence sur p. On suppose la propriété vraie au rang $p-1$ et on considère un espace E de dimension $2p$. On construit un plan $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ comme ci-dessus. On montre que $\mathrm{P}^\perp$ est également stable par f. On a en effet, pour $x \in \mathrm{P}$ et $y \in \mathrm{P}^\perp$,

$$\langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{P}^\perp$, on montre l'existence d'une base orthonormale $(e_3, \ldots, e_{2p})$ de $\mathrm{P}^\perp$ et de réels $a_2, \ldots, a_p$ (qu'on peut imposer strictement positifs) tels que, pour $2 \leqslant i \leqslant p$, on ait

$$f(e_{2i}) = -a_i e_{2i-1} \quad \text{et} \quad f(e_{2i-1}) = a_i e_{2i}.$$

La base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2p})$ a les propriétés voulues. ◁

Cela clôt la question de la réduction des endomorphismes antisymétriques puisque, si f n'est pas bijectif, E *est somme directe de* $\mathrm{Ker}\, f$ *et de son orthogonal* $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\, f$ *(voir exercice 2.47). Or, f induit sur* F *un endomorphisme antisymétrique sur lequel on peut donc appliquer ce qui précède. On en déduit qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de* E *telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \boxed{\mathrm{A}_1} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{\mathrm{A}_p} \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriciellement, cela signifie que toute matrice antisymétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice de ce type.

Les deux exercices suivants servent de transition avec le cadre hermitien. En effet, il sera utile de se placer sur l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ muni de son produit hermitien canonique : pour $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{Y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle = \mathrm{X}^*\mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$.

2.51. Matrices strictement positives

Une matrice réelle A est dite *strictement positive* si ${}^t\mathrm{A} + \mathrm{A}$ est symétrique définie positive.

1. Montrer que A est strictement positive si, et seulement si, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, non nul, on a ${}^t\mathrm{XAX} > 0$.

2. Montrer que si A est strictement positive et si S est symétrique définie positive, alors les valeurs propres de SA et de AS sont de parties réelles strictement positives.

(École polytechnique)

Solution.

1. La matrice $\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}$ est symétrique. Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$ {}^t({}^t\mathrm{XAX}) = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{A}\,{}^t({}^t\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{AX} $$

et donc ${}^t\mathrm{X}({}^t\mathrm{A} + \mathrm{A})\mathrm{X} = 2\,{}^t\mathrm{XAX}$. On en déduit que

$$ \begin{aligned} \text{A strictement positive} &\iff \mathrm{A} + {}^t\mathrm{A} \text{ définie positive} \\ &\iff \forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ {}^t\mathrm{X}(\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A})\mathrm{X} > 0 \\ &\iff \forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ {}^t\mathrm{XAX} > 0. \end{aligned} $$

2. Munissons $\mathbb{C}^n$ de son produit hermitien canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit λ une valeur propre de SA et $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On a $\mathrm{SAX} = \lambda\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}$. On calcule le produit scalaire $\langle \mathrm{X}, \mathrm{AX}\rangle$. On a

$$ \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX}\rangle = \langle \mathrm{X}, \lambda\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}\rangle = \lambda\langle \mathrm{X}, \mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}\rangle, $$

c'est-à-dire $\mathrm{X}^*\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}^*\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}$. Si on pose $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + i\mathrm{X}_2$ avec X_1 et X_2 dans $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$ \begin{aligned} \mathrm{X}^*\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X} &= {}^t(\mathrm{X}_1 - i\mathrm{X}_2)\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{X}_1 + i\mathrm{X}_2) \\ &= \underbrace{{}^t\mathrm{X}_1\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}_1 + {}^t\mathrm{X}_2\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}_2}_{>0} + i\underbrace{({}^t\mathrm{X}_1\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}_2 - {}^t\mathrm{X}_2\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}_1)}_{=0} \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned} $$

car S^{-1} est symétrique définie positive et X_1 et X_2 ne sont pas tous les deux nuls. En prenant la partie réelle de l'égalité précédente, il vient

$$ \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{X}^*\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X} = \mathrm{Re}(\mathrm{X}^*\mathrm{AX}) = {}^t\mathrm{X}_1\mathrm{AX}_1 + {}^t\mathrm{X}_1\mathrm{AX}_1 > 0, $$

d'après la première question, car X_1 et X_2 ne sont pas tous les deux nuls. On a donc $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

La matrice ${}^t\mathrm{A}$ est également strictement positive et on a de plus $\mathrm{Sp}(\mathrm{AS}) = \mathrm{Sp}({}^t(\mathrm{AS})) = \mathrm{Sp}({}^t\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{A})$. Les valeurs propres de

$\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{A}$, et donc celles de AS ont une partie réelle strictement positive (on pourrait également invoquer le résultat suivant : si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\mathrm{Sp}\,\mathrm{AB} = \mathrm{Sp}\,\mathrm{BA}$, car $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$). ◁

Les matrices de partie symétrique positive ont fait l'objet de la seconde épreuve écrite du concours de l'école Polytechnique en 2006.

2.52. Théorème de Liapounov

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *stable* si ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Soit $\mathrm{W} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (le cône des matrices symétriques définies positives).

Montrer que A est stable si et seulement s'il existe $\mathrm{V} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{AV} + \mathrm{VA} = -\mathrm{W}$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

• Supposons qu'il existe $\mathrm{V} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{AV} + \mathrm{VA} = -\mathrm{W}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{A}$, X un vecteur propre associé. On a $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et donc, puisque A est réelle, $\mathrm{X}^*\,{}^t\mathrm{A} = \overline{\lambda}\mathrm{X}^*$. On en déduit que

$$-\mathrm{X}^*\mathrm{WX} = \mathrm{X}^*\,{}^t\mathrm{AVX} + \mathrm{X}^*\mathrm{VAX} = \overline{\lambda}\mathrm{X}^*\mathrm{VX} + \lambda\mathrm{X}^*\mathrm{VX} = 2\,\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{X}^*\mathrm{VX}.$$

Si $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + i\mathrm{X}_2$, avec X_1 et X_2 dans $\mathbb{R}^n$, on trouve, comme dans l'exercice précédent, puisque V est symétrique réelle, $\mathrm{X}^*\mathrm{VX} = \mathrm{X}_1^*\mathrm{VX}_1 + \mathrm{X}_2^*\mathrm{VX}_2$ et donc $\mathrm{X}^*\mathrm{VX} > 0$, car V est définie positive et X_1 et X_2 ne sont pas tous les deux nuls. On a de même $\mathrm{X}^*\mathrm{WX} > 0$. On en déduit que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Les lecteurs qui connaissent la notion de matrice hermitienne pourront dire directement que V *et* W *étant symétriques réelles définies positives, elles sont hermitiennes définies positives, ce qui justifie* $\mathrm{X}^*\mathrm{VX} > 0$ *et* $\mathrm{X}^*\mathrm{WX} > 0$, *pour tout vecteur* X *de* $\mathbb{C}^n$ *non nul.*

• Supposons réciproquement que les valeurs propres de A aient une partie réelle strictement négative. Pour toute matrice symétrique réelle V, la matrice ${}^t\mathrm{AV} + \mathrm{VA}$ est encore symétrique. On définit donc une application linéaire φ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en posant $\varphi(\mathrm{V}) = {}^t\mathrm{AV} + \mathrm{VA}$. Pour montrer que $-\mathrm{W}$ a un antécédent par φ, nous allons démontrer que φ est surjective. Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de démontrer qu'elle est injective.

Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. On a donc ${}^t\mathrm{AV} = -\mathrm{VA}$. Par une démonstration par récurrence évidente, on montre que, pour tout entier naturel n, on a $({}^t\mathrm{A})^n\mathrm{V} = \mathrm{V}(-\mathrm{A})^n$ et donc $(t\,{}^t\mathrm{A})^n\mathrm{V} = \mathrm{V}(-t\mathrm{A})^n$, pour tout réel t. On en déduit, en divisant par $n!$, puis sommant sur n que $e^{t\,{}^t\mathrm{A}}\mathrm{V} = \mathrm{V}e^{-t\mathrm{A}}$ et comme $e^{-t\mathrm{A}} = (e^{t\mathrm{A}})^{-1}$, $e^{t\,{}^t\mathrm{A}}\mathrm{V}e^{t\mathrm{A}} = \mathrm{V}$. Pour démontrer que $\mathrm{V} = 0$, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stable, on a* $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0$.

Démonstration. On utilise la décomposition de Dunford (voir l'exercice 2.30 du tome 2 d'algèbre). Il existe D diagonalisable et N nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent telles que $A = D + N$. Comme elles commutent, on a, pour tout réel t, $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$. Si D est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors e^{tD} est semblable à $\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$. Si p est l'indice de nilpotence de N, $e^{tN} = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} t^k N^k$. Les coefficients de e^{tN} sont des polynômes en t. On en déduit que ceux de e^{tA} sont des sommes (finies) de termes de la forme $e^{t\lambda_i} t^j$. Comme $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\lambda_i} = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\lambda_i} t^j = 0$. Le résultat en découle. ◇

Du lemme, on déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\,{}^tA} = 0$, car ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que A. On obtient $V = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t\,{}^tA} V e^{tA} = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ et φ est bijective. Soit V l'antécédent de $-W$ par φ. Afin de démontrer que V est définie positive, nous allons donner une expression explicite de V.

Posons, pour tout réel t, $C(t) = e^{t\,{}^tA} W e^{tA}$. La fonction C est de classe C^1 et $C'(t) = {}^tA e^{t\,{}^tA} W e^{tA} + e^{t\,{}^tA} W e^{tA} A$. D'après la démonstration du lemme, les coefficients de $C'(t)$ sont des sommes de produits de fonctions polynomiales par des $e^{t\lambda_i}$, où les λ_i ont une partie réelle strictement négative. On en déduit que C' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Toujours d'après le lemme, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} C'(t)\mathrm{d}t &= {}^tA \left(\int_0^{+\infty} e^{t\,{}^tA} W e^{tA} \mathrm{d}t\right) + \left(\int_0^{+\infty} e^{t\,{}^tA} W e^{tA} \mathrm{d}t\right) A \\ &= -C(0) = -W.\end{aligned}$$

De l'unicité de V, on déduit $\boxed{V = \int_0^{+\infty} e^{t\,{}^tA} W e^{tA} \mathrm{d}t.}$ On a donc, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}{}^tXVX = {}^tX \left(\int_0^{+\infty} e^{t\,{}^tA} W e^{tA} \mathrm{d}t\right) X &= \int_0^{+\infty} {}^tX e^{t\,{}^tA} W e^{tA} X \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} {}^t(e^{tA}X) W (e^{tA}X) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si $X \neq 0$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $e^{tA}X \neq 0$, car e^{tA} est inversible, donc ${}^t(e^{tA}X) W (e^{tA}X) > 0$, car W est symétrique définie positive. On en déduit que ${}^tXVX > 0$. Ainsi V est symétrique définie positive et l'équivalence est démontrée. ◁

Le fin du chapitre est consacrée à l'étude des endomorphismes hermitiens et des matrices hermitiennes, section actuellement hors programme des classes préparatoires mais qui est dans le prolongement naturel de l'étude des endomorphismes symétriques et qui intéressera les candidats aux concours de recrutement de professeurs.

Considérons E *un espace hermitien (voir page 84). Un endomorphisme* u *de* E *possède un unique endomorphisme adjoint* u^* *vérifiant pour tout* $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. *On dit que* u *est hermitien ou auto-adjoint si* $u = u^*$. *Dans ces conditions, si* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *désigne la matrice de* u *dans une base orthonormale de* E, *la matrice* A^* *de coefficient* (i,j) *égal à* $\overline{a_{j,i}}$ *est la matrice de* u^* *dans la même base. La matrice* A *est dite hermitienne si* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$. *Dans ces conditions,* u *est hermitien si, et seulement si,* A *est hermitienne.*

La théorie des endomorphismes hermitiens se calque sur celles des endomorphismes symétriques et le théorème spectral s'exprime de la sorte : un endomorphisme hermitien est diagonalisable en base orthonormale et son spectre est réel; une matrice hermitienne A *est unitairement semblable à une matrice diagonale réelle, autrement dit, il existe* $\mathrm{U} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ *et* D *matrice diagonale réelle telles que*

$$\mathrm{A} = \mathrm{UDU}^{-1} = \mathrm{UDU}^*.$$

Enfin, relevons la correspondance bijective entre les formes sesquilinéaires hermitiennes de $\mathbb{C}^n$ *et les matrices hermitiennes de taille* n : *si on note* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{C}^n$, *à toute forme hermitienne* φ, *on fait correspondre la matrice hermitienne* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *où* $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. *Dans ces conditions, pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{C}^n$, *on a* $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^*\mathrm{AY}$. *Si* P *est la matrice de passage de la base canonique à une base* $\mathcal{B}$, $\mathrm{P}^*\mathrm{AP}$ *est la matrice de* φ *dans la nouvelle base* $\mathcal{B}$. *Le théorème spectral affirme donc pour toute forme hermitienne* φ *l'existence d'une base orthonormale qui est orthogonale pour* φ.

Enfin, une matrice hermitienne A *sera dite positive (resp. définie positive) si la forme sesquilinéaire hermitienne associée est positive (resp. définie positive) :*

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \quad \mathrm{X}^*\mathrm{AX} \geqslant 0 \quad (\textit{resp. } \mathrm{X}^*\mathrm{AX} > 0).$$

Le premier exercice permet de travailler toutes ces notions.

2.53. Condition pour que $\mathrm{Im}\,\mathrm{B} \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{A}$

On suppose $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne usuelle.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, \mathrm{A}x\rangle = 0$. Que dire de A ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}_+$. Montrer que A est hermitienne positive.

3. Soit A une matrice hermitienne. Montrer que A est positive si, et seulement si, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

On note H_+ l'ensemble des matrices hermitiennes positives de taille n.

4. Soit $A \in H_+$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\langle x, Ax\rangle = 0 \Longleftrightarrow x \in \operatorname{Ker} A.$$

5. Soit A et B dans H_+. On dit que $A \geqslant B$ si $A - B \in H_+$. Montrer que

$$A \geqslant B \Longrightarrow \operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A.$$

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{Im}(AA^*) = \operatorname{Im} A$.

7. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Étudier les implications entre
(i) $\exists \lambda \geqslant 0 \ \ BB^* \leqslant \lambda AA^*$;
(ii) $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$;
(iii) $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ \ B = AC$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Pour x et y dans $\mathbb{C}^n$, on a

$$0 = \langle x + y, A(x + y)\rangle = \langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle,$$
$$0 = \langle x + iy, A(x + iy)\rangle = i\langle x, Ay\rangle - i\langle y, Ax\rangle.$$

On en déduit que $\langle y, Ax\rangle = 0$, pour tous x et y de $\mathbb{C}^n$. Cela implique $Ax = 0$ pour tout x donc $A = 0$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\langle x, Ax\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} = \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle$$

et donc $\langle x, (A - A^*)x\rangle = 0$. D'après la question 1, on en déduit $A = A^*$: la matrice A est hermitienne ; elle est évidemment positive.

3. Supposons A positive. Si λ est une valeur propre de A et x un vecteur propre associé, on a

$$\langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \|x\|^2 \geqslant 0$$

et donc $\lambda \geqslant 0$. Réciproquement si $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$, comme A est diagonalisable dans une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$, les valeurs propres associées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant positives, on a pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$\langle x, \mathrm{A}x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \geqslant 0.$$

De la même façon, pour qu'une matrice hermitienne A *soit définie positive, il faut et il suffit que son spectre soit contenu dans* $\mathbb{R}_+^*$.

4. Si $x \in \operatorname{Ker} \mathrm{A}$, il est clair que $\langle x, \mathrm{A}x\rangle = 0$.

Supposons réciproquement que $\langle x, \mathrm{A}x\rangle = 0$. Avec les notations de la question 3, on a $\langle x, \mathrm{A}x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 = 0$. Puisque tous les termes de la somme sont positifs, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i |x_i|^2 = 0$ et donc $\lambda_i x_i = 0$. On en déduit que

$$\mathrm{A}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i = 0.$$

5. Soit A et B dans H_+ telles que $\mathrm{A} \geqslant \mathrm{B}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, (\mathrm{A} - \mathrm{B})x\rangle \geqslant 0$ et donc $\langle x, \mathrm{A}x\rangle \geqslant \langle x, \mathrm{B}x\rangle$. Ainsi, si $x \in \operatorname{Ker} \mathrm{A}$, on a $0 \leqslant \langle x, \mathrm{B}x\rangle \leqslant 0$ et d'après la question précédente, $x \in \operatorname{Ker} \mathrm{B}$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} \mathrm{A} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{B}$.

Mais on sait que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'égalité $(\operatorname{Ker} \mathrm{A})^{\perp} = \operatorname{Im} \mathrm{A}^*$. En effet pour $x \in \operatorname{Ker} \mathrm{A}$ et $y \in \mathbb{C}^n$, on obtient

$$\langle x, \mathrm{A}^* y\rangle = \langle \mathrm{A}x, y\rangle = 0,$$

ce qui montre que $\operatorname{Im} \mathrm{A}^* \subset (\operatorname{Ker} \mathrm{A})^{\perp}$ et comme

$$\operatorname{rg} \mathrm{A}^* = \operatorname{rg} \mathrm{A} = n - \dim(\operatorname{Ker} \mathrm{A}) = \dim(\operatorname{Ker} \mathrm{A})^{\perp},$$

il y a égalité : $(\operatorname{Ker} \mathrm{A})^{\perp} = \operatorname{Im} \mathrm{A}^*$. Comme A est hermitienne, on a en fait $(\operatorname{Ker} \mathrm{A})^{\perp} = \operatorname{Im} \mathrm{A}$. On obtient de même $(\operatorname{Ker} \mathrm{B})^{\perp} = \operatorname{Im} \mathrm{B}$.

La relation $\operatorname{Ker} \mathrm{A} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{B}$ équivaut à $(\operatorname{Ker} \mathrm{B})^{\perp} \subset (\operatorname{Ker} \mathrm{A})^{\perp}$, c'est-à-dire à $\operatorname{Im} \mathrm{B} \subset \operatorname{Im} \mathrm{A}$.

6. Notons que la matrice AA^* est hermitienne positive, car pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, \mathrm{AA}^* x\rangle = \langle \mathrm{A}^* x, \mathrm{A}^* x\rangle = \|\mathrm{A}^* x\|^2 \geqslant 0$.

Il est clair que $\operatorname{Im} \mathrm{AA}^* \subset \operatorname{Im} \mathrm{A}$. Montrons que ces deux sous-espaces ont même dimension, ce qui démontrera l'égalité demandée. Il suffit de montrer que $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{AA}^* = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{A}$. Montrons pour cela que $\operatorname{Ker} \mathrm{AA}^* = \operatorname{Ker} \mathrm{A}^*$. Cela résulte de la question 4, car

$$x \in \operatorname{Ker} \mathrm{AA}^* \iff \langle x, \mathrm{AA}^* x\rangle = 0 \iff \|\mathrm{A}^* x\| = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} \mathrm{A}^*.$$

Comme A et A^* ont le même rang, Ker A et Ker A^* ont la même dimension et on a le résultat.

7. Montrons que les trois propriétés sont équivalentes.

• Montrons que (i) implique (ii). Les matrices AA^*, BB^* et donc λAA^* sont hermitiennes positives. D'après la question 5, $BB^* \leqslant \lambda AA^*$ implique $\operatorname{Im} BB^* \subset \operatorname{Im} \lambda AA^* = \operatorname{Im}(\sqrt{\lambda}A)(\sqrt{\lambda}A)^*$ et d'après la question 6, $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} \sqrt{\lambda}A \subset \operatorname{Im} A$.

• L'implication entre (ii) et (iii) résulte du lemme de factorisation (cf. exercice 6.4 du tome 1 d'algèbre).

• Montrons que (iii) implique (i). Si M est hermitienne positive de plus grande valeur propre λ, on obtient en se plaçant dans une base orthonormale de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leqslant \lambda \|x\|^2.$$

On note λ ($\lambda \geqslant 0$) la plus grande valeur propre de $CC^* \in H_+$. On obtient, pour tout x,

$$\begin{aligned} \langle x, (\lambda AA^* - BB^*)x \rangle &= \lambda \|A^*x\|^2 - \langle x, ACC^*A^*x \rangle \\ &= \lambda \|A^*x\|^2 - \langle A^*x, CC^*A^*x \rangle \geqslant 0, \end{aligned}$$

ce qui, d'après la question 2, implique $\lambda AA^* - BB^* \in H_+$ et donc par définition $BB^* \leqslant \lambda AA^*$. $\lhd$

De l'exercice précédent, on retiendra entre autres que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A^*A *est hermitienne positive et* $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$. *L'exercice suivant reprend la relation d'ordre introduite dans l'exercice précédent.*

2.54. Application convexe

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & A^*A. \end{array}$$

Étant donné deux matrices hermitiennes, on pose

$$H \leqslant K \Longleftrightarrow K - H \text{ est positive.}$$

Montrer que, pour cette relation d'ordre, Φ est convexe.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A^*A est hermitienne et positive car, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $X^*A^*AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. Par ailleurs il est facile de voir que la relation $\leqslant$ définie dans l'énoncé est une relation d'ordre.

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in [0,1]$. Il nous faut démontrer que

$$\Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \lambda\Phi(A) + (1-\lambda)\Phi(B).$$

En développant, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda\Phi(A) + (1-\lambda)\Phi(B) - \Phi(\lambda A + (1-\lambda)B) &\\ = \lambda(1-\lambda)(A^*A + B^*B - A^*B - B^*A)&\\ = \lambda(1-\lambda)(A-B)^*(A-B).&\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, la matrice $(A-B)^*(A-B)$ est hermitienne positive. Comme $\lambda(1-\lambda) \in \mathbb{R}_+$, $\lambda\Phi(A) + (1-\lambda)\Phi(B) - \Phi(\lambda A + (1-\lambda)B)$ est hermitienne positive. ◁

2.55. Condition pour qu'une matrice hermitienne soit définie positive

Soit M une matrice hermitienne écrite sous la forme $\begin{pmatrix} a & v^* \\ v & A \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée d'ordre $n-1$. Montrer que la matrice M est définie positive si, et seulement si, a est un réel strictement positif et $aA - vv^*$ est hermitienne définie positive.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Puisque M est hermitienne, a est réel et A est hermitienne.

Considérons un élément quelconque X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ écrit sous la forme $\begin{pmatrix} y \\ Z \end{pmatrix}$, où $y \in \mathbb{C}$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$. On a alors $MX = \begin{pmatrix} ay + v^*Z \\ yv + AZ \end{pmatrix}$ et

$$X^*MX = \overline{y}ay + \overline{y}v^*Z + Z^*yv + Z^*AZ = a|y|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{y}v^*Z) + Z^*AZ,$$

car $\overline{v^*Z} = Z^*v$ par symétrie hermitienne.

La matrice M est définie positive si, et seulement si, cette quantité est strictement positive pour tout X non nul. En prenant $Z = 0$, on voit qu'il faut $a > 0$, ce que l'on suppose réalisé par la suite. Fixons Z et faisons varier y. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $v^*Z = |v^*Z|e^{it}$. Prenons y sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient

$$X^*MX = a\rho^2 + 2\rho|v^*Z|\cos(t-\theta) + Z^*AZ.$$

Quand θ varie, le minimum de X^*MX est $a\rho^2 - 2\rho|v^*Z| + Z^*AZ$. Cette quantité est minimale pour $\rho = \dfrac{|v^*Z|}{a}$ et la valeur minimale obtenue est $\dfrac{1}{a}|v^*Z|^2 + Z^*AZ$. Puisque $|v^*Z|^2 = \overline{v^*Z}v^*Z = Z^*vv^*Z$, on a

$$-\frac{1}{a}|v^*Z|^2 + Z^*AZ = \frac{1}{a}(aZ^*AZ - Z^*vv^*Z) = \frac{1}{a}(Z^*(aA - vv^*)Z).$$

Ainsi M est définie positive si, et seulement si, $a > 0$ et pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$, $Z^*(aA - vv^*)Z > 0$, c'est-à-dire si $aA - vv^*$ est définie positive. $\triangleleft$

2.56. Calcul de l'inverse d'une matrice par une méthode itérative

Soit X_0 et C dans $\mathbb{C}^n$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$X_{n+1} = BX_n + C.$$

1. Que dire si la suite (X_n) converge ?

2. Donner une condition suffisante pour que (X_n) ait une limite indépendante de X_0.

3. Soit $A = M - N$ hermitienne, avec M inversible. On suppose que A et $M^* + N$ sont définies positives. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme définie par $\|X\| = \sqrt{\langle X, AX\rangle}$. Prouver que $|||M^{-1}N||| < 1$.

4. Donner un algorithme permettant d'inverser A.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

1. Si l'on note L la limite de la suite (X_n), on a $L = BL + C$ et donc $(I_n - B)L = C$: le vecteur C appartient à $\mathrm{Im}(I_n - B)$.

2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme triple quelconque. Montrons que la condition $|||B||| < 1$ suffit.

En effet la matrice $I_n - B$ est alors inversible, car si $X \in \mathrm{Ker}(I_n - B)$, alors $BX = X$ et $\|X\| \leqslant \|BX\| \leqslant |||B|||\|X\|$, ce qui implique $X = 0$. Il existe un unique $L \in \mathbb{C}^n$ tel que $(I_n - B)L = C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} - L = B(X_n - L)$ et donc $X_n - L = B^n(X_0 - L)$. On en déduit que

$$\|X_n - L\| \leqslant |||B^n|||\|X_0 - L\| \leqslant |||B|||^n\|X_0 - L\|.$$

Comme $|||B||| < 1$, la suite (X_n) converge vers L, limite indépendante de X_0.

3. Posons $B = M^{-1}N$. On a

$$|||B|||^2 = \sup_{X\neq 0}\frac{\|BX\|^2}{\|X\|^2} = \sup_{X\neq 0}\frac{X^*B^*ABX}{X^*AX}.$$

Cette borne supérieure étant atteinte, on a $\|B\| < 1$ si, et seulement si, $X^*B^*ABX < X^*AX$ pour tout $X \neq 0$, c'est-à-dire $X^*(A - B^*AB)X > 0$ pour tout $X \neq 0$. Il faut donc démontrer que la matrice hermitienne $A - B^*AB$ est définie positive.

On a $B = M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = I_n - M^{-1}A$. On en déduit que

$$\begin{aligned} A - B^*AB &= A - (I_n - AM^{*-1})A(I_n - M^{-1}A) \\ &= A - A + AM^{*-1}A + AM^{-1}A - AM^{*-1}AM^{-1}A \\ &= AM^{*-1}(M + M^* - A)M^{-1}A \\ &= (M^{-1}A)^*(M + M^* - A)(M^{-1}A). \end{aligned}$$

Comme $M + M^* - A = M^* + N$ est définie positive, la matrice $A - B^*AB$ qui lui est congruente est aussi définie positive.

4. Si M et N vérifient les conditions de la question précédente, une suite (X_n) qui vérifie la relation de récurrence $X_{n+1} = BX_n + C$, converge d'après le question 2 vers $(I_n - B)^{-1}C = (M^{-1}A)^{-1}C = A^{-1}(MC)$. Pour déterminer une valeur approchée de $A^{-1}X$, il faut donc prendre $C = M^{-1}X$. On peut ainsi calculer $A^{-1}X$ pour tout X et donc déterminer A^{-1}.

La méthode n'a d'intérêt que si l'on peut calculer M^{-1} facilement. On peut prendre par exemple $M = \lambda I_n$, avec $\lambda > 0$. On a alors $M^* + N = M + N = 2M - A$. Cette matrice est définie positive si 2λ est supérieur à la plus grande valeur propre de A. $\lhd$

2.57. Encadrement des valeurs propres de AB

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\lambda_{\max}(A)$ et $\lambda_{\min}(A)$ deux éléments de $\operatorname{Sp} A$ tels que, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $|\lambda_{\min}(A)| \leqslant |\lambda| \leqslant |\lambda_{\max}(A)|$.

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $\mu \in \operatorname{Sp}(AB)$,

$$\lambda_{\min}(AA^*)\lambda_{\min}(BB^*) \leqslant |\mu|^2 \leqslant \lambda_{\max}(AA^*)\lambda_{\max}(BB^*).$$

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

La matrice AA^* est hermitienne positive, car pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $X^*AA^*X = \|A^*X\|^2 \geqslant 0$. Il existe une base orthonormale $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de AA^*, avec les valeurs propres positives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$, on a alors

$$AA^*X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i Y_i \quad \text{et} \quad \|A^*X\|^2 = X^*AA^*X = \langle X, AA^*X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2.$$

On en déduit, par définition de $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$, que

$$\lambda_{\min}(AA^*)\|X\|^2 \leqslant \|A^*X\|^2 \leqslant \lambda_{\max}(AA^*)\|X\|^2.$$

Le même raisonnement s'applique à la matrice B et on obtient, pour tout $X \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(BB^*)\lambda_{\min}(AA^*)\|X\|^2 &\leqslant \lambda_{\min}(BB^*)\|A^*X\|^2 \leqslant \|B^*A^*X\|^2 \\ &\leqslant \lambda_{\max}(BB^*)\|A^*X\|^2 \leqslant \lambda_{\max}(BB^*)\lambda_{\max}(AA^*)\|X\|^2.\end{aligned}$$

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(AB)$. Alors $\overline{\mu} \in \mathrm{Sp}(AB)^* = \mathrm{Sp}(B^*A^*)$, car $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}({}^t(AB))$. Si X est un vecteur propre associé, on a $B^*A^*X = \overline{\mu}X$ et $\|B^*A^*X\|^2 = \|\overline{\mu}X\|^2 = |\mu|^2\|X\|^2$ et l'inégalité précédente fournit l'encadrement voulu. ◁

L'exercice suivant est la version hermitienne de l'exercice 2.30. Toutes les solutions que nous avions données peuvent se généraliser.

2.58. Inégalité d'Hadamard pour une matrice hermitienne

Soit $H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive.

1. Montrer que $0 \leqslant \det H \leqslant \prod_{j=1}^{n} h_{jj}$.

2. En désignant par R et S les parties réelle et imaginaire de H, montrer que $\det H \leqslant \det R$.

3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer l'inégalité

$$|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sqrt{|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2}.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. L'inégalité $0 \leqslant \det H$ est vérifiée, car H est positive. Les coefficients h_{jj} sont positifs, car $h_{jj} = \Phi(e_j)$, où Φ est la forme hermitienne associée à H dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Si $\det H = 0$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que H est définie positive : les h_{jj} sont alors strictement positifs.

Il existe $P = (p_{ij})$ unitaire et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale, à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $H = PDP^*$. On en déduit que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $h_{jj} = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}\lambda_k\overline{p_{jk}} = \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^2\lambda_k$. On remarque que, pour tout j, $\sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^2 = 1$, car P est unitaire. On en déduit, en utilisant la concavité de la fonction ln que

$$\ln h_{jj} = \ln\left(\sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^2\lambda_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^2 \ln \lambda_k,$$

puis que

$$\sum_{j=1}^{n} \ln h_{jj} \geqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^2 \ln \lambda_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln \lambda_k \left(\sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^2\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln \lambda_k,$$

car P est unitaire.

On obtient $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \geqslant \prod_{j=1}^{n} h_{jj}$, ce qui est le résultat voulu.

2. On a par définition $R = \frac{1}{2}(H+\overline{H})$ et $S = \frac{1}{2i}(H-\overline{H})$. Puisque H est hermitienne, R est symétrique réelle et S antisymétrique réelle. Il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et Δ diagonale réelle telle ${}^tQRQ = \Delta = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On pose $S' = {}^tQSQ$ et $H' = {}^tQHQ = \Delta + iS'$. La matrice S' est antisymétrique comme S et H' est hermitienne positive comme H. On a de plus $\det H' = \det H$ et $\det R = \det \Delta$, car $(\det Q)^2 = 1$. Comme les termes diagonaux de H' sont égaux à ceux de Δ, puisque S' est antisymétrique, la première question appliquée à H' donne

$$\det H = \det H' \leqslant \prod_{j=1}^{n} \mu_j = \det \Delta = \det R,$$

car Δ est diagonale.

3. La matrice AA^* est hermitienne positive, car pour $X \in \mathbb{C}^n$, $X^*AA^*X = \|A^*X\|^2 \geqslant 0$. Son i-ième coefficient diagonal ($1 \leqslant i \leqslant n$) est $|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2$. En appliquant la première question, il vient

$$\det AA^* = |\det A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2\right).$$

On obtient le résultat voulu en prenant la racine carrée. $\triangleleft$

En considérant A^*A, *on aurait obtenu*

$$|\det A| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \sqrt{|a_{1j}|^2 + |a_{2j}|^2 + \cdots + |a_{nj}|^2}.$$

Dans l'exercice suivant, on démontre qu'une matrice hermitienne positive possède une unique racine carrée hermitienne positive. C'est un résultat classique que l'on rapprochera de celui de l'exercice 2.12. La deuxième question a été également traitée dans le cas euclidien (exercice 2.13).

2.59. Produit de matrices hermitiennes positives

1. Soit H une matrice hermitienne positive. Montrer qu'il existe une unique matrice K hermitienne positive telle que $\mathrm{K}^2 = \mathrm{H}$.

2. Soit H et K deux matrices hermitiennes positives. Montrer que les valeurs propres de HK sont réelles positives.

3. Soit H, K, L trois matrices hermitiennes positives. On suppose HKL hermitienne. Montrer qu'elle est positive (on commencera par supposer H définie positive).

(École polytechnique)

Solution.

1. La matrice $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable dans une base orthonormale : il existe $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale à termes diagonaux positifs et $\mathrm{P} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{H} = \mathrm{PDP}^*$. On écrit $\mathrm{D} = \Delta^2$, avec $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $\mathrm{H} = \mathrm{P}\Delta^2\mathrm{P}^* = (\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^*)^2$. La matrice $\mathrm{K} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^*$ convient.

Si K′ est une autre matrice répondant à la question, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont nécessairement les racines carrés de celle de K. Elle est donc semblable à Δ : il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{K}' = \mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q}^*$. On en déduit que $\mathrm{H} = \mathrm{PDP}^* = \mathrm{K}'^2 = \mathrm{Q}\Delta^2\mathrm{Q}^* = \mathrm{QDQ}^*$, ce qui peut encore s'écrire $\mathrm{Q}^*\mathrm{PD} = \mathrm{DQ}^*\mathrm{P}$. Si on pose $\mathrm{Q}^*\mathrm{P} = (a_{ij})$, on a pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a_{ij}\lambda_j = \lambda_i a_{ij}$. Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $a_{ij} = 0$. Dans tous les cas, on a $a_{ij}\sqrt{\lambda_j} = \sqrt{\lambda_i}a_{ij}$ et donc $\mathrm{Q}^*\mathrm{P}\Delta = \Delta\mathrm{Q}^*\mathrm{P}$, ce qui implique $\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^* = \mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q}^*$, soit $\mathrm{K} = \mathrm{K}'$, ce qui montre l'unicité.

2. Soit λ une valeur propre de HK et X un vecteur propre associé. On a

$$\mathrm{X}^*\mathrm{KHKX} = \lambda\mathrm{X}^*\mathrm{KX},$$

et comme H est positive, $\mathrm{X}^*\mathrm{KHKX} = (\mathrm{KX})^*\mathrm{H}(\mathrm{KX}) \geqslant 0$. Ainsi, si $\mathrm{X}^*\mathrm{KX} > 0$, on obtient $\lambda \geqslant 0$. Sinon $\mathrm{X}^*\mathrm{KX} = 0$ et d'après la question 1, il existe une matrice hermitienne positive K′ telle que $\mathrm{K} = \mathrm{K}'^2$. On peut alors écrire $0 = \mathrm{X}^*\mathrm{KX} = \mathrm{X}^*\mathrm{K}'^2\mathrm{X} = \|\mathrm{K}'\mathrm{X}\|^2$ et il s'ensuit que $\mathrm{K}'\mathrm{X} = 0$ et donc $\mathrm{KX} = 0$ et $\mathrm{HKX} = 0$. Dans ce cas, λ est nul.

Cette technique a été vue dans l'exercice 2.13.

3. Supposons que H soit définie positive. Soit H′ hermitienne positive telle que $\mathrm{H}'^2 = \mathrm{H}$. On a même H′ définie positive. On écrit alors

$$\mathrm{HKL} = \mathrm{H}'(\mathrm{H}'\mathrm{KLH}'^{-1})\mathrm{H}'.$$

Ainsi HKL et $\mathrm{H}'\mathrm{KLH}'^{-1}$ (cette dernière est aussi hermitienne, car égale à $\mathrm{H}'^{-1}\mathrm{HKLH}'^{-1}$) représentent la même forme hermitienne. Or le spectre de KL est contenu dans $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente. Donc celui de $\mathrm{H}'\mathrm{KLH}'^{-1}$ qui lui est semblable est aussi contenu dans $\mathbb{R}_+$. Donc, HKL est la matrice d'une forme hermitienne positive, puisque son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

La situation est plus délicate si on ne suppose plus H définie. On essaie de se ramener au premier cas. On identifie matrice et endomorphisme canoniquement associé. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\mathrm{M}(\alpha) = (\mathrm{H} + \alpha\mathrm{L})\mathrm{KL} = \mathrm{HKL} + \alpha\mathrm{LKL},$$

qui est une matrice hermitienne, car somme de matrices hermitiennes. Considérons l'orthogonal F de $\operatorname{Ker}\mathrm{H} \cap \operatorname{Ker}\mathrm{L}$. C'est un sous-espace stable par $\mathrm{H} + \alpha\mathrm{L}$ (c'est l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme hermitien). La restriction de $\mathrm{H} + \alpha\mathrm{L}$ à F est définie positive. En effet, elle est clairement positive et si on suppose que $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$ et $(\mathrm{H} + \alpha\mathrm{L})\mathrm{X} = 0$, on a

$$0 \leqslant \mathrm{X}^*\mathrm{HX} = -\alpha\mathrm{X}^*\mathrm{LX} \leqslant 0$$

et $\mathrm{X}^*\mathrm{HX} = \mathrm{X}^*\mathrm{LX} = 0$ et en faisant intervenir les racines carrées de H et L comme dans la question précédente, on en déduit $\mathrm{HX} = \mathrm{LX} = 0$ et $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}\mathrm{H} \cap \operatorname{Ker}\mathrm{L} = \mathrm{F}^{\perp}$. Finalement, on a bien $\mathrm{X} = 0$.

En considérant une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ constituée d'une base de F et d'une base de $\operatorname{Ker}\mathrm{H} \cap \operatorname{Ker}\mathrm{L}$, on voit qu'il existe une matrice U unitaire telle que

$$\mathrm{UHU}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{UKU}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1 & \mathrm{K}_2 \\ {}^t\mathrm{K}_2 & \mathrm{K}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ULU}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\mathrm{UHKLU}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_1\mathrm{K}_1\mathrm{L}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{UM}(\alpha)\mathrm{U}^* = \begin{pmatrix} (\mathrm{H}_1 + \alpha\mathrm{L}_1)\mathrm{K}_1\mathrm{L}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après ce qui précède, la matrice $\mathrm{H}_1 + \alpha\mathrm{L}_1$ est hermitienne définie positive. Comme les matrices K_1 et L_1 sont hermitiennes positives, l'étude du premier cas montre que $(\mathrm{H}_1 + \alpha\mathrm{L}_1)\mathrm{K}_1\mathrm{L}_1$ est positive. Il en est de même de $\mathrm{UM}(\alpha)\mathrm{U}^*$, car si $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n$ est écrit $\mathrm{X}\begin{pmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$, où $\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^r$, où $r = \dim \mathrm{F}$, on a

$$\mathrm{X}^*\mathrm{UHKLUX} = \mathrm{Y}^*(\mathrm{H}_1 + \alpha\mathrm{L}_1)\mathrm{K}_1\mathrm{L}_1\mathrm{Y} \geqslant 0.$$

La matrice $M(\alpha)$ qui lui est congruente est aussi positive. On a pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $X^*M(\alpha)X \geqslant 0$. En faisant tendre α vers 0, on obtient $X^*HKLX \geqslant 0$; la matrice HKL est bien positive. $\triangleleft$

L'existence d'une racine carrée est encore utilisée dans les deux exercices suivants.

2.60. Produit de Schur de deux matrices hermitiennes positives

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitiennes positives. Montrer que la matrice $C = (a_{ij}b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est hermitienne positive.

(École normale supérieure)

Solution.

Il est clair que C est hermitienne : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\overline{c_{ij}} = \overline{a_{ij}}\,\overline{b_{ij}} = a_{ji}b_{ji} = c_{ji}.$$

Pour démontrer que C est positive, nous considérons une matrice H hermitienne positive telle que $A = H^2$ (cf. exercice 2.59). On a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} h_{ik}h_{kj}b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{h_{ki}}h_{kj}b_{ij}$$

et pour ${}^tX = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$,

$${}^t\overline{X}CX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{ij}\overline{x_i}x_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}\overline{h_{ki}x_i}h_{kj}x_j\right).$$

La matrice B étant positive, la somme $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}\overline{h_{ki}x_i}h_{kj}x_j$ est positive pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On en déduit que ${}^t\overline{X}CX \geqslant 0$: la matrice C est hermitienne positive. $\triangleleft$

Si les matrices A et B sont définies positives, ${}^t\overline{X}CX = 0$ implique, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}\overline{h_{ki}x_i}h_{kj}x_j = 0$ et puisque B est définie positive, $h_{ki}x_i = 0$ pour tout i. Comme A, H est inversible, donc aucune de ses colonnes n'est nulle et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $h_{ki} \neq 0$, ce qui implique $x_i = 0$ et finalement $X = 0$: la matrice C est définie positive.

2.61. Inégalités

On se place dans $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne canonique.

1. Soit L un endomorphisme hermitien défini positif et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$, on a

$$\langle (\mathrm{Id} + \mathrm{L})^{-p}(x+y), x+y \rangle \leqslant \|x\|^2 + \langle \mathrm{L}^{-p}(y), y \rangle.$$

2. Soit H et K deux endomorphismes hermitiens définis positifs. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$, on a

$$\langle (\mathrm{H} + \mathrm{K})^{-1}(x+y), x+y \rangle \leqslant \langle \mathrm{H}^{-1}(x), x \rangle + \langle \mathrm{K}^{-1}(y), y \rangle.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de L ; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (strictement positives) correspondantes. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\mathrm{L}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et $(\mathrm{Id} + \mathrm{L})(x) = \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda_i) x_i e_i$. On en déduit que $\mathrm{L}^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} x_i e_i$ et $(\mathrm{Id} + \mathrm{L})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)^{-1} x_i e_i$. Si l'on note $y = (y_1, \dots, y_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{Id} + \mathrm{L})^{-p}(x+y), x+y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)^{-p}(x_i+y_i)e_i, \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)^{-p}|x_i+y_i|^2,\end{aligned}$$

et de même

$$\|x\|^2 + \langle \mathrm{L}^{-p}(y), y \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-p}|y_i|^2.$$

Pour montrer l'inégalité voulue, il suffit de vérifier que, pour tout i,

$$(1+\lambda_i)^{-p}|x_i+y_i|^2 \leqslant |x_i|^2 + \lambda_i^{-p}|y_i|^2.$$

On étudie le signe de $\delta = (1+\lambda)^{-p}|u+v|^2 - |u|^2 - \lambda^{-p}|v|^2$, pour $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned}\delta &\leqslant (1+\lambda)^{-p}(|u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|) - |u|^2 - \lambda^{-p}|v|^2 \\ &\leqslant ((1+\lambda)^{-p} - 1)|u|^2 + 2(1+\lambda)^{-p}|u||v| + ((1+\lambda)^{-p} - \lambda^{-p})|v|^2.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit de ce trinôme en $|u|$ vaut

$$\Delta = |v|^2(1+\lambda)^{-p}\lambda^{-p}(1 + \lambda^p - (1+\lambda)^p).$$

Il est négatif car $(1+\lambda)^p \geqslant 1+\lambda^p$, comme le montre la formule du binôme. Comme le coefficient de $|u|^2$ est négatif, on a $\delta \leqslant 0$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, ce qui permet de conclure.

2. On se ramène à la relation démontrée dans la question 1. Il existe un endomorphisme hermitien G défini positif tel que $\mathrm{H} = \mathrm{G}^2$ (voir exercice 2.59). Comme G^{-1} est aussi hermitien, on a

$$\langle \mathrm{H}^{-1}(x), x\rangle = \langle \mathrm{G}^{-1}(\mathrm{G}^{-1}(x)), x\rangle = \|\mathrm{G}^{-1}(x)\|^2.$$

Ceci nous pousse à poser $x' = \mathrm{G}^{-1}(x)$ et $y' = \mathrm{G}^{-1}(y)$. On a alors

$$\langle \mathrm{K}^{-1}(y), y\rangle = \langle \mathrm{K}^{-1}(\mathrm{G}(y')), \mathrm{G}(y')\rangle = \langle (\mathrm{G} \circ \mathrm{K}^{-1} \circ \mathrm{G})(y'), y'\rangle.$$

On pose $\mathrm{L} = \mathrm{G}^{-1} \circ \mathrm{K} \circ \mathrm{G}^{-1}$. L'endomorphisme L est hermitien et défini positif, car pour tout $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$$\langle \mathrm{L}(z), z\rangle = \langle \mathrm{K}(\mathrm{G}^{-1}(z)), \mathrm{G}^{-1}(z)\rangle > 0,$$

car K est défini positif.

En appliquant le résultat de la question 1, avec $p = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{H}^{-1}(x), x\rangle + \langle \mathrm{K}^{-1}(y), y\rangle &= \|x'\|^2 + \langle \mathrm{L}^{-1}(y'), y'\rangle \\ &\geqslant \langle (\mathrm{Id} + \mathrm{L})^{-1}(x'+y'), x'+y'\rangle.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à transformer cette dernière expression. On peut écrire

$$\mathrm{Id} + \mathrm{L} = \mathrm{Id} + \mathrm{G}^{-1} \circ \mathrm{K} \circ \mathrm{G}^{-1} = \mathrm{G}^{-1} \circ (\mathrm{G}^2 + \mathrm{K}) \circ \mathrm{G}^{-1} = \mathrm{G}^{-1} \circ (\mathrm{H} + \mathrm{K}) \circ \mathrm{G}^{-1}$$

et $(\mathrm{Id} + \mathrm{L})^{-1} = \mathrm{G} \circ (\mathrm{H}+\mathrm{K})^{-1} \circ \mathrm{G}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{Id} + \mathrm{L})^{-1}(x'+y'), x'+y'\rangle &= \langle \mathrm{G} \circ (\mathrm{H}+\mathrm{K})^{-1} \circ \mathrm{G}(x'+y'), x'+y'\rangle \\ &= \langle (\mathrm{H}+\mathrm{K})^{-1}(x+y), x+y\rangle\end{aligned}$$

et l'inégalité est démontrée. ◁

Voici maintenant la version hermitienne de la décomposition polaire. Elle a été présentée dans le cadre euclidien dans les exercices 2.26 et 2.27.

2.62. Décomposition polaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Montrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice hermitienne positive H telle que $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{H}^2$.

2. Montrer que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (U, H), où $U \in U_n$ et H est hermitienne positive, tel que $A = UH$.

3. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la norme définie par $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}$. Montrer que

$$\|A - U\| = \inf_{V \in U_n} \|A - V\| = d(A, U_n).$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $M = A^*A$. La matrice M est hermitienne positive. La question a été traitée dans l'exercice 2.59. Nous présentons une autre version pour l'unicité : soit H' une autre matrice répondant à la question. Le spectre de ${H'}^2$ est celui de M et donc celui de H^2. Comme les valeurs propres de H' sont aussi positives, H et H' ont les mêmes valeurs propres.

Soit λ une valeur propre de H (et donc de H'). On sait déjà que $\mathrm{Ker}(H' - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(M - \lambda^2 I_n) = \mathrm{Ker}(H - \lambda I_n)$, la dernière égalité étant justifiée par construction de H. Comme H' est diagonalisable, la somme de ses sous-espaces propres vaut $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \mathrm{Ker}(H - \lambda I_n)$ et pour des raisons de dimension, $\mathrm{Ker}(H' - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(H - \lambda I_n)$. Il s'ensuit que $H = H'$ puisqu'elles ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres.

2. *Unicité.* Si $A = UH$, avec $U \in U_n$ et H hermitienne positive, alors $A^*A = HU^*UH = H^2$. D'après la question 1, H est unique. La matrice H étant inversible puisque A l'est, $U = AH^{-1}$ est uniquement déterminée.

Existence. Prenons H la racine carrée de $M = A^*A$ définie dans la question précédente. Ici, H est hermitienne définie positive, car inversible comme M. On peut poser $U = AH^{-1}$. Vérifions que U est unitaire :

$$U^*U = H^{-1}A^*AH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I_n.$$

3. En gardant les notations précédentes, on écrit $H = P^*\Delta P$, où P est unitaire et $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On peut remarquer que si M et V sont deux matrices de taille n, V étant unitaire, on a $\|VM\| = \|MV\| = \|M\|$. On en déduit

$$\begin{aligned}\|A - U\|^2 = \|U(H - I_n)\|^2 = \|H - I_n\|^2 = \mathrm{Tr}(H - I_n)^2 \\ = \mathrm{Tr}(\Delta - I)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2 .\end{aligned}$$

Pour $V \in U_n$, on obtient

$$\begin{aligned}\|A - V\| &= \|UH - V\| = \|V^{-1}UH - I_n\| = \|V^{-1}UP^*\Delta P - I_n\| \\ &= \|P(V^{-1}UP^*\Delta P - I_n)P^*\| = \|PV^{-1}UP^*\Delta - I_n\|,\end{aligned}$$

car P est unitaire. On pose $W = PV^{-1}UP^*$ qui est une matrice unitaire. On obtient

$$\begin{aligned}\|A - V\|^2 &= \|W\Delta - I_n\|^2 = \mathrm{Tr}(\Delta W^* W\Delta - W\Delta - \Delta W^* + I_n) \\ &= \mathrm{Tr}(\Delta^2 - W\Delta - \Delta W^* + I_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^2 - (w_{ii} + \overline{w_{ii}})\lambda_i + 1\right) \\ &\geqslant \sum_{i=1} \left(\lambda_i^2 - 2\lambda_i + 1\right) = \|A - U\|^2,\end{aligned}$$

car $\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}|^2 = 1$ implique $\mathrm{Re}(w_{ii}) \leqslant |w_{ii}| \leqslant 1$. L'égalité a lieu si $w_{ii} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc $W = I_n$. On a alors $V^{-1}U = I_n$ et donc $V = U$. $\triangleleft$

Beaucoup d'autres exercices du début de ce chapitre peuvent s'adapter en termes hermitiens. Sans faire un catalogue exhaustif, nous précisons que c'est notamment le cas pour les décompositions classiques et le théorème du minimax (voir exercices 2.29 et 2.37).

2.63. Écriture d'un endomorphisme comme combinaison linéaire d'endomorphismes unitaires

Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension n. On note $\| \ \|$ la norme dans $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à la norme de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence de :

(i) f est hermitien et $\|f\| \leqslant 1$;

(ii) il existe un endomorphisme unitaire g de E tel que

$$f = \frac{1}{2}(g + g^*).$$

2. Montrer que tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre endomorphismes unitaires de E.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Supposons que $f = \frac{1}{2}(g + g^*)$, avec g unitaire. Alors f est auto-adjoint et d'autre part comme $\|g\| = \|g^*\| = 1$ on a $\|f\| \leqslant 1$. Donc (ii) implique (i).

Traitons la réciproque matriciellement. Soit A la matrice de f dans une base orthonormée B de E. La matrice A est hermitienne et donc unitairement semblable à une matrice diagonale réelle $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$. Soit U unitaire telle que $\mathrm{A} = \mathrm{UDU}^*$. Par hypothèse, $\| f\| \leqslant 1$ de sorte que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $d_i \in [-1, 1]$. On peut donc poser $d_i = \cos\theta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Posons alors $\mathrm{V} = \mathrm{U}\,\mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})\mathrm{U}^*$. La matrice V est unitaire et on a $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{V} + \mathrm{V}^*)$.

2. Le résultat est vérifié pour les endomorphismes hermitiens de norme inférieure à 1. Si f est hermitien de norme supérieure à 1, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $\dfrac{f}{\|f\|}$. Pour terminer, il suffit de prouver que tout endomorphisme f de E est combinaison linéaire de deux endomorphismes hermitiens. Or, il suffit d'écrire

$$f = \frac{f + f^*}{2} + \frac{f - f^*}{2} = \underbrace{\frac{f + f^*}{2}}_{\text{hermitien}} + i \underbrace{\frac{i(f^* - f)}{2}}_{\text{hermitien}}. \triangleleft$$

En fait, on peut avoir mieux avec la décomposition polaire (cf. exercice 2.62) : tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ peut s'écrire $f = uh$ avec u unitaire et h hermitien. Il en résulte que f est combinaison linéaire de deux endomorphismes unitaires.

À partir de là, on peut montrer que le centre du groupe unitaire de E *correspond aux homothéties unitaires. En effet, si $u \in \mathrm{Z}(\mathrm{U}(\mathrm{E}))$, u commute avec tout élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'après le résultat précédent. Donc u est une homothétie. Réciproquement, les homothéties unitaires c'est-à-dire $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ avec $|\lambda| = 1$ sont dans le centre de* U(E)*. En particulier,* $\mathrm{Z}(\mathrm{U}(\mathrm{E})) \simeq \mathrm{S}^1$.

L'exercice suivant est l'occasion de démontrer un théorème général de réduction des endomorphismes normaux (ce sont les endomorphismes qui commutent avec leur adjoint). Nous allons constater qu'ils sont diagonalisables en base orthonormée. On peut démontrer à partir de là le théorème spectral pour les endomorphismes hermitiens et le fait qu'une matrice unitaire est diagonalisable.

2.64. Matrices normales

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $AA^* = A^*A$ (on dit que A est *normale*) ;

(*ii*) A est diagonalisable en base orthonormale ;

(*iii*) $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$.

(**École polytechnique**)

Solution.

• Montrons que si la condition $AA^* = A^*A$ est réalisée, alors A est diagonalisable dans une base orthonormale, *i.e.* il existe U unitaire telle que $A = UDU^*$, où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. L'hypothèse se traduit par $f^* \circ f = f \circ f^*$, où f^* est l'adjoint de f. Il faut démontrer que f est diagonalisable dans une base orthonormale.

On raisonne par récurrence sur n, le résultat étant évident pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons-le au rang n. Soit λ une valeur propre de f, E_λ l'espace propre correspondant. Comme f^* et f commutent, E_λ est stable par f^*. Posons $F_\lambda = (E_\lambda)^\perp$. Montrons que F_λ est stable par f et f^*. Soit $y \in F_\lambda$. Pour tout $x \in E_\lambda$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, f^*(y)\rangle &= \langle f(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle = 0 \\ \langle x, f(y)\rangle &= \langle f^*(x), y\rangle = 0, \end{aligned}$$

car $f^*(x) \in E_\lambda$. Ainsi $f^*(y)$ et $f(y)$ appartiennent à F_λ.

Comme $f_{|F_\lambda}$ et $(f_{|F_\lambda})^* = f^*_{|F_\lambda}$ commutent et que $\dim F_\lambda \leqslant n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $f_{|F_\lambda}$. Il existe une base orthonormale de F_λ qui diagonalise $f_{|F_\lambda}$. En lui adjoignant une base orthonormale de E_λ, on obtient une base orthonormale de E qui diagonalise f. L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est prouvée.

• Montrons que $(ii) \Longrightarrow (iii)$: on a $A = UDU^*$, avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et U unitaire. On en déduit que $A^* = U\overline{D}U^*$ et $AA^* = UD\overline{D}U^*$. On obtient alors

$$\mathrm{Tr}(AA^*) = \mathrm{Tr}(UD\overline{D}U^*) = \mathrm{Tr}(D\overline{D}U^*U) = \mathrm{Tr}(D\overline{D}) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

C'est ce qu'on voulait.

• Pour terminer il reste à prouver que $(iii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$. *A priori*, on ne peut pas diagonaliser A dans une base orthonormale, mais on peut la trigonaliser dans une telle base, *i.e.* il existe T matrice triangulaire supérieure et U unitaire telle que $\mathrm{A} = \mathrm{UTU}^*$.

En effet, puisque $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable et il existe T′ triangulaire supérieure et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PT'P}^{-1}$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{B}$ la base dont la matrice de passage par rapport à $\mathcal{B}_0$ est P et $\mathcal{B}'$ la base orthonormale obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. La matrice de passage T″ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure et $\mathrm{U} = \mathrm{PT''}$, matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}'$ est unitaire. En écrivant $\mathrm{P} = \mathrm{UT''}^{-1}$, on obtient enfin $\mathrm{A} = \mathrm{UT''}^{-1}\mathrm{T'T''U}^*$. La matrice $\mathrm{T} = \mathrm{T''}^{-1}\mathrm{T'T''}$ est triangulaire supérieure et a les propriétés voulues.

On a alors $\mathrm{A}^* = \mathrm{UT}^*\mathrm{U}^*$, $\mathrm{AA}^* = \mathrm{UTT}^*\mathrm{U}^*$ et

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{AA}^*) = \mathrm{Tr}(\mathrm{UTT}^*\mathrm{U}^*) = \mathrm{Tr}(\mathrm{TT}^*) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |t_{ij}|^2.$$

Comme les termes diagonaux de T sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, puisque T est semblable à A, l'hypothèse s'écrit $\sum\limits_{i \neq j} |t_{ij}|^2 = 0$. La matrice T est donc diagonale. Ainsi T commute avec T^* et $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{UT}^*\mathrm{TU}^* = \mathrm{UTT}^*\mathrm{U}^* = \mathrm{AA}^*$ ce qui prouve (*i*). ◁

Dans la dernière implication on a prouvé le théorème de Schur : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans une base orthonormée.

Nous terminons ce chapitre par deux énoncés délicats.

2.65. Théorème de Mirman (1968)

$\mathbb{C}^n$ est muni de sa structure hermitienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \mathrm{A}^* & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice B est positive si, et seulement si, $\|\mathrm{A}\| \leqslant 1$.

2. Soit $\mathrm{F} = \{{}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{AX}, \ \|\mathrm{X}\| = 1\}$ et (H) la propriété : il existe trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 de module 1 tels que F soit contenu dans le triangle $z_1z_2z_3$.

Montrer que (H) implique $\|\mathrm{A}\| \leqslant 1$. On pourra d'abord montrer que (H) équivaut à : il existe trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 de module 1 et trois matrices hermitiennes positives A_1, A_2, A_3 tels que $\mathrm{A} = z_1\mathrm{A}_1 + z_2\mathrm{A}_2 + z_3\mathrm{A}_3$ et $\mathrm{I}_n = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. La matrice B est clairement hermitienne. Considérons un élément quelconque $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ que nous écrirons $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où X et Y sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a alors $BZ = \begin{pmatrix} X + AY \\ A^*X + Y \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} Z^*BZ &= X^*X + X^*AY + Y^*A^*X + Y^*Y \\ &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 + X^*AY + \overline{X^*AY} \\ &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(X^*AY). \end{aligned}$$

On veut montrer que Z^*BZ est $\geqslant 0$ pour tout $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\|A\| \leqslant 1$.

Supposons $\|A\| \leqslant 1$. On obtient alors

$$|\mathrm{Re}(X^*AY)| \leqslant |X^*AY| \leqslant \|X\|\|AY\| \leqslant \|A\|\|X\|\|Y\| \leqslant \|X\|\|Y\|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme subordonnée. On en déduit que, pour tout $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$,

$$Z^*BZ \geqslant \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\|X\|\|Y\| \geqslant (\|X\| - \|Y\|)^2 \geqslant 0,$$

donc B est positive.

Supposons $\|A\| > 1$. On a, par définition, $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$. Comme la sphère unité est compacte, cette borne supérieure est atteinte. Il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|Y\| = 1$ et $\|AY\| = \|A\|$. Prenons enfin $X = AY$ et $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. On a alors $X^*AY = \|X\|^2 = \|AY\|^2 = \|A\|^2$. On en déduit que

$$Z^*BZ = \|A\|^2 + 1 - 2\|A\|^2 = 1 - \|A\|^2 < 0.$$

La matrice B n'est pas positive.

2. Pour commencer, démontrons l'équivalence suggérée par l'énoncé. Supposons qu'il existe trois nombres complexes de module 1, z_1, z_2 et z_3 et trois matrices hermitiennes positives A_1, A_2 et A_3 tels que

$$A = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3 \quad \text{et} \quad I_n = A_1 + A_2 + A_3.$$

On a alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, de norme 1,

$$X^*AX = \sum_{i=1}^{3} z_i X^*A_iX \ \text{ et } \ 1 = \|X\|^2 = X^*I_nX = \sum_{i=1}^{3} X^*A_iX.$$

Les nombres complexes X^*A_iX sont des réels positifs, puisque A_i est hermitienne positive. Leur somme est égale à 1. L'égalité vérifiée par

X^*AX signifie qu'il appartient à l'enveloppe convexe de $\{z_1, z_2, z_3\}$, c'est-à-dire à l'intérieur du triangle $z_1z_2z_3$. Ceci étant vrai pour tout X de norme 1, F est inclus dans le triangle $z_1z_2z_3$.

Supposons réciproquement qu'il existe trois nombres de module 1 tels que F soit inclus dans le triangle $z_1z_2z_3$. On peut supposer que z_1, z_2 et z_3 ne sont pas alignés, *i.e.* qu'on a un vrai triangle. Sinon F est inclus dans un segment et on peut choisir un troisième nombre complexe de module 1 arbitraire non aligné avec les extrémités du segment. Déterminons trois matrices hermitiennes A_1, A_2, A_3 telles que

$$A_1 + A_2 + A_3 = I_n \ \text{ et } \ z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3 = A.$$

Comme les matrices A_i doivent être hermitiennes, on doit avoir de plus $\overline{z_1}A_1 + \overline{z_2}A_2 + \overline{z_3}A_3 = A^*$. On résout le système constitué de ces trois équations. Les z_i étant distincts, on trouve une solution unique. On a par exemple

$$A_1 = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}(z_1A - z_1(z_2 + z_3)I_n + z_1z_2z_3A^*)$$

et des expressions similaires pour A_2 et A_3. On vérifie que A_1 est hermitienne. Les trois nombres z_i sont de module 1. On en déduit que $\overline{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}\right) = \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{z_1^2z_2z_3}$, puis que

$$A_1^* = \frac{z_1^2z_2z_3}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}\left(\frac{1}{z_1}A^* - \frac{z_2 + z_3}{z_1z_2z_3}I_n + \frac{1}{z_1z_2z_3}A\right) = A_1.$$

On montre de même que A_2 et A_3 sont hermitiennes. Reste à démontrer qu'elles sont positives. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de norme 1, X^*AX est à l'intérieur du triangle $z_1z_2z_3$ donc il existe un triplet de réels positifs $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}_+^3$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ et $X^*AX = \lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 + \lambda_3z_3$. D'autre part, des relations vérifiées par les matrices A_i on tire

$$X^*AX = z_1X^*A_1X + z_2X^*A_2X + z_3X^*A_3X, \ \ X^*A_1X + X^*A_2X + X^*A_3X = 1.$$

Mais la famille (z_1, z_2, z_3) étant une base affine du plan, X^*AX possède un unique triplet de coordonnées barycentriques. On en déduit que pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on a $X^*A_iX = \lambda_i \geqslant 0$. Ceci est vrai pour tout X de norme 1 et donc en fait pour X quelconque, car si $X \neq 0$, on a $X^*A_iX = \|X\|^2Y^*A_iY$, avec $Y = \frac{1}{\|X\|}X$. Ceci montre que les matrices A_i sont positives.

D'après la question 1, pour démontrer que $\|A\| \leqslant 1$, il suffit de démontrer que B est positive. D'après l'équivalence démontrée précédemment, on a $A = z_1A_1 + z_2A_2 + z_3A_3$, $A^* = \overline{z_1}A_1 + \overline{z_2}A_2 + \overline{z_3}A_3$ et

$I_n = A_1 + A_2 + A_3$. On obtient

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} A_1 + A_2 + A_3 & z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3 \\ \overline{z_1} A_1 + \overline{z_2} A_2 + \overline{z_3} A_3 & A_1 + A_2 + A_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & z_1 A_1 \\ \overline{z_1} A_1 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & z_2 A_2 \\ \overline{z_2} A_2 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 & z_3 A_3 \\ \overline{z_3} A_3 & A_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pour démontrer que B est positive, il suffit de démontrer que chacune des matrices hermitiennes $B_i = \begin{pmatrix} A_i & z_i A_i \\ \overline{z_i} A_i & A_i \end{pmatrix}$ l'est. En écrivant comme dans la question 1, $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on obtient

$$Z^* B_i Z = X^* A_i X + Y^* A_i Y + (z_i + \overline{z_i}) X^* A_i Y.$$

La matrice A_i étant positive, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient, puisque z_i est de module 1,

$$|(z_i + \overline{z_i}) X^* A_i Y| \leqslant 2|X^* A_i Y| \leqslant 2\sqrt{X^* A_i X \cdot Y^* A_i Y}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}Z^* B_i Z &\geqslant X^* A_i X + Y^* A_i Y - 2\sqrt{X^* A_i X \cdot Y^* A_i Y} \\ &\geqslant (\sqrt{X^* A_i X} - \sqrt{Y^* A_i Y})^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

La matrice B qui est une somme de trois matrices hermitiennes positives est positive et $\|A\| \leqslant 1$. ◁

2.66. Matrices unitairement congruentes à une matrice triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que cette matrice admet une décomposition $A = UT\,{}^tU$, avec U unitaire et T triangulaire supérieure si, et seulement si, le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Si $A = UT\,{}^tU$, avec U unitaire et $T = (t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ triangulaire supérieure, on a

$$A\overline{A} = UT\,{}^tU\overline{U}\,\overline{T}\,{}^t\overline{U} = UT\overline{T}U^{-1},$$

car ${}^t\overline{U} = U^{-1}$. Les matrices T, $\overline{T}$ et donc $T\overline{T}$ sont triangulaires supérieures. Les termes diagonaux, c'est-à-dire les valeurs propres de $T\overline{T}$ sont les produits $t_{ii}\overline{t_{ii}} = |t_{ii}|^2$ de ceux de T et $\overline{\mathrm{T}}$. Ils sont positifs. La matrice $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}$ qui lui est semblable a aussi des valeurs propres réelles positives.

On démontre la réciproque par récurrence sur n. Il n'y a rien à démontrer pour $n = 1$. On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$ ($n \geqslant 2$) et on considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}) \subset \mathbb{R}_+$.

Notons que si $\mathrm{A} = \mathrm{UT}{}^t\mathrm{U} = \mathrm{UT}\overline{\mathrm{U}}^{-1}$ et si X_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{A}(\overline{\mathrm{U}}\mathrm{X}_1) = \mathrm{UTX}_1 = t_{11}\mathrm{UX}_1 = t_{11}\overline{\overline{\mathrm{U}}\mathrm{X}_1}.$$

Le vecteur $\mathrm{X} = \overline{\mathrm{U}}\mathrm{X}_1$ vérifie donc $\mathrm{AX} = t_{11}\overline{\mathrm{X}}$. Mais on a alors

$$\overline{\mathrm{A}}\mathrm{AX} = t_{11}\overline{\mathrm{AX}} = |t_{11}|^2\mathrm{X}.$$

Montrons, pour commencer l'existence d'un tel vecteur X.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ une valeur propre de $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}$, $\mathrm{X} \neq 0$ un vecteur propre associé. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}$. On a alors

$$\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{Y} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{X}} = \mathrm{A}\overline{\lambda\mathrm{X}} = \lambda\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \lambda\mathrm{Y},$$

car λ est réel. Ainsi Y est aussi un vecteur propre de $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}$ pour la valeur propre λ. Montrons qu'on peut choisir X tel que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}$ soit colinéaire à X. Si le vecteur X ci-dessus ne convient pas, la famille (X, Y) est libre et on pose $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} + \alpha\mathrm{X}$, où $\alpha = \sqrt{\lambda}$ (ceci est possible car $\lambda \geqslant 0$). On a alors

$$\mathrm{A}\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{Y}} + \alpha\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Y} = \lambda\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Y} = \alpha(\mathrm{Y} + \alpha\mathrm{X}) = \alpha\mathrm{Z}.$$

Par ailleurs Z est un vecteur propre de $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}$ pour la valeur propre λ, car combinaison linéaire de tels vecteurs, non nul car (X, Y) est libre.

En normant le vecteur obtenu précédemment, on trouve donc un vecteur unitaire X et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mu\mathrm{X}$. On considère une matrice unitaire U_1 dont le premier vecteur colonne est X et on pose $\mathrm{B} = \mathrm{U}_1^{-1}\mathrm{A}{}^t\mathrm{U}_1{}^{-1} = \mathrm{U}_1^{-1}\mathrm{A}\overline{\mathrm{U}_1}$. On a $\mathrm{U}_1\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}$ et donc $\overline{\mathrm{U}_1}\mathrm{X}_1 = \overline{\mathrm{X}}$. On en déduit que $\mathrm{BX}_1 = \mathrm{U}_1^{-1}\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mu\mathrm{U}_1^{-1}\mathrm{X} = \mu\mathrm{X}_1$. La première colonne de B est donc $\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mu & {}^t\mathrm{Y} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$. On en déduit que $\overline{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \overline{\mu} & {}^t\overline{\mathrm{Y}} \\ 0 & \overline{\mathrm{C}} \end{pmatrix}$ et donc qu'il existe $\mathrm{Z} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} |\mu|^2 & {}^t\mathrm{Z} \\ 0 & \mathrm{C}\overline{\mathrm{C}} \end{pmatrix}.$$

Comme $B\overline{B} = U_1^{-1}A\overline{A}U_1$, le spectre de $B\overline{B}$ est égal à celui de $A\overline{A}$, donc est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Mais on a aussi $\mathrm{Sp}(B\overline{B}) = \mathrm{Sp}(C\overline{C}) \cup \{|\mu|^2\}$, donc le spectre de $C\overline{C}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe T triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ et $V \in U_{n-1}(\mathbb{C})$ tels que $C = VT\,{}^tV$. On pose $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \in U_n(\mathbb{C})$. On a alors

$$U_2^{-1}B\,{}^tU_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & {}^tY \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tV^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & {}^t(V^{-1}Y) \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

On note T′ cette matrice triangulaire supérieure. On obtient

$$A = U_1B\,{}^tU_1 = U_1U_2T'\,{}^tU_2\,{}^tU_1 = U_1U_2T'\,{}^t(U_1U_2),$$

ce qui est le résultat voulu puisque $U_1U_2 \in U_n(\mathbb{C})$. $\triangleleft$

Chapitre 3

Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit les espaces vectoriels seront toujours de dimension finie. Si rien n'est précisé, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque de caractéristique différente de 2, mais la majorité des exercices concerneront les formes quadratiques réelles.

Nous commençons ce chapitre par quelques exercices sur les formes bilinéaires quelconques. Si b est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E la relation d'orthogonalité associée à b qui est définie par $x \perp y \iff b(x,y) = 0$ est évidemment une relation symétrique. Dans l'exercice suivant on demande de trouver toutes les formes bilinéaires qui vérifient cette propriété.

3.1. Formes bilinéaires réflexives

Déterminer les formes bilinéaires φ sur un espace vectoriel réel E de dimension finie qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y,x) = 0.$$

(École polytechnique)

Solution.

Les formes bilinéaires symétriques conviennent. Mais ce ne sont pas les seules, puisque les formes antisymétriques conviennent aussi. On va voir qu'en réalité ce sont les seules solutions.

Soit φ une forme bilinéaire sur E vérifiant l'hypothèse. Pour tout $x \in E$ notons $f_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par $f_x(y) = \varphi(x,y)$ et $g_x(y) = \varphi(y,x)$ pour tout $y \in E$. Il s'agit de formes linéaires sur E et par hypothèse $\operatorname{Ker} f_x = \operatorname{Ker} g_x$ (en effet, l'implication de l'hypothèse est en fait une équivalence par symétrie). Il en résulte que f_x et g_x sont proportionnelles ; il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $g_x = \lambda_x f_x$. Le réel λ_x est unique lorsque f_x est non nulle, mais peut être choisi quelconque lorsque f_x et g_x sont toutes les deux nulles. Autrement dit, si f (resp. g) désigne l'application linéaire de E dans E^* qui à x associe f_x (resp. g_x) on a

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lambda_x g(x).$$

On va montrer que f et g sont proportionnelles. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme. *Soit* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels, u et v deux éléments de* $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Si pour tout $x \in \mathrm{E}$ il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x v(x)$, alors il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$.*

Démonstration.

Dans le cas où v est bijective, on a alors $v^{-1} \circ u(x) = \lambda_x x$ pour $x \in \mathrm{E}$. Or, d'après un lemme classique (cf. par exemple page 247 du tome 1 d'algèbre pour une preuve), cela implique que $v^{-1} \circ u$ est une homothétie : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v^{-1} \circ u = \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et donc $u = \lambda v$.

Traitons le cas général. La propriété vérifiée par u et v implique en particulier que $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$. Donc d'après le lemme de factorisation (voir l'exercice 6.4. du tome 1 d'algèbre), il existe $h \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}\, v, \mathrm{F})$ telle que $u = h \circ v$. On a pour tout $x \in \mathrm{E}$, $u(x) = h(v(x)) = \lambda_x v(x)$. D'après le lemme classique rappelé ci-dessus, h est une homothétie : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. $\diamondsuit$

En appliquant le lemme à f et g, on montre l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $f_x = \lambda g_x$, c'est-à-dire

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x, y) = \lambda \varphi(y, x).$$

Il ne reste plus qu'à voir que λ vaut forcément 1 ou -1. En itérant, on a $\lambda\varphi(x, y) = \lambda^2\varphi(x, y)$ pour tout couple (x, y). Si φ est nulle, elle est symétrique ; sinon, on a $\lambda^2 = 1$, d'où le résultat. $\triangleleft$

On peut noter qu'en fait le résultat reste valable sur un corps quelconque et sur un espace de dimension quelconque avec la même preuve.

L'exercice suivant apporte une généralisation du résultat de l'exercice précédent.

3.2. Caractérisation des applications bilinéaires symétriques ou antisymétriques

Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $f : \mathrm{E}^2 \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bilinéaire telle que $f(x, y)$ est colinéaire à $f(y, x)$ pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Montrer que f est symétrique ou antisymétrique.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Nous allons faire usage du lemme démontré dans l'exercice précédent.

Pour résoudre l'exercice proposé, il suffit de l'appliquer deux fois de suite. Pour x dans E notons g_x et d_x les applications linéaires de E dans F définies par $g_x(y) = f(x,y)$ et $d_x(y) = f(y,x)$ pour tout $y \in$ E. D'après l'hypothèse, il existe pour tout $y \in$ E un réel λ_y tel que $g_x(y) = \lambda_y d_x(y)$. D'après le lemme cela impose l'existence d'un réel α_x indépendant de y (mais dépendant *a priori* de x) tel que $g_x = \alpha_x d_x$. Il est maintenant possible d'appliquer à nouveau le lemme mais aux applications linéaires $g : \mathrm{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ qui à x associe g_x et $d : \mathrm{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ qui à x associe d_x. Il existe donc un réel μ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x,y) = \mu f(y,x).$$

On applique cette relation en prenant $y = x$ pour trouver μ. Deux cas se présentent.

• On a $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in$ E. Alors le développement

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$$

montre que $f(x,y) = -f(y,x)$ c'est-à-dire que f est antisymétrique.

• Il existe $a \in$ E tel que $f(a,a) \neq 0$. On a alors forcément $\mu = 1$ et f est symétrique. $\lhd$

Si q est une forme quadratique sur E, *un vecteur x tel que $q(x) = 0$ sera dit isotrope. L'ensemble des vecteurs isotropes,* $\mathrm{C}(q) = q^{-1}(0)$, *est un cône de* E *appelé cône isotrope de q. Bien entendu, pour une forme réelle définie positive (ou négative!) ce cône isotrope est réduit à $\{0\}$. Il est remarquable, et c'est l'objet de l'exercice suivant, que lorsque ce cône isotrope n'est pas trivial il contienne toujours une base de* E.

3.3. Base formée de vecteurs isotropes

Soit E un espace réel de dimension finie $n \geqslant 2$, q une forme quadratique non dégénérée sur E. On suppose qu'il existe $x \in$ E non nul tel que $q(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $y \in$ E tel que (x,y) soit libre et $q(y) = 0$.

2. Montrer l'existence d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E telle que $q(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

(**École polytechnique**)

Solution.

1. Notons b la forme polaire de q. Comme q n'est pas dégénérée, il existe un vecteur $z \in$ E tel que $b(x,z) \neq 0$. Comme $q(x) = b(x,x) = 0$ le vecteur z n'est pas colinéaire à x. On va chercher y dans le plan $\mathrm{Vect}(x,z)$

sous la forme $y = z + tx$. On a $q(y) = b(z + tx, z + tx) = b(z, z) + 2tb(x, z)$ de sorte qu'il suffit de prendre $t = -\dfrac{b(z,z)}{2b(x,z)}$ pour que $q(y) = 0$. Le vecteur y obtenu est clairement non colinéaire à x.

2. Prenons naturellement $e_1 = x$. On va utiliser la même idée que dans la question précédente : il suffit de prouver l'existence d'une base $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ de E telle que $b(e_1, f_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. En effet, la question précédente montre l'existence dans chaque plan $\mathrm{Vect}(e_1, f_k)$ d'un vecteur isotrope e_k de la forme $f_k + t_k e_1$. Il est alors clair que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs isotropes. Passons à la preuve de l'existence d'une telle base. L'application $y \longmapsto b(e_1, y)$ est une forme linéaire non nulle sur E. Son noyau est un hyperplan de E (c'est l'orthogonal au sens de b de la droite $\mathbb{R}e_1$). Cet hyperplan contient la droite $\mathbb{R}e_1$, car e_1 est isotrope. Prenons alors une base de cet hyperplan de la forme $(e_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ et rajoutons le vecteur z (où z est, comme dans la question 1, un vecteur tel que $b(e_1, z) \neq 0$)) pour obtenir une base de E. Posons $f_k = g_k + z$ pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$ et $f_n = z$. Il est évident que la famille $(e_1, f_2, \ldots, f_n) = (e_1, g_2 + z, \ldots, g_{n-1} + z, z)$ reste une base de E. Et de plus $b(e_1, f_k) = b(e_1, z) \neq 0$ pour tout k. D'où le résultat. $\lhd$

Dans l'exercice suivant, on regarde dans quelle mesure le cône isotrope caractérise une forme quadratique sur un espace vectoriel complexe.

3.4. Formes quadratiques ayant même cône isotrope

Soit q, q' deux formes quadratiques sur un espace vectoriel complexe E telles que $q(x) = 0$ si et seulement si $q'(x) = 0$. Que dire de q et q' ?

(École polytechnique)

$\rhd$ **Solution.**

Nous allons montrer que q' et q sont proportionnelles. Si q est nulle alors q' est aussi nulle et c'est terminé. Sinon il existe $x \in$ E tel que $q(x) \neq 0$. Posons $\lambda = \dfrac{q'(x)}{q(x)}$ (λ est non nul) et considérons y un vecteur quelconque de E. Pour tout réel t on

$$q(y + tx) = q(y) + 2tb(x, y) + q(x)t^2$$

et

$$q'(y + tx) = q'(y) + 2tb'(x, y) + q'(x)t^2 = q'(y) + 2tb'(x, y) + \lambda q(x)t^2$$

où b et b' désignent les formes polaires de q et q' respectivement. Par hypothèse les deux trinômes ci-dessus ont les mêmes racines dans $\mathbb{C}$. Ils sont donc proportionnels et en particulier $q'(y) = \lambda q(y)$. On a donc $q' = \lambda q$ comme annoncé. La réciproque est évidente. ◁

Bien entendu le résultat ne reste pas vrai sur $\mathbb{R}$, car les trinômes n'y sont pas forcément scindés. Par exemple $q(x,y,z) = x^2 + y^2$ et $q'(x,y,z) = x^2 + 2y^2$ sont deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ ayant toutes les deux la droite $x = y = 0$ pour cône isotrope mais elles ne sont pas proportionnelles. Toutefois si on suppose que les deux formes quadratiques sont non dégénérées et ont un même cône isotrope non nul alors on peut prouver qu'elles restent proportionnelles, et ce sur n'importe quel corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

On déduit immédiatement de l'exercice que si u est un automorphisme de E qui conserve le cône isotrope de q alors u est une similitude, c'est-à-dire de la forme λv avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et v dans le groupe orthogonal de q (voir page 226 la définition du groupe orthogonal).

3.5. Composantes connexes par arcs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. On considère $\Sigma_q = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1,\ q(x) = 0\}$ où $\|x\|$ est la norme euclidienne canonique de x.

1. Décrire Σ_q lorsque $n \in \{1,2,3\}$.

2. On suppose $n \geqslant 3$. Soient x, y dans Σ_q. Montrer que y est dans la composante connexe par arcs de x ou de $-x$ dans Σ_q.

(**École normale supérieure**)

Solution.

L'ensemble Σ_q est l'intersection du cône isotrope de q et de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Il est symétrique par rapport à l'origine. Par homogénéité de q, il est évident que tout vecteur non nul du cône isotrope est relié à un point de Σ_q par un segment. On en déduit aisément que le nombre de composantes connexes par arcs[1] de $C(q) \setminus \{0\}$ est égal au nombre de composantes connexes par arcs de Σ_q. L'objet de l'exercice est de montrer que pour $n \geqslant 3$, l'ensemble Σ_q est connexe par arcs ou admet deux composantes connexes par arcs opposées.

1. Quelques remarques générales pour commencer.

Il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice A de q est diagonale. On obtient $q(x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, où $(a_1, \dots, a_n)$ sont les valeurs propres de A. Si r (resp. s) est le nombre

[1] La définition de cette notion est rappelée page 68

de valeurs propres strictement positives (resp. négatives) de A, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2$$

(on pose $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_i}}\varepsilon_i$ si $a_i > 0$, $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{-a_i}}\varepsilon_i$ si $a_i < 0$). Pour l'étude de Σ_q, on se placera dorénavant dans une telle base.

Le rang de q est alors $r + s$. Notons aussi que comme q et $-q$ ont le même cône isotrope on peut se limiter au cas $r \geqslant s$.

Lorsque q est nulle, son cône isotrope est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier et Σ_q est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ qui est connexe par arcs dès que $n \geqslant 2$. Lorsque q est définie positive ou négative Σ_q est vide. Cela recouvre tous les cas lorsque $n = 1$. Étudions les cas restants pour $n = 2$ ou 3.

• Supposons $n = 2$ et q non dégénérée et non définie ($r = s = 1$). Elle s'écrit $q(xe_1 + x_2 e_2) = x^2 - y^2$: son cône isotrope est la réunion de deux droites distinctes et Σ_q est donc un ensemble de 4 points deux à deux symétriques par rapport à l'origine.

Toujours pour $n = 2$ supposons q de rang 1. Quitte à prendre $-q$ on peut supposer $q(xe_1 + ye_2) = x^2$. Alors $\mathrm{C}(q)$ est une droite et Σ_q est un ensemble de 2 points symétriques par rapport à l'origine.

• Supposons enfin $n = 3$. On discute encore selon le rang de q en excluant les cas triviaux mentionnés au début.

$\star$ Si q est de rang 1 et si $r = 1$, $s = 0$, $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2$ et $\mathrm{C}(q)$ est un plan. Par suite Σ_q est un (grand) cercle de la sphère unité et est donc connexe.

$\star$ Si q est de rang 2 et si $r = 2$, $s = 0$, $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 + y^2$ et $\mathrm{C}(q)$ est une droite : dans ce cas Σ_q est un ensemble de 2 points symétriques par rapport à l'origine.

$\star$ Si q est de rang 2 et si $r = s = 1$, alors $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 - y^2$ et $\mathrm{C}(q)$ est la réunion de deux plans. Par suite Σ_q est la réunion de deux grands cercles de la sphère unité. C'est un ensemble connexe par arcs.

$\star$ Si enfin q est de rang 3 et $r = 2$, $s = 1$, on a alors $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x^2 + y^2 - z^2$ et $\mathrm{C}(q)$ est un vrai cône de $\mathbb{R}^3$. Géométriquement, Σ_q est la réunion de deux courbes fermées symétriques par rapport à l'origine et possède donc deux composantes connexes par arcs. Pour prouver cela analytiquement on peut, en se plaçant dans une base orthonormale qui diagonalise A, supposer que $q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$ l'équation de la sphère étant toujours $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En éliminant z, on voit que (x, y, z) est dans Σ_q si, et seulement si, il existe un réel $t \in [0, 2\pi]$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cos t,\quad y = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\sin t \quad \text{et}$$

$$z = \varepsilon\sqrt{\frac{c^2}{a^2+c^2}\cos^2 t + \frac{c^2}{b^2+c^2}\sin^2 t}.$$

On obtient donc bien la réunion de deux courbes fermées comme annoncé.

2. Soient x, y dans Σ_q. On peut évidemment supposer y distinct de x et de $-x$. Dans ce cas la famille (x, y) est libre. Choisissons un vecteur z quelconque en dehors du plan P, ce qui est possible car $n \geqslant 3$. La question précédente montre que $\mathrm{Vect}(x, y, z) \cap \Sigma_q$ est connexe par arcs ou possède deux composantes connexes par arcs symétriques par rapport à l'origine. On en déduit que y est soit dans la composante connexe par arcs de x soit dans celle de $-x$. Il en est de même pour les composantes connexes par arcs de Σ_q. $\lhd$

La solution s'écrit plus simplement avec la notion de signature qui n'est plus au programme des classes préparatoires (cf exercices 3.22 et suivants).

Il est classique de prouver qu'un polynôme positif de $\mathbb{R}[X]$ *peut s'écrire comme une somme de deux carrés (voir l'exercice 5.16 – ou 5.20 dans la seconde édition – du tome Algèbre 1). Le résultat est faux pour des polynômes à plusieurs variables : le contre-exemple de Motzkin* $P(X, Y) = X^2Y^2(X^2 + Y^2 - 3) + 1$ *a d'ailleurs été proposé récemment à l'oral de l'École normale supérieure. Un résultat difficile affirme toutefois que tout polynôme positif à plusieurs variable peut s'écrire comme une somme de carrés de fractions rationnelles (c'est le dix-septième problème de Hilbert). L'exercice suivant concerne, dans le cas d'une variable, le passage d'une décomposition en fractions à une décomposition en polynômes.*

3.6. Théorème de Pfister (1965)

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans K^*. On suppose qu'il existe des fractions rationnelles non toutes nulles $r_1, \ldots, r_n$ de $K(X)$ telles que $\alpha_1 r_1^2 + \cdots + \alpha_n r_n^2 = 0$. Montrer que pour tout polynôme $f \in K[X]$ il existe des polynômes $f_1, \ldots, f_n$ de $K[X]$ tels que

$$f = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_n f_n^2.$$

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Posons $k = \mathrm{K}(\mathrm{X})$, et notons Q la forme quadratique définie sur k^n par $\mathrm{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ et φ sa forme polaire. En multipliant éventuellement les fractions r_i par un dénominateur commun et en divisant les polynômes obtenus par leur pgcd, on peut se ramener au cas où $r_1, \ldots, r_n$ sont des polynômes premiers entre eux. Par hypothèse le vecteur $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ est isotrope, *i.e.* vérifie $\mathrm{Q}(r) = 0$. Il s'agit de démontrer que $\mathrm{Q}(\mathrm{K}[\mathrm{X}]^n) = \mathrm{K}[\mathrm{X}]$.

On a $\mathrm{pgcd}(\alpha_1 r_1, \ldots, \alpha_n r_n) = \mathrm{pgcd}(r_1, \ldots, r_n) = 1$ et par l'identité de Bezout, il existe des polynômes $s_1, \ldots, s_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i s_i = 1$, c'est-à-dire $\varphi(r, s) = 1$, où $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Posons $t = s - \frac{1}{2}\mathrm{Q}(s) r$. Comme $\mathrm{Q}(s) \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, $t \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]^n$ et de plus on a

$$\mathrm{Q}(t) = \mathrm{Q}(s) + \frac{1}{4}\mathrm{Q}(s)\mathrm{Q}(r) - \mathrm{Q}(s)\varphi(r, s) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(r, t) = \varphi(r, s) = 1.$$

Soit $f \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$. On a

$$\mathrm{Q}\left(r + \frac{f}{2} t\right) = \mathrm{Q}(r) + \frac{f^2}{4}\mathrm{Q}(t) + f\varphi(r, t) = f$$

et $r + \frac{f}{2} t \in \left(\mathrm{K}[\mathrm{X}]\right)^n$. On a donc bien $\mathrm{Q}(\mathrm{K}[\mathrm{X}]^n) = \mathrm{K}[\mathrm{X}]$. ◁

Il ne s'agit en réalité que du cas simple du théorème de Pfister : celui-ci affirme que si $f \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ peut s'écrire $f = \alpha_1 r_1^2 + \cdots + \alpha_n r_n^2$ avec $r_1, \ldots, r_n$ dans $\mathrm{K}(\mathrm{X})$, alors f peut aussi s'écrire $f = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_n f_n^2$ avec $f_1, \ldots, f_n$ dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$. Le cas où la forme quadratique est anisotrope est un peu plus difficile.

Notons que la solution de l'exercice montre que $\mathrm{Q}(k^n) = k$. C'est un résultat général : si q est une forme quadratique non dégénérée sur un k-espace vectoriel V, où le corps k est de caractéristique différente de 2, et si q possède un vecteur isotrope non nul, alors $q(\mathrm{V}) = k$. Si $q(x) = 0$, comme q est non dégénérée, on peut trouver $y \in \mathrm{V}$ tel que $\varphi(x, y) = 1$, puis l'on construit z tel que $q(z) = 0$ et $\varphi(x, z) = 1$. On conclut comme dans l'exercice.

L'énoncé suivant utilise les principales propriétés de l'orthogonalité au sens d'une forme bilinéaire symétrique b. Rappelons que si A est une partie de E son orthogonal est $\mathrm{A}^{\perp} = \{x \in \mathrm{E},\ \forall a \in \mathrm{A},\ b(x, a) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. Rappelons aussi que b est dite non dégénérée lorsque l'application de E dans son dual E^* qui à tout vecteur x associe la forme linéaire $b_x : y \longmapsto b(x, y)$ est un isomorphisme. Si

A est la matrice de b dans une base quelconque de E cela se caractérise simplement par l'inversibilité de A.

3.7. Indice d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E ($\mathbb{K}$ étant un corps quelconque de caractéristique différente de 2).

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

2. Un sous-espace F est dit totalement isotrope lorsque la restriction de q à F est nulle, autrement dit lorsque $F \subset F^{\perp}$. On qualifiera de SETIM un sous-espace totalement isotrope qui est maximal au sens de l'inclusion. Montrer que tout sous-espace totalement isotrope est inclus dans un SETIM.

3. Montrer que tous les SETIM de E ont la même dimension $\nu(q)$ (qui est appelée *l'indice de q*). Vérifier que $2\nu(q) \leqslant \dim E$ et donner un exemple où il y a égalité.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Notons b la forme polaire de q, n la dimension de E et soit F un sous-espace de dimension p. On peut supposer $p \geqslant 1$, car le résultat est clair si F est nul. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Comme q est non dégénérée, les formes linéaires $\varphi_i : x \longmapsto b(f_i, x)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ forment une famille libre de E* que nous pouvons donc compléter en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ de E*. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base antéduale de cette base. On a

$$\begin{aligned} x \in F^{\perp} &\iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ x \perp f_i \\ &\iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \\ &\iff x \in \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

On prendra garde que, contrairement au cas euclidien, $F^{\perp}$ n'est pas forcément en somme directe avec F. En effet, la restriction de q à F peut être dégénérée.

2. Soit F un sous-espace isotrope. Parmi tous les sous-espaces isotropes qui contiennent F (et il en existe puisqu'il y a au moins F lui-même), il suffit d'en prendre un de dimension maximale. Il s'agit forcément d'un SETIM.

3. Soient F et G deux SETIM de E. Considérons F_1 (resp. G_1) un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp. dans G). On a donc

$$F = (F \cap G) \oplus F_1 \quad \text{et} \quad G = (F \cap G) \oplus G_1$$

et il nous suffit de prouver que F_1 et G_1 ont la même dimension. Pour cela il nous suffit de prouver que $G_1 \cap F_1^{\perp} = \{0\}$. En effet cela implique $\dim G_1 + \dim F_1^{\perp} \leqslant \dim E$ et donc $\dim G_1 \leqslant \dim F_1$ et la symétrie du problème montre qu'il y a alors forcément égalité.

Supposons donc par l'absurde qu'il existe un vecteur x non nul dans $G_1 \cap F_1^{\perp}$. Il s'agit évidemment d'obtenir une contradiction avec la maximalité de F ou de G. Comme x est dans G on va plutôt prendre F. Effectivement $x \notin F$, car sinon x serait dans $F \cap G$ et dans G_1 donc serait nul. Mais $x \in F^{\perp}$. En effet, si $y \in F$ on peut le décomposer sous la forme $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F \cap G$ et $y_2 \in F_1$. Or $b(x, y_1) = 0$, car x et y_1 sont tous les deux dans G et $b(x, y_2) = 0$, car $x \in F_1^{\perp}$ et $y_2 \in F_1$. Donc $b(x, y) = b(x, y_1) + b(x, y_2) = 0$. Il est alors facile de voir que le sous-espace $F' = F \oplus \mathbb{K}x$ est encore totalement isotrope ce qui contredit la maximalité de F.

Notons $\nu(q)$ la dimension des SETIM et soit F l'un d'entre eux. Comme $F \subset F^{\perp}$ on a $\dim F \leqslant \dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ et donc $2\nu(q) \leqslant \dim E$. Pour avoir égalité E doit être de dimension paire. Prenons par exemple $\mathbb{R}^{2p}$ et q la forme quadratique définie par

$$q(x_1, \ldots, x_{2p}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{2p}^2.$$

En notant $(e_1, \ldots, e_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2p}$ il est clair que $e_1 + e_{p+1}$, $e_2 + e_{p+2}, \ldots, e_p + e_{2p}$ sont isotropes et deux à deux orthogonaux. Ils engendrent donc un sous-espace totalement isotrope de dimension p qui est, d'après ce qui précède, forcément maximal. ◁

De manière plus générale, le lecteur pourra montrer que sur $\mathbb{R}^n$ l'indice d'une forme quadratique non dégénérée de signature (r, s) est égal à $\min(r, s)$.

Il est facile de voir par récurrence sur la dimension que toute forme quadratique q admet une base orthogonale : si q est nulle c'est évident et sinon on choisit e_1 tel que $q(e_1) \neq 0$. Alors $H = e_1^{\perp}$ est un hyperplan qui ne contient pas e_1 et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de q à H pour compléter e_1 en une base orthogonale. Cette existence de bases orthogonales est essentielle (mais insuffisante) pour le problème de la classification des formes quadratiques (voir page 212). Matriciellement cela montre que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique alors A est congruente à une matrice diagonale : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que ${}^tPAP = D$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nous savons par le théorème spectral que P peut être choisie orthogonale.

3.8. Famille de formes quadratiques

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$q_a(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - (2xy + 2xz + 2yz).$$

1. Pour quelles valeurs de a, la forme quadratique q_a est-elle non dégénérée ?

2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour toutes les q_a.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La matrice de q_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique q_a est non dégénérée si et seulement si $\det M_a \neq 0$. Or $\det M_a = \det(aI_3 - A) = -\chi_A(a)$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que -1 est valeur propre de A et que l'espace propre associé est de dimension 2. Comme $\operatorname{Tr} A = 0$ on en déduit que 2 est aussi valeur propre de A. Ainsi $\det M_a = -\chi_A(a) = (a+1)^2(a-2)$.

Conclusion. La forme quadratique q_a est non dégénérée si, et seulement si, $a \notin \{2, -1\}$.

2. Une base orthonormée (pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$) formée de vecteurs propres de M_a constitue une base orthogonale pour la forme quadratique q_a. Or une base orthonormée de vecteurs propres de A est une base de vecteurs propres de M_a pour tout réel a. La droite $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ est dirigée par le vecteur unitaire $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Le plan propre de A pour la valeur propre -1 a pour équation $x + y + z = 0$. Une base orthonormée de ce plan est donnée par exemple par $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. La base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ répond donc à la question. ◁

Rappelons que le rang d'une forme quadratique q sur E est par définition le rang de l'application de E dans son dual E qui à tout vecteur x associe la forme linéaire $b_x : y \longmapsto b(x, y)$. C'est aussi le rang de toute matrice A représentant q dans une base quelconque de E. Le résultat de l'exercice suivant est utilisé en Probabilités.*

3.9. Théorème de Fischer-Cochran

Soit E un espace euclidien de dimension n et m formes quadratiques $q_1, \ldots, q_m$ sur E vérifiant $q_1 + \cdots + q_m = q$ où $q(x) = \langle x, x\rangle$ est la forme euclidienne et $r_1 + \cdots + r_m = n$ où r_k désigne le rang de q_k. Montrer que E est somme directe orthogonale de sous-espaces $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_m$ tels que si p_k désigne le projecteur orthogonal sur E_k alors

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad q_k(x) = \langle p_k(x), x\rangle = \langle p_k(x), p_k(x)\rangle.$$

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Voici une autre manière de comprendre le résultat demandé : on cherche à montrer l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et d'un partage $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m$ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ tel que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$ et tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ on ait $q_k(x) = \sum\limits_{i \in \mathrm{I}_k} x_i^2$.

Nous savons que chaque forme q_k peut se représenter à l'aide d'un endomorphisme auto-adjoint u_k de E : $q_k(x) = \langle u_k(x), x\rangle$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Les deux hypothèses se traduisent alors par

$$(1) \quad u_1 + \cdots + u_m = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad (2) \quad \mathrm{rg}\, u_1 + \cdots + \mathrm{rg}\, u_m = n = \dim \mathrm{E}.$$

Posons $\mathrm{E}_k = \mathrm{Im}\, u_k$ pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. L'hypothèse (1) implique que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \cdots + \mathrm{E}_m$. Mais comme la somme des dimensions des E_k vaut exactement n par (2) on peut affirmer que la somme est directe : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_m$. De plus, l'égalité (1) montre que u_k est exactement le projecteur sur E_k parallèlement à $\bigoplus\limits_{i \neq k} \mathrm{E}_i$. Pour conclure il ne reste plus qu'à prouver que les E_k sont orthogonaux deux à deux et cela découle de ce que u_k est auto-adjoint (un projecteur d'un espace euclidien est orthogonal si, et seulement si, il est auto-adjoint). D'où le résultat. ◁

La plupart des exercices de ce chapitre sont consacrées aux formes quadratiques réelles. Avant d'aborder la classification de ces formes à l'aide de la notion de signature (récemment éliminée des programmes des classes préparatoires) nous proposons plusieurs exercices sur la notion de positivité. Rappelons qu'une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel est dite positive (resp. définie positive) lorsque $q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ (resp. $q(x) > 0$ pour tout x non nul de E*). Une matrice symétrique réelle* A *sera dite positive (définie positive) lorsque la forme quadratique q_A de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associée est positive (resp. définie* *positive). Ces propriétés se lisent sur le spectre de A : A est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes positives (resp. strictement positives).*

3.10. Une forme quadratique définie positive

> Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ une famille de $2n$ réels strictement positifs. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose
>
> $$q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{a_i b_j + a_j b_i}.$$
>
> À quelle condition la forme quadratique q est-elle définie positive ?
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

Un changement de base très simple permet de simplifier q. Posons $y_i = \dfrac{x_i}{a_i}$ pour tout i. On a alors

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i a_j y_i y_j}{a_i b_j + a_j b_i} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{y_i y_j}{\dfrac{b_i}{a_i} + \dfrac{b_j}{a_j}} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{y_i y_j}{c_i + c_j},$$

où $c_i = \dfrac{b_i}{a_i}$.

On remarque alors, et c'est la clé de l'exercice, que

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{y_i y_j}{c_i + c_j} &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} y_i y_j \int_0^1 t^{c_i + c_j - 1} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Bigg(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} y_i y_j t^{c_i - \frac{1}{2}} t^{c_j - \frac{1}{2}} \Bigg) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n y_i t^{c_i - \frac{1}{2}} \right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0.\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \longmapsto \sum_{i=1}^n y_i t^{c_i - \frac{1}{2}}$ est continue sur $]0,1]$, il y a égalité si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n y_i t^{c_i - \frac{1}{2}} = 0$ pour tout $t \in]0,1]$. La forme quadratique q sera définie positive si cela implique $y_1 = \cdots = y_n = 0$. Deux cas se présentent :

• Si les c_i ne sont pas distincts, alors q n'est pas définie positive. Si par exemple, on a $c_1 = c_2$, on annule q en prenant $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ et $y_3 = \cdots = y_n = 0$.

positive). Ces propriétés se lisent sur le spectre de A : A est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes positives (resp. strictement positives).

3.10. Une forme quadratique définie positive

Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ une famille de $2n$ réels strictement positifs. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{a_i b_j + a_j b_i}.$$

À quelle condition la forme quadratique q est-elle définie positive ?

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Un changement de base très simple permet de simplifier q. Posons $y_i = \dfrac{x_i}{a_i}$ pour tout i. On a alors

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i a_j y_i y_j}{a_i b_j + a_j b_i} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{y_i y_j}{\dfrac{b_i}{a_i} + \dfrac{b_j}{a_j}} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{y_i y_j}{c_i + c_j},$$

où $c_i = \dfrac{b_i}{a_i}$.

On remarque alors, et c'est la clé de l'exercice, que

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{y_i y_j}{c_i + c_j} &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} y_i y_j \int_0^1 t^{c_i + c_j - 1} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} y_i y_j t^{c_i - \frac{1}{2}} t^{c_j - \frac{1}{2}} \Big) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n y_i t^{c_i - \frac{1}{2}} \right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \longmapsto \sum_{i=1}^n y_i t^{c_i - \frac{1}{2}}$ est continue sur $]0, 1]$, il y a égalité si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n y_i t^{c_i - \frac{1}{2}} = 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. La forme quadratique q sera définie positive si cela implique $y_1 = \cdots = y_n = 0$. Deux cas se présentent :

• Si les c_i ne sont pas distincts, alors q n'est pas définie positive. Si par exemple, on a $c_1 = c_2$, on annule q en prenant $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ et $y_3 = \cdots = y_n = 0$.

• Si les c_i sont deux à deux distincts, on peut supposer sans perte de généralité que $c_1 < \cdots < c_n$. On note $f(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i t^{c_i - \frac{1}{2}}$ et on suppose que $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. Si $y_1, \ldots, y_n$ ne sont pas tous nuls, on considère le plus petit indice k tel que $y_k \neq 0$. On a alors $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} y_k t^{c_k - \frac{1}{2}}$ ce qui contredit le fait que $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. On a donc $y = 0$ et $x = 0$.

Conclusion. La forme q est définie positive si et seulement les réels c_i sont deux à deux distincts, autrement dit si, et seulement si, $\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ sont deux à deux distincts distincts. ◁

3.11. Une forme quadratique positive

Soit $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$. On considère l'application δ_{A} de $\mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$ dans lui-même définie par $\delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{a_k}{k!} \mathrm{P}^{(k)}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{P})(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{P})(0) \in \mathbb{R}_+$.

(iii) La forme quadratique définie par la matrice $(a_{i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ est positive.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

• L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est triviale.

• Montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$ un polynôme à valeurs positives et $x \in \mathbb{R}$. Le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} + x)$ est alors également positif. Donc par hypothèse $\delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{Q})(0) \geqslant 0$. Or, $\delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{Q})(0) = \delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{P})(x)$. Cela vaut pour tout réel x et (i) est donc vérifiée.

• Faisons maintenant le lien avec la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par la matrice $(a_{i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Soit $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Notons P le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (x_0 + x_1 \mathrm{X} + \cdots + x_n \mathrm{X}^n)^2 \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$. On a

$$q(x) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i+j} x_i x_j = \sum_{k=0}^{2n} a_k \sum_{i+j=k} x_i x_j = \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!} = \delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{P})(0),$$

car $\displaystyle\sum_{i+j=k} x_i x_j$ est le coefficient de X^k dans P. L'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$ découle déjà de ces observations.

• Pour avoir $(iii) \Longrightarrow (ii)$ il suffit d'observer que $\delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}^2)(0) \geqslant 0$ pour tout polynôme de degré inférieur à n et de conclure en se rappelant que tout polynôme positif de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ peut s'écrire comme somme de deux carrés : c'est un résultat que le lecteur trouvera dans l'exercice 5.16 du tome 1 d'algèbre (ou 5.20 dans la seconde édition). ◁

3.12. Une forme quadratique définie négative

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et q la forme quadratique définie par $q(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & {}^t x \\ x & A \end{pmatrix}$ pour tout vecteur colonne $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que q est définie négative.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Calculons $q(x)$ en développant le déterminant selon sa première colonne. En notant $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées du vecteur colonne x, il vient

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(-1)^{i+2} \det M_i(x)$$

où $M_i(x)$ est la matrice dont la première ligne est ${}^t x$ et dont les lignes suivantes sont celles de A exceptée la ligne d'indice i. On développe alors $\det M_i(x)$ selon sa première ligne pour obtenir

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i(-1)^i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_j \det A_{ij} = -\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (-1)^{i+j} x_i x_j \det A_{ij}$$

où A_{ij} est la matrice extraite de A en otant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Autrement dit, q est l'opposée de la forme quadratique associée à la comatrice de A. Or, la formule fondamentale sur la comatrice donne $\operatorname{Com} A = (\det A)A^{-1}$ (car A est symétrique) et cela montre clairement que la comatrice de A est aussi définie positive. Donc q est bien définie négative. ◁

3.13. Matrices symétriques à diagonale positive

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

(*i*) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} > 0$;

(*ii*) il existe P symétrique définie positive et D diagonale à éléments diagonaux strictement positifs tels que $A = DP + PD$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Si la condition (ii) est réalisée, avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P = (p_{ij})$, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \lambda_i p_{ij} + p_{ij}\lambda_j = (\lambda_i + \lambda_j)p_{ij}$ et en particulier $a_{ii} = 2\lambda_i p_{ii}$. Les λ_i sont strictement positifs par hypothèse et si l'on appelle Φ la forme quadratique associée à P dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $p_{ii} = \Phi(e_i) > 0$, car P est définie positive. Ceci implique $a_{ii} > 0$ pour tout i.

• Réciproquement supposons que A a des termes diagonaux strictement positifs. Si l'on considère $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont strictement positifs et $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a, d'après la démonstration directe, $A = DP + PD$ si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}\cdot$ La matrice P obtenue est symétrique et on cherche les λ_i pour qu'elle soit définie positive. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}{}^t XPX &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{2\lambda_i} x_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} x_i x_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_{ii} y_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j} y_i y_j,\end{aligned}$$

où l'on a posé $y_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}}\cdot$ On note désormais $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On a alors $\sum\limits_{i=1}^n a_{ii} y_i^2 \geqslant \alpha \|Y\|^2$, où $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} > 0$. Il faut choisir les λ_i pour que la deuxième somme soit petite. Pour t et u strictement positifs, l'expression $\dfrac{\sqrt{t}\sqrt{u}}{t+u}$ est maximale et vaut $\dfrac{1}{2}$ pour $t = u$; si l'on fixe t, elle décroît avec u pour $u > t$ et tend vers 0 en $+\infty$. On va donc choisir des λ_i distincts et grands. Soit $\lambda > 1$ et, pour tout i, $\lambda_i = \lambda^{2i}$. On a alors, pour $i > j$,

$$\frac{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{\lambda^{i+j}}{\lambda^{2i} + \lambda^{2j}} = \frac{\lambda^{i-j}}{1 + \lambda^{2(i-j)}} \leqslant \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

En notant $K = \sup\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$, on obtient

$$\left| \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j} y_i y_j \right| \leqslant \frac{K(n^2 - n)}{\lambda} \|Y\|_\infty^2 \leqslant \frac{K(n^2-n)}{\lambda} \|Y\|^2$$

et donc

$${}^t XPX \geqslant \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{K(n^2-n)}{\lambda} \right) \|Y\|^2.$$

Si λ est assez grand pour que $\frac{\alpha}{2} - \frac{K(n^2-n)}{\lambda}$ soit strictement positif, on aura pour $X \neq 0$, $Y \neq 0$ et ${}^tXPX > 0$. Pour un tel choix, P est symétrique définie positive. ◁

3.14. Restriction à un plan définie positive

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$$

Trouver les plans P de $\mathbb{R}^3$ tels que $q_{|P}$ est définie positive.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Commençons par réduire la forme quadratique q en appliquant l'algorithme de Gauss. On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= (x + 2y + z)^2 - 4y^2 - 2yz \\ &= (x + 2y + z)^2 - 4(y + \frac{1}{4}z)^2 + \frac{z^2}{4} \\ &= X^2 - Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

en posant $X = x + 2y + z$, $Y = 2y + \frac{z}{2}$ et $Z = \frac{z}{2}$. Autrement dit, on vient de donner l'expression de q dans la base de $\mathbb{R}^3$ définie par les colonnes de la matrice P avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Si on préfère voir les choses matriciellement on a donc ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous allons bien entendu travailler dans la nouvelle base. Nous voyons que la forme q n'est pas positive : elle est de signature[2] $(2, 1)$. Son cône isotrope est un vrai cône de $\mathbb{R}^3$ et cela permet déjà de voir géométriquement la solution à la question posée : les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels q est définie positive sont les plans qui ne coupent ce cône qu'en 0. La restriction de q à un plan coupant le cône selon une génératrice (un plan tangent au cône)

2. Voir l'exercice 3.22 pour cette notion qui a disparu des programmes des classes préparatoires.

est positive mais dégénérée et la restriction de q à un plan coupant le cône selon deux droites a une signature $(1,1)$. L'énoncé semble attendre une description analytique des plans solutions. Soit P un plan d'équation $aX+bY+cZ=0$. On peut supposer b non nul, car sinon P ne convient pas (q est strictement négative sur le vecteur $(0,1,0)$). Écrivons l'équation de P sous la forme $Y=\alpha X+\beta Z$. Pour $(X,Y,Z)\in P$ on a

$$X^2-Y^2+Z^2=X^2-(\alpha X+\beta Z)^2+Z^2=(1-\alpha^2)X^2+(1-\beta^2)Z^2-2\alpha\beta XZ.$$

Il en découle que le plan P est solution si, et seulement si, la forme quadratique $(X,Z)\longmapsto(1-\alpha^2)X^2+(1-\beta^2)Z^2-2\alpha\beta XZ$, de matrice $M=\begin{pmatrix}1-\alpha^2 & -\alpha\beta\\ -\alpha\beta & 1-\beta^2\end{pmatrix}$ est définie positive. C'est le cas si, et seulement si, $1-\alpha^2>0$ et $\det M>0$ (voir exercices 2.18 et 3.15). Cela équivaut facilement à $\alpha^2+\beta^2<1$. Pour finir on peut revenir à la base canonique : les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels q est définie positive sont les plans d'équation

$$4y+z=2\alpha(x+2y+z)+\beta z$$

avec $\alpha^2+\beta^2<1$. ◁

L'exercice suivant établit un résultat important qui a déjà été rencontré en 2.18 avec une autre solution qui est plus dans l'esprit actuel du programme des classes préparatoires.

3.15. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives

Soit $M=(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que M est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux $D_k=\det(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ (pour $1\leqslant k\leqslant n$) sont strictement positifs.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et q la forme quadratique canoniquement associée à M : $q_M(X)={}^tXMX$ pour $X\in\mathbb{R}^n$.

• Le sens direct est facile. En effet, si q est définie positive il en est de même de sa restriction au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Or $(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ n'est autre que la matrice de cette restriction. Elle a donc un déterminant D_k strictement positif.

• Pour la réciproque, nous procédons par récurrence sur n. Le résultat est clair pour $n=1$. Supposons que $n\geqslant 2$ et que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ le mineur D_k soit strictement positif. L'hypothèse de récurrence appliquée à la matrice $(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ montre que la restriction de q à $F = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})$ est définie positive. Considérons l'orthogonal G de F. Comme q est non dégénérée (puisque $\det M = D_n > 0$), sa dimension est 1. Si $x \in F \cap G$, x est isotrope et donc nul puisque q est définie positive sur F. Ainsi, on a $\mathbb{R}^n = F \overset{\perp}{\oplus} G$. Prenons $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})$ une base orthonormale de F pour q et ε_n un vecteur non nul de G. Si on note P la matrice de passage des e_i aux ε_i, on obtient pour la matrice de q_M dans la base des ε_i

$$ {}^t\mathrm{PMP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}. $$

En prenant le déterminant, il vient $\alpha = (\det P)^2 \det M = (\det P)^2 D_n > 0$ et finalement q_M est définie positive. La matrice M est donc définie positive. ◁

Il est facile de déduire de cette caractérisation que l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Si q est une forme quadratique positive de forme polaire b on dispose de l'importante inégalité de Cauchy-Schwarz : $b(x,y)^2 \leqslant q(x)q(y)$ pour tout couple $(x,y) \in E^2$. Cette inégalité sera au cœur des énoncés suivants. Un premier corollaire immédiat de cette inégalité est que le cône isotrope d'une forme positive q coïncide avec son noyau (ou radical) :

$$ C(q) = \{x \in E,\ q(x) = 0\} = \{x \in E,\ \forall y \in E,\ b(x,y) = 0\} = \mathrm{rad}(q). $$

Cette remarque est la clé du petit exercice suivant.

3.16. Comparaison de noyaux

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t XAX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
Comparer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} {}^tA$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

L'application $q : X \longmapsto {}^t XAX$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il faut simplement prendre garde au fait que la matrice A n'étant pas supposée symétrique elle ne représente pas la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$: cette matrice est la partie symétrique de A à savoir $B = \frac{1}{2}({}^tA + A)$. Par hypothèse q est une forme quadratique positive.

Prenons X dans Ker A. On a alors $q(X) = 0$: X est un vecteur isotrope pour q. Comme q est positive, X est dans le radical de q et on a ${}^t\mathrm{YBX} = 0$ pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$. Cela donne ${}^t\mathrm{Y}\,{}^t\mathrm{AX} = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Il en résulte que ${}^t\mathrm{AX} = 0$. On a donc $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^t A$. Les matrices A et ${}^t A$ ayant même rang, leur noyau est le même. ◁

3.17. Une forme quadratique positive

Soit q une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$ de matrice dans la base canonique $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on pose

$$q'(x) = a_{nn} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} a_{ij} x_i x_j - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} a_{ni} a_{nj} x_i x_j.$$

Montrer que q' est une forme quadratique positive.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Il suffit d'interpréter convenablement q'. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et b la forme polaire de q. Soit $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $X = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$.

On a $a_{nn} = q(e_n)$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} a_{ij} x_i x_j = q(X)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} x_i = b(e_n, X)$.

Ainsi, la positivité de q' résulte simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la forme positive q puisque

$$q'(x) = q(e_n) q(X) - b(e_n, X)^2 \geqslant 0.$$

D'où le résultat. ◁

3.18. Condition pour qu'une matrice soit positive

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle positive. On suppose que les coefficients de A sont tous non nuls. Montrer que la matrice $\left(\dfrac{1}{a_{ij}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est positive si, et seulement si, $\operatorname{rg} A = 1$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Supposons d'abord que A soit de rang 1. Nous savons que A est diagonalisable en base orthonormée. Comme 0 est valeur propre avec un espace propre associé de dimension $n - 1$, la matrice A admet une unique valeur propre λ strictement positive (car A est positive) l'espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ étant de dimension 1. Il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tP\,\mathrm{Diag}(\lambda, 0, \dots, 0)P$. En posant $M = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda}, 0, \dots, 0)P$ on a donc $A = {}^tMM$. Notons $m_1, \dots, m_n$ les coefficients de la première ligne de M, les autres coefficients de M étant nuls. On a alors $a_{ij} = m_i m_j$ pour tout couple (i, j). Autrement dit, si q désigne la forme quadratique associée à A on a pour tout X de coordonnées $x_1, \dots, x_n$,

$$q(X) = {}^tXAX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_i m_j x_i x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right)^2 .$$

Il est alors clair que la matrice $A' = \left(\dfrac{1}{a_{ij}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est positive. En effet, on a pour tout X,

$${}^tXA'X = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{m_i m_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}\right)^2 \geqslant 0.$$

• Traitons maintenant la réciproque. Comme A est positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $a_{ij}^2 \leqslant a_{ii}a_{jj}$ pour tout couple (i, j). Mais par hypothèse la matrice $\left(\dfrac{1}{a_{ij}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est aussi positive de sorte qu'on a aussi $\dfrac{1}{a_{ij}^2} \leqslant \dfrac{1}{a_{ii}}\dfrac{1}{a_{jj}}$. Finalement, on a $a_{ij}^2 = a_{ii}a_{jj}$ pour tout couple (i, j). Sommons ces égalités sur i et j. Il vient $\mathrm{Tr}({}^tA\,A) = (\mathrm{Tr}\,A)^2$ c'est-à-dire $\mathrm{Tr}\,A^2 = (\mathrm{Tr}\,A)^2$ ou encore $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A prises avec multiplicité. En développant on a donc $\sigma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ et comme les λ_i sont tous positifs, il y en a au plus un qui est non nul. Comme A est non nulle, elle admet une valeur propre simple strictement positive et 0 pour valeur propre de multiplicité $n - 1$. Elle est donc bien de rang 1. ◁

3.19. Inégalité de Bergström

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices symétriques définies positives. On considère $A_1 = (a_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B_1 = (b_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que

$$\frac{\det A}{\det A_1} + \frac{\det B}{\det B_1} \leqslant \frac{\det(A + B)}{\det(A_1 + B_1)}.$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Le terme $\det A_1$ est le coefficient $(1,1)$ de la comatrice de A. La formule classique $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{Com}\,A$ montre que $\dfrac{\det A_1}{\det A}$ est le coefficient d'indice $(1,1)$ de A^{-1}. Notons alors u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ (auto-adjoints définis positifs) associés à A et B dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$. On vient donc de voir que

$$\frac{\det A_1}{\det A} = \langle u^{-1}(e_1), e_1\rangle.$$

On peut évidemment tenir le même raisonnement pour B et A + B. L'inégalité à démontrer s'écrit donc

$$\frac{1}{\langle u^{-1}(e_1), e_1\rangle} + \frac{1}{\langle v^{-1}(e_1), e_1\rangle} \leqslant \frac{1}{\langle (u+v)^{-1}(e_1), e_1\rangle}.$$

Montrons plus généralement, que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{\langle u^{-1}(x), x\rangle} + \frac{1}{\langle v^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{1}{\langle (u+v)^{-1}(x), x\rangle}.$$

Pour cela, on démontre que, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle u^{-1}(x), x\rangle\langle u(y), y\rangle.$$

L'application $\varphi : (x,y) \longmapsto \langle u(x), y\rangle$ est un produit scalaire, puisque u est symétrique défini positif. Il suffit de lui appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle^2 &= \langle u(u^{-1}(x)), y)\rangle^2 = \varphi(u^{-1}(x), y)^2\\ &\leqslant \varphi(u^{-1}(x), u^{-1}(x))\varphi(y,y) \leqslant \langle x, u^{-1}(x)\rangle\langle u(y), y\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que si y n'est pas orthogonal à x, on a

$$\frac{1}{\langle u^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{\langle u(y), y\rangle}{\langle x, y\rangle^2}.$$

On peut écrire une inégalité du même type pour v, et l'on obtient, si $\langle x, y\rangle \neq 0$,

$$\frac{1}{\langle u^{-1}(x), x\rangle} + \frac{1}{\langle v^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{\langle u(y), y\rangle}{\langle x, y\rangle^2} + \frac{\langle v(y), y\rangle}{\langle x, y\rangle^2} \leqslant \frac{\langle (u+v)(y), y\rangle}{\langle x, y\rangle^2}.$$

En prenant $y = (u+v)^{-1}(x)$, on a l'inégalité voulue. ◁

Signalons que l'exercice est souvent proposé à l'oral avec une question préliminaire, qui le rend plus facile, consistant à prouver l'inégalité $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle u^{-1}(x), x\rangle\langle u(y), y\rangle$.

La notion de positivité permet de munir l'espace des matrices symétriques réelles d'une relation d'ordre. L'exercice classique suivant généralise un résultat bien connu sur les suites réelles (cas $n = 1$).

3.20. Convergence d'une suite croissante et majorée

Soit $(A_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de matrices symétriques de taille n. Soit A une matrice symétrique positive de taille n. On suppose que les matrices $A - A_k$ et $A_{k+1} - A_k$ sont toutes positives. Montrer que la suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$ est convergente.

(École polytechnique)

▷ **Solution.** On montre facilement que la relation $\geqslant$ définie sur l'ensemble des matrices symétriques par

$$A \geqslant B \iff A - B \text{ est positive}$$

est une relation d'ordre appelé ordre de Loewner. Il s'agit de démontrer qu'une suite de matrices symétriques $(A_k)_{k\geqslant 0}$ croissante et majorée au sens de cet ordre est convergente. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{ij}^k)$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. L'hypothèse implique que

$$\begin{aligned} {}^t XAX - {}^t XA_kX &= {}^t X(A - A_k)X \geqslant 0 \\ {}^t XA_{k+1}X - {}^t XA_kX &= {}^t X(A_{k+1} - A_k)X \geqslant 0, \end{aligned}$$

pour tout entier naturel k. La suite réelle $({}^t XA_kX)_{k\geqslant 0}$, est croissante et majorée donc est convergente. On note $\Phi(X)$ sa limite et on pose pour $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\varphi(X,Y) = \dfrac{1}{2}(\Phi(X+Y) - \Phi(X) - \Phi(Y))$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) &= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}({}^t(X+Y)A_k(X+Y) - {}^t XA_kX - {}^t YA_kY) \\ &= \lim_{k\to+\infty} {}^t XA_kY. \end{aligned}$$

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, car limite simple d'une suite de formes bilinéaires symétriques. Soit $B = (b_{ij})$ la matrice de φ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$b_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = \lim_{k\to+\infty} {}^t e_iA_ke_j = \lim_{k\to+\infty} a_{ij}^k.$$

La matrice B est la limite de la suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$. ◁

3.21. Décroissance de la fonction inverse

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $Y \in \mathbb{R}^n$. Trouver le minimum de $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(X) = {}^t XAX - 2\,{}^t YX.$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que si $A - B$ est définie positive alors $B^{-1} - A^{-1}$ l'est aussi.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. La fonction J est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ donc, si elle admet un minimum en un point X_0, sa différentielle en X_0 est nulle. Or, celle-ci est définie par

$$dJ_{X_0}(H) = 2\,{}^tX_0AH - 2\,{}^tYH$$

pour tout $H \in \mathbb{R}^n$ (autrement dit, si $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le gradient de J en X_0 est le vecteur $2(AX_0 - Y)$). Le seul point où J peut admettre son minimum est donc $X_0 = A^{-1}Y$. Effectivement, on a pour tout $H \in \mathbb{R}^n$,

$$J(X_0 + H) - J(X_0) = {}^tHAH + 2({}^tX_0AH - {}^tYH) = {}^tHAH \geqslant 0,$$

car la matrice A est définie positive.

Conclusion. Le minimum de J est atteint en $X_0 = A^{-1}Y$ et seulement en ce point. Il vaut $-{}^tYA^{-1}Y$.

2. Supposons que $A - B$ soit définie positive. Pour $X \in \mathbb{R}^n$ on a donc ${}^tXBX \leqslant {}^tXAX$ l'inégalité étant stricte si X est non nul. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul fixé. On a pour tout X non nul,

$$J_B(X) = {}^tXBX - 2\,{}^tYX < {}^tXAX - 2\,{}^tYX = J_A(X).$$

En particulier on peut prendre le point $X = A^{-1}Y$ où le membre de droite atteint son minimum. On en déduit que

$$-{}^tYB^{-1}Y = \min J_B \leqslant J_B(A^{-1}Y) < J_A(A^{-1}Y) = -{}^tYA^{-1}Y.$$

Bref, comme ${}^tY(B^{-1} - A^{-1})Y > 0$ pour tout Y non nul la matrice $B^{-1} - A^{-1}$ est bien définie positive. ◁

Nous abordons maintenant le problème de la classification des formes quadratiques réelles et la notion de signature. Cette section n'est plus actuellement dans les programmes des classes préparatoires mais nous avons préféré inclure ces exercices pour nos nombreux lecteurs agrégatifs. Les taupins pourront passer directement au thème suivant qui concerne la réduction simultanée de deux formes quadratiques. Voici toutefois un rapide rappel du cours. Deux formes quadratiques q et q' sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n sont dites équivalentes s'il existe un automorphisme u de E tel que $q' = q \circ u$. Si A et A' désignent les matrices *de q et q' dans une base de E cela revient à l'existence d'une matrice inversible P (à savoir la matrice de u dans la base concernée) telle que $A' = {}^t\mathrm{PAP}$. On dit alors que les matrices A et A' sont congruentes. On définit ainsi des relations d'équivalence sur respectivement Q(E) (l'espace des formes quadratiques de E) et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices symétriques de taille n. Le problème de la classification des formes quadratiques consiste à décrire les classes d'équivalence. Il est très difficile dans le cas général et fait intervenir les propriétés arithmétiques du corps $\mathbb{K}$. Traitons ici les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'existence d'une base q-orthogonale (voir page 198) montre que toute forme quadratique q de $\mathbb{K}^n$ est équivalente à une forme du type $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1x_1^2 + \cdots + a_tx_t^2$ où les a_i sont des scalaires non nuls. L'entier t est simplement le rang de q. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ les a_i sont tous des carrés et il est facile de voir que q est équivalente à $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_t^2$. On en déduit que deux formes quadratiques de E sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut, en séparant les a_i positifs et les a_i négatifs, montrer que q est équivalente à une forme du type $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots x_{r+s}^2$. L'entier $r + s$ est le rang de q. Il est remarquable, et cela constitue la loi d'inertie de Sylvester, que quelle que soit la base q-orthogonale utilisée, le nombre de coefficients positifs et le nombre de coefficients négatifs sont toujours les mêmes. Autrement dit le couple (r, s) est intrinsèquement associé à q : on l'appelle la signature de q. On a ainsi le théorème suivant : deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature. L'exercice suivant redémontre ce résultat et donne une vision géométrique de la signature. L'exercice 3.27 s'occupera de la classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini.*

3.22. Signature d'une forme quadratique réelle

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, q une forme quadratique sur E. Soit $\mathrm{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base q-orthogonale de E. On pose $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ et on note r (resp. s) le nombre de réels a_i strictement positifs (resp. strictement négatifs).

1. Montrer que r (resp. s) est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de E sur lequel q est définie positive (resp. définie négative). En déduire que le couple (r, s) ne dépend pas de la base orthogonale choisie. *Par définition ce couple est la signature de q.*

2. Montrer que deux formes quadratiques de E sont équivalentes si, et seulement si, elles ont la même signature.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Quitte à permuter les vecteurs de la base B, on peut supposer que $a_1, \dots, a_r$ sont strictement positifs, que $a_{r+1}, \dots, a_{r+s}$ sont strictement négatifs et que les autres a_i sont nuls. Il est clair que la restriction de q au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est définie positive. La dimension maximale d'un tel sous-espace est donc au moins égale à r. Inversement, soit F un sous-espace de E sur lequel q est définie positive. Comme q est négative sur le sous-espace $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ on est certain que F et G sont en somme directe. Par suite $\dim \mathrm{F} \leqslant n - \dim \mathrm{G} = r$. D'où le résultat. On raisonne bien entendu de même pour prouver que s est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel q est définie négative. Ces dimensions sont intrinsèquement associées à q et ne dépendent pas de la base orthogonale B choisie.

2. Si q est de signature (r, s) elle s'écrit $x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots x_{r+s}^2$ dans une bonne base de E. Il en résulte que deux formes quadratiques de même signature sont équivalentes. La réciproque est tout aussi rapide puisque si $q' = q \circ u$ avec $u \in \mathrm{GL(E)}$ alors les sous-espaces sur lesquels q' est définie positive (resp. négative) sont les images par u^{-1} des sous-espaces sur lesquels q' est définie positive (resp. négative). Comme u^{-1} préserve les dimensions, la question précédente montre que q et q' ont la même signature. ◁

Voici une première application de cette notion.

3.23. Composantes connexes

Soit $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension $n \geqslant 1$. On note Q(E) l'ensemble des formes quadratiques sur E et $\Omega(\mathrm{E})$ le sous-ensemble des formes quadratiques non dégénérées.

1. Montrer que $\Omega(\mathrm{E})$ est un ouvert de Q(E).

2. Soit $q \in \Omega(\mathrm{E})$. Établir l'existence de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E et d'un réel $k > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad q(x) \geqslant k\|x\|^2 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad q(x) \leqslant -k\|x\|^2.$$

3. Montrer qu'on peut trouver une norme N sur Q(E) telle que si $q' \in \mathrm{Q(E)}$ vérifie $\mathrm{N}(q - q') < k$ alors q' a la même signature que q.

4. En déduire les composantes connexes de $\Omega(\mathrm{E})$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. En choisissant une base de E, Q(E) s'identifie à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles et $\Omega(\mathrm{E})$ s'identifie au sous-ensemble formé des matrices symétriques inversibles. Comme la fonction déterminant est continue, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est donc un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Notons (r, s) la signature de q. Comme q est non dégénérée on a $r + s = n$. Comme on le voit en se plaçant dans une base q-orthogonale de E, il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de dimensions respectives r et s tels que q soit définie positive sur F et définie négative sur G. Montrons que ces sous-espaces conviennent.

La restriction de q à F étant définie positive, la fonction $\sqrt{q}$ est une norme (euclidienne) sur F. Comme F est de dimension finie cette norme est équivalente à la restriction de la norme de E. En particulier il existe $k_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{F}$, $\sqrt{q(x)} \geqslant k_1\|x\|$ et donc $q(x) \geqslant k_1^2\|x\|^2$. De même $-q$ définit une structure euclidienne sur G et il existe $k_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{G}$, $\sqrt{-q(x)} \geqslant k_2\|x\|$ soit encore $q(x) \leqslant -k_2^2\|x\|^2$. Il suffit de prendre $k = \min(k_1^2, k_2^2)$ pour conclure.

3. On va maintenant montrer que si q' est une forme quadratique assez proche de q elle va rester définie positive sur F et définie négative sur G et par suite elle va avoir la même signature que q. Pour $q' \in \mathrm{Q(E)}$ posons $\mathrm{N}(q') = \sup\limits_{\|x\|=1} |q'(x)|$. Il s'agit clairement d'une norme sur Q(E). Par homogénéité on a $|q'(x)| \leqslant \mathrm{N}(q')\|x\|^2$ pour tout vecteur x de E. Soit alors $q' \in \mathrm{Q(E)}$ telle que $\mathrm{N}(q - q') < k$. On a donc $|q(x) - q'(x)| < k\|x\|^2$ pour tout vecteur non nul x. Ainsi, si $x \in \mathrm{F} \setminus \{0\}$, on a par inégalité triangulaire, $q'(x) > q(x) - k\|x\|^2 \geqslant 0$ et de même, si $x \in \mathrm{G} \setminus \{0\}$ on a $q'(x) < q(x) + k\|x\|^2 \leqslant 0$. Donc q' est définie positive sur F et définie négative sur G. Sa signature est la même que celle de q.

4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\Omega_k(\mathrm{E})$ l'ensemble des formes quadratiques (non dégénérées) de signature $(k, n - k)$. On vient de montrer que les $\Omega_k(\mathrm{E})$ sont tous ouverts. Ils forment par ailleurs une partition de $\Omega(\mathrm{E})$. On va montrer que les $\Omega_k(\mathrm{E})$ sont tous connexes : ce seront donc les composantes connexes de $\Omega(\mathrm{E})$. Travaillons matriciellement. Soit A, B deux matrices symétriques de signature $(k, n - k)$. Il existe donc P et Q inversibles telles que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{D}_k\mathrm{P}$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{Q}\mathrm{D}_k\mathrm{Q}$ où D_k est la matrice diagonale contenant k coefficients 1 et $n - k$ coefficients -1. On peut très bien supposer P et Q de déterminant strictement positif (quitte à changer en son opposée la première ligne de P ou de Q). Or l'ensemble des matrices réelles inversibles de déterminant > 0 est connexe par arcs. On peut donc y trouver un chemin continu $t \in [0, 1] \longmapsto \mathrm{P}(t)$ tel que $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}$ et $\mathrm{P}(1) = \mathrm{Q}$. Alors $t \longmapsto {}^t\mathrm{P}(t)\mathrm{D}_k\mathrm{P}(t)$ est un chemin continu formé de matrices symétriques de signature $(k, n-k)$ et joignant A à B. $\lhd$

Les exercices suivants sont consacrés à des calculs de signature. Plutôt que de multiplier les exemples nous avons choisi d'illustrer les différentes techniques.

3.24. Un calcul de signature (1)

Montrer que $\Phi : (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \longmapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{MN})$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer la signature de la forme quadratique associée.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La bilinéarité résulte directement de la bilinéarité du produit et de la linéarité de la trace. La forme quadratique associée est définie par $q(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^2)$. Si $\mathrm{M} = (m_{ij})$ est symétrique, on a

$$q(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^2) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{MM}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2.$$

Donc q est définie positive sur le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. Si M est antisymétrique, le calcul précédent montre que $q(\mathrm{M}) = -\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{MM}) = -\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2$, de sorte que q est définie négative sur le sous-espace des matrices antisymétriques. On peut aussi observer que ces deux sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux bien que cela ne soit pas indispensable pour conclure (cf. exercice 3.22). En effet, si M est symétrique et N antisymétrique,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{MN}) = \mathrm{Tr}({}^t(\mathrm{MN})) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{N}{}^t\mathrm{M}) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{NM}) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{MN}).$$

Bref, q est de rang n^2 et de signature $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}, \dfrac{n(n-1)}{2}\right)$. ◁

3.25. Un calcul de signature (2)

Soit q une forme quadratique de signature $(n-1, 1)$ sur un espace vectoriel réel E de dimension n et F un sous-espace de E dans lequel il existe x tel que $q(x) < 0$. Quelle est la signature de q restreinte à F ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons q' la restriction de q à F. La forme quadratique q' est définie négative sur la droite D engendrée par x. Par ailleurs il ne peut pas exister de sous-espace de F de dimension > 1 sur lequel q' est définie négative puisque la signature de q est $(n-1, 1)$. Pour avoir la signature de q' il suffit alors de connaître son rang. Montrons en fait que q' est non dégénérée, ce qui permettra de dire que sa signature est $(\dim \mathrm{F} - 1, 1)$. Soit $y \in \operatorname{Ker} q'$. En particulier y est orthogonal à x donc appartient à l'hyperplan $\mathrm{H} = \mathrm{D}^{\perp}$. Or E est somme directe orthogonale de D et de H, car x n'est pas isotrope. Il est clair que la restriction de q à H est définie positive. Comme $y \in \mathrm{H}$ et comme $q(y) = q'(y) = 0$ on a forcément $y = 0$.

Conclusion. La signature de q' est $(\dim \mathrm{F} - 1, 1)$. ◁

Si A *est la matrice d'une forme* q *dans une base, la signature de* q *est* (r, s), *où* r *(resp.* s*) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de* A. *En effet, il existe* D *diagonale et* P *orthogonale telle que* $\mathrm{A} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}$. *La matrice* A *est congruente à* D *donc a même signature que* D.

3.26. Un calcul de signature (3)

Déterminer la signature de la forme quadratique q de $\mathbb{R}^n$ définie par $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

La matrice de q dans la base canonique est $\mathrm{A} = \mathrm{J} - \mathrm{I}_n$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Il est clair que J est de rang 1 ce qui montre que -1 est valeur propre de A avec un espace propre associé de dimension $n-1$. Comme la trace de A est nulle, la dernière valeur propre de A est $n-1$. On en déduit que la signature de q est $(1, n-1)$. ◁

3.27. Formes quadratiques sur un corps fini

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q et de caractéristique $p > 2$.

1. Montrer qu'il y a $\dfrac{q-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{K}^*$.

2. Soit a et b dans $\mathbb{K}^*$. Montrer que l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ admet toujours au moins une solution.

3. En déduire qu'il y a exactement deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{K}^n$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. L'application $\psi : x \longmapsto x^2$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K}^*, \times)$ dans lui-même dont l'image est exactement l'ensemble C des carrés non nuls de $\mathbb{K}$. La caractéristique de $\mathbb{K}$ n'étant pas égale à 2 le noyau de ψ est égal à $\{\pm 1\}$ et donc de cardinal 2. Il en découle que $|\mathrm{C}| = \dfrac{q-1}{2}$. Notons, car cela servira dans la suite, que si δ n'est pas un carré de $\mathbb{K}^*$, alors les autres éléments non carrés de $\mathbb{K}^*$ sont les éléments de la forme δc lorsque c parcourt C.

2. On utilise un argument combinatoire. En comptant 0, on vient de voir qu'il y a $\dfrac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{K}$. On en déduit que les ensembles $\{1 - ax^2,\ x \in \mathbb{K}\}$ et $\{bx^2,\ x \in \mathbb{K}\}$ sont tous deux de cardinal $\dfrac{q+1}{2}$ (la multiplication par un élément non nul et les translations sont des opérations bijectives de $\mathbb{K}$) et ne peuvent donc pas être disjoints. D'où l'existence d'au moins un couple (x, y) tel que $1 - ax^2 = by^2$.

3. On va procéder par récurrence sur n.

Pour $n = 1$ une forme quadratique non dégénérée s'écrit $x \longmapsto ax^2$ avec $a \neq 0$. Si a est un carré elle est équivalente à la forme $q_1 : x \longmapsto x^2$ et si a n'est pas un carré la remarque faite en 1 montre qu'elle est équivalente à $q_2 : x \longmapsto \delta x^2$ où δ est un élément non carré quelconque fixé. Il y a donc au plus 2 classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées. Un changement de base revient à poser $x = ux'$ avec u non nul et $q_1 : x \longmapsto x^2$ se transforme en $x' \longmapsto u^2 x'^2$. Cela montre que q_1 et q_2 ne sont pas équivalentes.

Traitons aussi le cas $n = 2$ qui est fondamental dans le passage du rang n au rang $n+1$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{K}^2$. Quitte à se placer dans une base q-orthogonale on peut supposer que $q(x, y) = ax^2 + by^2$ avec a, b non nuls. D'après la question 2, on peut trouver un vecteur $f_1 = (x_1, y_1)$ tel que $q(x_1, y_1) = 1$. Soit f_2 un vecteur dirigeant la droite $f_1^{\perp}$. Alors (f_1, f_2) est une base de $\mathbb{K}^2$ et on a $q(xf_1 + yf_2) = x^2 + \alpha y^2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Si α est un carré, alors q est équivalente à la forme $q_1 : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ et sinon q est équivalente à la forme $q_2 : (x, y) \longmapsto x^2 + \delta y^2$ où δ désigne toujours un élément non carré de $\mathbb{K}$ fixé. Les formes q_1 et q_2 ne sont pas équivalentes puisque sinon il existerait une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{P}$, ce qui est impossible, car en passant au déterminant on aurait $\delta = (\det \mathrm{P})^2$.

Montrons maintenant par récurrence sur n que toute forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{K}^n$ est équivalente soit à $q_1 : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ soit à $q_2 : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \delta x_n^2$ où δ est comme avant un élément non carré de $\mathbb{K}$ fixé. Bien entendu q_1 et q_2 ne sont pas équivalentes (on le voit comme en dimension 2 à l'aide du déterminant). Ce qui précède montre que le résultat est vrai aux rangs $n = 1$ et $n = 2$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$ et soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{K}^n$. En prenant une base q-orthogonale on peut supposer que $q(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ où les a_i sont tous non nuls. On applique alors le cas $n = 2$ à la restriction de q au plan correspondant aux deux premières coordonnées. On en déduit que q est équivalente à une forme du type $q' : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^2 + a_2' x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2$ avec $a_2' \neq 0$. Il suffit enfin d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de q' à l'hyperplan correspondant aux $n-1$ dernières coordonnées pour conclure. $\triangleleft$

Le théorème spectral affirme qu'un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E *peut se diagonaliser dans une base orthonormée de* E. *Le lecteur trouvera déjà beaucoup d'exercices sur ce premier aspect purement linéaire dans le chapitre 2. Mais ce théorème admet une autre lecture souvent moins bien comprise des étudiants que nous allons exposer maintenant.*

Matriciellement, le théorème spectral dit que si $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice symétrique réelle il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ *soit diagonale. Mais comme* $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$, *cette égalité admet une nouvelle lecture bilinéaire : elle signifie aussi que* A *est congruente à la matrice* D, *où si l'on préfère que dans la nouvelle base de* $\mathbb{R}^n$ *définie par les colonnes de* P, *la matrice de la forme quadratique* $q_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \longmapsto {}^t\mathrm{XAX}$ *canoniquement associée à* A *est diagonale. Cette nouvelle base est donc orthogonale pour* q_{A} *tout en étant orthonormée pour le produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Une version abstraite de ce résultat est donc donnée par le théorème suivant :* si q, q' sont deux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, et si q est définie positive, il existe une base de E qui est orthonormée pour q et orthogonale pour q'. *On notera qu'en général il n'est pas possible de trouver une base orthogonale simultanément pour deux formes quadratiques quelconques : prendre par exemple* $q(x, y) = x^2 - y^2$ *et* $q'(x, y) = 2xy$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *(voir aussi l'exercice 3.34).*

Dans nos exercices, c'est toutefois essentiellement dans la version matricielle suivante que ce résultat sera utilisé : si A *et* B *sont deux matrices symétriques réelles de taille* n, *et si* A *est définie positive, il existe* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *et* D *matrice diagonale réelle telles que*

$$ {}^t\mathrm{PAP} = \mathrm{I}_n \quad \textit{et} \quad {}^t\mathrm{PBP} = \mathrm{D}. $$

Nous parlerons alors de pseudo-réduction simultanée car il ne s'agit pas ici d'une réduction au sens linéaire du terme. Attention au fait que la matrice P *est simplement inversible (et pas orthogonale !) : on applique ce qui précède avec le produit scalaire défini par* A *et pas avec le produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$ *; les colonnes de* P *définissent une nouvelle base* *de* $\mathbb{R}^n$ *qui est orthonormée pour le produit scalaire* $(X, Y) \longmapsto {}^tXAY$ *et orthogonale pour la forme bilinéaire symétrique* $(X, Y) \longmapsto {}^tXBY$.

Dans l'exercice suivant on montre, comme première application, que si A, B *sont deux matrices symétriques réelles avec* $0 \leqslant A \leqslant B$ *(au sens de l'ordre rencontré dans l'exercice 3.20) alors* $\det A \leqslant \det B$.

3.28. Matrices symétriques positives telles que $A \leqslant B$

Soit A et B deux matrices symétriques réelles positives, q_A et q_B les formes quadratiques de $\mathbb{R}^n$ associées. On suppose $q_B \leqslant q_A$. Montrer que $\det B \leqslant \det A$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

• Supposons d'abord que $\det A = 0$ c'est-à-dire que q_A soit dégénérée. Comme $\det B \geqslant 0$ on doit montrer que $\det B = 0$. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a alors $q_A(X) = {}^tXAX = 0$ et comme $0 \leqslant q_B(X) \leqslant q_A(X) = 0$, X est également un vecteur isotrope de q_B. Comme q_B est positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que ${}^tYBX = 0$ pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, autrement dit que $BX = 0$. Donc q_B est également dégénérée et on a $\det B = \det A = 0$.

• Supposons maintenant q_A définie positive. Le théorème de pseudo-réduction simultanée garantit l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP = D$ avec $D = \operatorname{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ matrice diagonale. Comme $q_B \leqslant q_A$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i = q_B(Pe_i) \leqslant q_A(Pe_i) = 1$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc

$$(\det P)^2 \det B = \det D = \prod_{i=1}^{n} d_i \leqslant 1 = \det I_n = (\det P)^2 \det A$$

ce qui conduit à l'inégalité souhaitée en simplifiant par $(\det P)^2$.

Dans ce second cas, il y a égalité si, et seulement si, les d_i *sont tous égaux à* 1 *i.e. si, et seulement si,* $A = B$. ◁

L'exercice suivant est un énoncé plus précis qui implique le précédent.

3.29. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques

Soit u et v deux endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien. Montrer que $\det(u + v) \geqslant \det u + \det v$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Si $\det u = \det v = 0$, l'inégalité est évidente, car $u + v$ est un endomorphisme symétrique positif.

Supposons par exemple $\det u > 0$. Notons A et B les matrices respectives de u et v dans une base orthonormale quelconque de E. Les matrices A et B sont symétriques positives, A étant définie positive. D'après le théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telles que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PP}$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{PDP}$. On a alors $\det u = \det \mathrm{A} = (\det \mathrm{P})^2$, $\det v = \det \mathrm{B} = \det \mathrm{D}(\det \mathrm{P})^2$ et $\det(u + v) = \det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \det(\mathrm{I}_n + \mathrm{D})(\det \mathrm{P})^2$. On est donc ramené à démontrer que $\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{D}) \geqslant 1 + \det \mathrm{D}$, c'est-à-dire

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Cette inégalité est évidente, car les λ_i sont positifs ; en développant le produit qui est dans le membre de gauche de l'inégalité, on obtient le membre de droite plus des termes positifs.

Dans le second cas on a égalité si, et seulement si, tous les λ_i sont nuls c'est-à-dire si et seulement si $v = 0$. Ainsi, il y a égalité si, et seulement si, u, v et $u + v$ ne sont pas définis positifs ou si $u = 0$ ou $v = 0$. ◁

Dans le prochain exercice intervient la relation suivante sur l'espace des matrices symétriques réelles : $\mathrm{B} > \mathrm{A} \iff \mathrm{B} - \mathrm{A}$ *est définie positive. Ce n'est pas une relation d'ordre et il ne faut pas non plus la confondre avec l'ordre strict associé à la relation d'ordre de Löewner (voir exercice 3.20) défini par* $\mathrm{B} \geqslant \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$. *Par exemple si on prend* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *on a* $\mathrm{B} \geqslant \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$ *mais pas* $\mathrm{B} > \mathrm{A}$.

3.30. Comparaison d'endomorphismes symétriques définis positifs

Soit E un espace euclidien. On définit sur l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs la relation

$$a > b \iff \forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \quad \langle a(x), x \rangle > \langle b(x), x \rangle.$$

Montrer que $a > b \iff \mathrm{Sp}(a^{-1}b) \subset]0, 1[$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On note A et B les matrices de a et b dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de

E. Elles sont symétriques définies positives. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, diagonale à termes diagonaux strictement positifs telles que

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP.$$

On a alors $A^{-1}B = P^{-1}\,{}^tP^{-1}\,{}^tPDP = P^{-1}DP$ qui est semblable à D donc est diagonalisable, avec des valeurs propres strictement positives. Ceci montre déjà que $\mathrm{Sp}(a^{-1}b) \subset \mathbb{R}_+^*$.

• Supposons maintenant $a > b$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(a^{-1}b)$ et x un vecteur propre associé. On a $a^{-1}b(x) = \lambda x$ et donc $b(x) = \lambda a(x)$. L'hypothèse $\langle a(x), x\rangle > \langle b(x), x\rangle = \lambda\langle a(x), x\rangle$ implique $\lambda < 1$, car $\langle a(x), x\rangle > 0$ pour $x \neq 0$. On a donc $\mathrm{Sp}(a^{-1}b) \subset \,]0, 1[$.

• Supposons réciproquement que $\mathrm{Sp}(a^{-1}b) = \mathrm{Sp}\,D \subset \,]0, 1[$. Pour tout $x \in E$, dont la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est X, on a en notant ${}^t(PX) = {}^tY = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\langle a(x), x\rangle = {}^tXAX = {}^tX\,{}^tPPX = {}^tYY = \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad \text{et}$$

$$\langle b(x), x\rangle = {}^tXBX = {}^tX\,{}^tPDPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 < \langle a(x), x\rangle,$$

car les λ_i appartiennent à $]0, 1[$ et Y n'est pas nul. $\lhd$

Le prochain exercice démontre que le déterminant est une fonction logarithmiquement concave sur le cône des matrices symétriques définies positives.

3.31. Convexité logarithmique

Soit A et B deux matrices symétriques réelles définies positives, α et β deux réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta.$$

(**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

Le théorème de pseudo-réduction simultanée affirme l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et de $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale réelle telles que

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP.$$

Les λ_i sont strictement positifs car B est définie positive. On a donc

$$(\det A)^\alpha(\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha(\det P^2 \det D)^\beta = \det P^2(\det D)^\beta,$$

puisque $\alpha+\beta = 1$, et $\det(\alpha A+\beta B) = \det P^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$.

On est donc ramené à montrer que $\det(\alpha I_n+\beta D) \geqslant (\det(D))^\beta$, c'est-à-dire que

$$\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$

ou encore, en prenant le logarithme, que

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \beta\sum_{i=1}^n \ln\lambda_i.$$

Pour tout i, on a $\ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \alpha\ln 1+\beta\ln\lambda_i = \beta\ln\lambda_i$ par concavité du logarithme. Le résultat s'obtient en sommant ces inégalités pour i allant de 1 à n. $\triangleleft$

Si $\alpha \in]0,1[$ et si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1 donc, par stricte concavité du logarithme, l'une des inégalités est stricte et

$$\det(\alpha A+\beta B) > (\det A)^\alpha(\det B)^\beta.$$

3.32. Inégalité de Minkowski

Soit A et B deux matrices symétriques définies positives d'ordre n. Montrer que

$$(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leqslant (\det(A+B))^{1/n}.$$

(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

Le théorème de pseudo-réduction simultanée affirme l'existence d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et de $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale réelle telles que

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP.$$

On a donc $\det A = \det {}^tP \det P = \det P^2$, $\det B = \det P^2 \det D$ et enfin $\det(A+B) = \det P^2 \det(I_n+D)$. L'inégalité à démontrer équivaut à $1+(\det D)^{1/n} \leqslant (\det(I_n+D))^{1/n}$, c'est-à-dire à

$$1+\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i)\right)^{1/n}.$$

La relation est évidente si l'un des λ_i est nul. S'ils sont tous strictement positifs, elle équivaut à

$$\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+\lambda_i).$$

Cela résulte de la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+e^x)$ appliquée aux points $\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n$, avec des coefficients tous égaux à $\frac{1}{n}\cdot$ On vérifie en effet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. ◁

Le lecteur trouvera une autre preuve de cette inégalité dans la note qui suit l'exercice 2.32.

L'énoncé suivant est très voisin de l'exercice 3.28.

3.33. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques

Soit $A_1, \dots, A_k$ des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. Montrer que

$$\left|\det\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i\right)\right| \leqslant \det\left(\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| A_i\right).$$

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Posons $H = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$ et $K = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| A_i$. La matrice K est symétrique positive, car somme de matrices symétriques positives. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|{}^t XHX| = \left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, {}^t XA_iX\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, {}^t XA_iX \leqslant {}^t XKX.$$

Si K est inversible, et donc définie positive, l'inégalité $|\det H| \leqslant \det K$ équivaut à $|\det(K^{-1}H)| \leqslant 1$. D'après le théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, diagonale réelle telles que

$$K = {}^t PP \quad \text{et} \quad H = {}^t PDP.$$

On a alors $K^{-1}H = P^{-1}\, {}^t P^{-1}\, {}^t PDP = P^{-1}DP$ qui est semblable à D, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cela montre déjà que $\mathrm{Sp}(K^{-1}H) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(K^{-1}H)$ et X un vecteur propre associé. On a $HX = \lambda KX$ et donc ${}^t XHX = \lambda\, {}^t XHX$. On en déduit

$$|\lambda|\,{}^t\mathrm{XKX} = |\,{}^t\mathrm{XHX}| \leqslant {}^t\mathrm{XKX}$$

et donc $|\lambda| \leqslant 1$ car ${}^t\mathrm{XKX} > 0$. Les valeurs propres de $\mathrm{K}^{-1}\mathrm{H}$ ont une valeur absolue inférieure à 1 donc $|\det(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{H})| \leqslant 1$.

Le résultat lorsque $\det \mathrm{K} = 0$ s'obtient par un passage à la limite. On remplace H par $\mathrm{H} + \lambda \mathrm{I}_n$ ($\lambda > 0$) et K par $\mathrm{K} + \lambda\mathrm{I}_n$, ce qui revient à ajouter une $(k+1)$-ième matrice $\mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{I}_n$. La matrice $\mathrm{K} + \lambda\mathrm{I}_n$ est définie positive et d'après ce qui précède, $|\det(\mathrm{H}+\lambda\mathrm{I}_n)| \leqslant \det(\mathrm{K}+\lambda\mathrm{I}_n)$. Le déterminant étant une fonction continue des coefficients, on obtient en faisant tendre λ vers 0, $|\det \mathrm{H}| \leqslant \det \mathrm{K}$. $\triangleleft$

Dans l'exercice suivant on donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux formes quadratiques dont l'une est non dégénérée puissent se réduire simultanément. L'énoncé est formulé avec $\mathbb{R}$ pour corps de base, mais on peut prendre n'importe quel corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 à la place.

3.34. Diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques

Soit A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A inversible et on note q_A et q_B les formes quadratiques associées à A et B. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthogonale pour q_A et pour q_B ;

(*ii*) $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ est diagonalisable.

(École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

• (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) est le sens facile. Par hypothèse, il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{D} = {}^t\mathrm{PAP}$ et $\mathrm{D}' = {}^t\mathrm{PBP}$ soient toutes les deux diagonales. On a alors

$$\mathrm{D}^{-1}\mathrm{D}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\,{}^t\mathrm{P}^{-1}\,{}^t\mathrm{PBP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{BP}$$

et $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{D}^{-1}\mathrm{D}'$.

• Montrons la réciproque (*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*). Soit λ une valeur propre de $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$. Si X est un vecteur propre associé à λ on a $\mathrm{BX} = \lambda\mathrm{AX}$ et donc $q_\mathrm{B}(\mathrm{X}) = \lambda q_\mathrm{A}(\mathrm{X})$. Autrement dit, la forme quadratique q_B est proportionnelle à q_A sur l'espace propre associé à λ. Une base de cet espace propre qui est orthogonale pour q_A l'est donc *a fortiori* aussi pour q_B. Pour conclure il suffit d'observer que les sous-espaces propres de $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ sont orthogonaux deux à deux pour les deux formes quadratiques. En effet, soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ et X, Y deux vecteurs propres associés. On a donc $\mathrm{BX} = \lambda\mathrm{AX}$ et $\mathrm{BY} = \mu\mathrm{AY}$. Ainsi,

$$\lambda\,{}^t\mathrm{XAY} = {}^t(\lambda\mathrm{AX})\mathrm{Y} = {}^t(\mathrm{BX})\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{XBY} = \mu\,{}^t\mathrm{XAY}$$

et comme $\lambda \neq \mu$ on a ${}^t\mathrm{XAY} = 0$ et par suite ${}^t\mathrm{XBY} = 0$. Il suffit donc de prendre une base orthogonale pour q_A dans chaque espace propre de $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$: la base obtenue en réunissant ces bases est une base de E qui est orthogonale à la fois pour q_A et pour q_B. D'où le résultat. $\lhd$

Nous savons que (i) est vérifié lorsque A *est définie positive. On déduit donc de l'exercice que si* A, B *sont deux matrices symétriques réelles avec* A *définie positive, alors* $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ *est diagonalisable (et donc* AB *également). C'est une question très classique (voir exercice 2.13).*

Mentionnons une autre condition suffisante de coréduction due à Milnor : si q et q' sont deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 3$ dont les cônes isotropes ne se coupent qu'en 0, alors il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthogonale pour q et pour q'. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Nicolas Tosel, Convexité et formes quadratiques réelles *dans la RMS 116-3 de mars 2006, page 11 pour un éclairage géométrique de ce résultat.*

Les exercices qui suivent concernent le groupe orthogonal d'une forme quadratique q sur un espace vectoriel E *de dimension finie. Comme dans le cas euclidien bien connu du lecteur ce groupe, noté* $\mathrm{O}(q)$, *est l'ensemble des automorphismes de* E *qui conservent la forme polaire b de q :*

$$\mathrm{O}(q) = \{u \in \mathrm{GL(E)},\quad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\quad b(u(x),u(y)) = b(x,y)\}.$$

C'est aussi $\{u \in \mathrm{GL(E)},\ q \circ u = q\}$ *comme on le voit à l'aide d'une formule de polarisation. Il est bien entendu immédiat de vérifier qu'il s'agit d'un sous-groupe de* GL(E). *Notons que q pouvant être dégénérée, il faut mettre l'inversibilité de u dans la définition (dans le cas non dégénéré, euclidien par exemple, la conservation du produit scalaire impose l'inversibilité). L'énoncé suivant montre que le commutant du groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée est toujours réduit aux homothéties.*

3.35. Commutant du groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, de forme polaire ϕ. On suppose que a est un élément de E tel que $q(a) \neq 0$. On pose $\mathrm{A} = \mathbb{R}a$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E},\ \phi(a,x) = 0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{A} \stackrel{\perp}{\oplus} \mathrm{B}$.

2. Soit $G = \{u \in GL(E),\ \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(u(x),u(y)) = \phi(x,y)\}$. Montrer que la symétrie par rapport à A parallèlement à B est dans G.

3. Soit $G' = \{v \in \mathcal{L}(E),\ \forall u \in G,\ v \circ u = u \circ v\}$ le commutant de G. Montrer que si $v \in G'$ alors $v(a)$ s'écrit $\lambda_a a$. Si $b \in E$ est tel que $q(b) \neq 0$, il existe de même un réel λ_b tel que $v(b) = \lambda_b b$. Montrer que $\lambda_b = \lambda_a$.

4. Déterminer G'.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. L'application $x \longmapsto \phi(a,x)$ est une forme linéaire sur E. Par hypothèse, elle est non nulle et B, son noyau, est donc un hyperplan de E. Comme $a \notin B$, la droite $\mathbb{R}a$ forme un supplémentaire de B. D'où le résultat. Bien entendu, B est simplement l'orthogonal de A au sens de ϕ.

2. Notons s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Soit x, y deux vecteurs de E. On écrit $x = \lambda a + b$ et $y = \lambda' a + b'$ avec $(b,b') \in B^2$. On a alors $s(x) = \lambda a - b$ et $s(y) = \lambda' a - b'$. En développant par bilinéarité, on obtient

$$\phi(s(x), s(y)) = \phi(\lambda a - b, \lambda' a - b') = \lambda\lambda' \phi(a,a) + \phi(b,b') = \phi(x,y).$$

Comme s est inversible on a bien $s \in G$.

De manière plus générale, si F *et* G *sont deux sous-espaces supplémentaires de* E *orthogonaux pour* q*, alors la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G *est dans* G.

3. Soit $v \in G'$. Comme v commute en particulier avec s, il doit laisser stable le sous-espace propre de s relatif à la valeur propre 1 c'est-à-dire la droite $\mathbb{R}a$ donc $v(a)$ s'écrit $\lambda_a a$.

Soit b tel que $q(b) \neq 0$. Si b est colinéaire à a, le résultat est évident : on peut écrire $b = ta$ avec $t \in \mathbb{R}$ et alors $v(b) = tv(a) = t\lambda_a a = \lambda_a b$.

On suppose donc que (a,b) est libre. Il existe un réel $t \neq 0$ tel que $\phi(b + ta, b + ta) \neq 0$ (c'est un polynôme du second degré en t dont le coefficient dominant est $\phi(a,a) = q(a) \neq 0$). Pour un tel t on pose $c = b + ta$. On a alors d'une part $v(c) = \lambda_c c = \lambda_c(b + ta)$ et d'autre part, $v(c) = v(b + ta) = v(b) + tv(a) = \lambda_b b + t\lambda_a a$. Comme (a,b) est libre on peut identifier : $\lambda_c = \lambda_b = \lambda_a$. D'où le résultat demandé.

4. Soit $v \in G'$. D'après la question précédente, il existe un réel λ tel que $v(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Considérons maintenant un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. On peut toujours trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(ta + x) = \phi(ta + x, ta + x) \neq 0$. On a alors $v(ta + x) = \lambda(ta + x)$ ce qui donne, $v(x) = \lambda(ta + x) - v(ta) = \lambda x$. Donc, v est une homothétie. La réciproque étant triviale, on a ainsi $G' = \mathbb{R}\,\mathrm{Id}_E$. ◁

Le groupe orthogonal de la forme quadratique nulle est évidemment GL(E) *tout entier. Dans l'exercice qui suit on montre que le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée est minimal au sens de l'inclusion. Pour cela on fera usage du résultat de l'exercice précédent.*

3.36. Minimalité du groupe orthogonal d'une forme non dégénérée

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On se donne q et q' deux formes quadratiques sur E, q étant non dégénérée.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que, pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $b'(x, y) = b(u(x), y) = b(x, u(y))$, b et b' désignant les formes polaires de q et q'.

2. On suppose que $\mathrm{O}(q') \subset \mathrm{O}(q)$ où $\mathrm{O}(q)$ désigne le groupe orthogonal de q à savoir $\{u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}),\ q \circ u = q\}$.

Montrer que $\mathrm{O}(q) = \mathrm{O}(q')$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Cette première question généralise un résultat bien connu dans le cas euclidien : la forme quadratique q' se représente à travers b à l'aide d'un endomorphisme auto-adjoint u. La preuve est d'ailleurs identique. Fixons $x \in \mathrm{E}$. L'application $b'_x : y \longmapsto b'(x, y)$ est une forme linéaire sur E. Comme b est non dégénérée, l'application $z \longmapsto b_z$ (où b_z est la forme linéaire $y \longmapsto b(z, y)$) est un isomorphisme de E sur E^*. Il existe donc un unique vecteur, que l'on note $u(x)$, tel que $b'_x = b_{u(x)}$, c'est-à-dire $b'(x, y) = b(u(x), y)$ pour tout $y \in \mathrm{E}$. Il est ensuite aisé de vérifier que l'application u ainsi définie est un endomorphisme de E. Comme b et b' sont symétriques on a, pour tout couple (x, y) de E^2,

$$b(x, u(y)) = b(u(y), x) = b'(y, x) = b'(x, y) = b(u(x), y).$$

2. Soit $v \in \mathrm{O}(q')$ et $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a $b'(v(x), v(y)) = b'(x, y)$ ce qui conduit à

$$b((u \circ v)(x), v(y)) = b(u(x), y) = b((v \circ u)(x), v(y)),$$

car v est aussi élément de $\mathrm{O}(q)$. Comme cela vaut pour tout couple (x, y) et comme v est surjective et b non dégénérée, on en déduit que $u \circ v = v \circ u$. Ainsi u commute avec tous les éléments de $\mathrm{O}(q')$ et l'exercice précédent montre que u est forcément une homothétie. Il en découle que q' est proportionnelle à q. De plus, q' est non nulle car sinon $\mathrm{O}(q)$ serait égal à $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$, ce qui n'est pas le cas (par exemple $2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} \notin \mathrm{O}(q)$, puisque $q \neq 0$). On a donc $q' = \alpha q$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et donc clairement $\mathrm{O}(q) = \mathrm{O}(q')$. ◁

Formulé géométriquement, l'énoncé suivant fait bien appel aux formes quadratiques : en effet, un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ de centre l'origine est défini par une inéquation du type $q(x) \leqslant 1$ où q est une forme quadratique définie positive. On y utilisera le résultat de l'exercice 3.31.

3.37. Ellipsoïde de John-Loewner

> Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Comme nous venons de le dire en préambule, un ellipsoïde plein centré en 0 de $\mathbb{R}^n$ a une équation du type $q(x) \leqslant 1$, où q est une forme quadratique définie positive. On notera Q (resp. Q_+, resp. Q_{++}) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) de $\mathbb{R}^n$ et pour $q \in \mathrm{Q}_{++}$, on pose $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \ q(x) \leqslant 1\}$.

Commençons par calculer le volume V_q de $\mathcal{E}_q$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. On obtient

$$\mathrm{V}_q = \iint \cdots \int_{a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

On considère le changement de variables défini par $x_i = \dfrac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ (c'est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) dont le jacobien est $\dfrac{1}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}}$. On observe que si S est la matrice de q dans une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\,\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)\,{}^t\mathrm{P}$. On a donc $\det \mathrm{S} = \det \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \ldots a_n$. Ce déterminant ne dépend donc pas de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ choisie. Notons-le $\mathrm{D}(q)$. Le changement de variables dans l'intégrale multiple donne

$$\mathrm{V}_q = \iint \cdots \int_{x_1^2 + \cdots x_n^2 \leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\sqrt{\mathrm{D}(q)}} = \frac{\mathrm{V}_0}{\sqrt{\mathrm{D}(q)}},$$

où V_0 est le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

Le problème peut donc se reformuler ainsi : il s'agit de montrer que si K est un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique forme quadratique $q \in \mathrm{Q}_{++}$ telle que $\mathrm{D}(q)$ soit maximal et que pour tout $x \in \mathrm{K}$, $q(x) \leqslant 1$.

On munit l'espace Q de la norme N définie par $\mathrm{N}(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$. Il est alors naturel de considérer l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{q \in \mathrm{Q}_+, \ \ \forall x \in \mathrm{K}, \ \ q(x) \leqslant 1\}$$

puis de chercher à maximiser D sur ce domaine. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

• $\mathcal{A}$ est convexe : soit q et q' dans $\mathcal{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\lambda q + (1-\lambda)q')(x) = \lambda q(x)) + (1-\lambda)q'(x) \geqslant 0$$

et $\lambda q + (1-\lambda)q'$ est une forme quadratique positive. De plus, si $x \in \mathrm{K}$,

$$(\lambda q + (1-\lambda)q')(x) \leqslant \lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1$$

ce qui entraîne $\lambda q + (1-\lambda)q' \in \mathcal{A}$.

• $\mathcal{A}$ est fermé : si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{A}$ convergente dans Q vers q, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|q(x) - q_n(x)| \leqslant \mathrm{N}(q - q_n)\|x\|$ donc $\lim_{n\to+\infty} q_n(x) = q(x)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ q(x) = \lim_{n\to+\infty} q_n(x) \geqslant 0 \quad \text{et } \forall x \in \mathrm{K}, \ \ q(x) = \lim_{n\to+\infty} q_n(x) \leqslant 1,$$

donc $q \in \mathcal{A}$.

• Montrons que $\mathcal{A}$ est borné. Comme K est d'intérieur non vide, il existe $a \in \mathrm{K}$ et $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{K}$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leqslant r$ alors $a + x \in \mathrm{K}$ donc $q(a+x) \leqslant 1$; d'autre part, on a $q(-a) = q(a) \leqslant 1$. Par l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2$$

donc $q(x) \leqslant 4$. Si $\|x\| \leqslant 1$, $|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}$ ce qui montre que $\mathrm{N}(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$.

• Montrons enfin que $\mathcal{A}$ est non vide. Puisque K est compact, il est borné : soit $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{K}$, $\|x\| \leqslant \mathrm{M}$. Alors si q est définie par $q(x) = \frac{\|x\|^2}{\mathrm{M}^2}$, on a, pour tout $x \in \mathrm{K}$, $q(x) \leqslant 1$.

Bilan : $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

L'application déterminant est continue donc $q \longmapsto \mathrm{D}(q)$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$. Elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{A}$, en q_0. Comme $\mathcal{A}$ contient $x \longmapsto \frac{\|x\|^2}{\mathrm{M}^2}$ qui est définie positive, on a $\mathrm{D}(q_0) > 0$ donc $q_0 \in \mathrm{Q}_{++}$. Nous venons de prouver qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ de volume minimal qui contient K.

Il reste à prouver que cet ellipsoïde est unique *i.e.* que q_0 est unique. Supposons qu'il existe $q \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{D}(q) = \mathrm{D}(q_0)$ et $q \neq q_0$. Soit S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\frac{1}{2}(q+q_0)$ appartient à $\mathcal{A}$ et d'après l'exercice 3.31 (convexité logarithmique du déterminant sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives). on a

$$\mathrm{D}\Big(\frac{1}{2}(q+q_0)\Big) = \det\Big(\frac{1}{2}(\mathrm{S}+\mathrm{S}_0)\Big) > (\det \mathrm{S})^{\frac{1}{2}}(\det \mathrm{S}_0)^{\frac{1}{2}} \geqslant \det \mathrm{S}_0 \geqslant \mathrm{D}(q_0).$$

ce qui contredit la maximalité de $\mathrm{D}(q_0)$.

Conclusion. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. ◁

Le résultat reste vrai dans un espace vectoriel réel de dimension finie quelconque, avec la même démonstration (il suffit de munir E *d'une structure euclidienne quelconque). Un corollaire important est donné par la première question de l'exercice suivant qui montre qu'un sous-groupe compact du groupe linéaire est forcément un sous-groupe du groupe orthogonal pour une structure euclidienne de* E. *Notons que le cas particulier des groupes finis se traite beaucoup plus simplement (voir l'exercice 4.40 du chapitre Géométrie).*

3.38. Sous-groupes compacts maximaux de GL(E)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit G un sous-groupe compact de GL(E). Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E, associé à une forme quadratique q, tel que $\mathrm{G} \subset \mathrm{O}(q)$.

2. En déduire que les sous-groupes compacts de GL(E) qui sont maximaux pour l'inclusion sont exactement les groupes orthogonaux $\mathrm{O}(q)$ où q est une forme quadratique définie positive.

3. *Application.* Soit N une norme sur E et $\mathrm{G_N}$ le groupe des isométries de E pour cette norme. Montrer que si $\mathrm{G_N}$ opère de façon transitive sur la sphère de centre 0 et de rayon 1, alors la norme est euclidienne.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Munissons E d'une norme euclidienne $\| \ \|$ quelconque et notons B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour cette norme. Considérons l'ensemble $\mathrm{K} = \{g(x),\ g \in \mathrm{G} \ \text{ et } \ x \in \mathrm{B}\} = \bigcup_{g \in \mathrm{G}} g(\mathrm{B})$. Il s'agit d'un compact de E en tant qu'image du compact $\mathrm{K} \times \mathrm{B}$ par l'application continue $(g,x) \longmapsto g(x)$. Il est d'intérieur non vide puisqu'il contient B et invariant par tout élément de G. On considère (voir l'exercice précédent dont on reprend les notations) l'unique ellipsoïde $\mathcal{E}_q$ de volume minimal contenant K où q est une forme quadratique définie positive. Pour tout $g \in G$, la forme quadratique q' définie par $q'(x) = q(g(x))$ est définie positive et $K \subset \mathcal{E}_{q'}$ car $g(K) = K$. Mais d'autre part on a, puisque G est compact, $|\det g| = 1$. En effet l'application det est bornée sur G donc sur $\{g^p, \ \ p \in \mathbb{Z}\}$. On a donc $D(q') = D(q)$ et par unicité $q' = q$. Ainsi $g \in O(q)$ pour tout $g \in G$, donc $G \subset O(q)$.

2. Soit G un sous-groupe compact de GL(E) maximal pour l'inclusion. D'après la première question, il existe une forme quadratique q définie positive telle que $G \subset O(q)$ et comme $O(q)$ est compact, on a $G = O(q)$ par maximalité.

Réciproquement, si $G = O(q)$ avec q définie positive, alors G est compact et si G' est un sous-groupe compact de GL(E) tel que $G \subset G'$ il existe, d'après ce qui précède, une forme quadratique définie positive q' telle que $G' \subset O(q')$. On a donc $O(q) \subset O(q')$ et d'après le résultat de l'exercice 3.36, cela implique $O(q) = O(q')$ et donc $G = G'$. Le sous-groupe $G = O(q)$ est compact maximal.

3. Par définition G_N est le groupe des automorphismes u de E vérifiant $N(u(x)) = N(x)$ pour tout $x \in E$. Il est clair que G_N est fermé et borné puisque $|\!|\!|u|\!|\!| = 1$ pour tout $u \in G_N$ où la norme triple est associée à N. Il s'agit donc d'un sous-groupe compact du groupe linéaire GL(E). La première question nous donne une structure euclidienne associée à une forme quadratique définie positive q telle que $G \subset O(q)$. Notons $S_N = \{x \in E, N(x) = 1\}$ la sphère unité de E et soit x_0 un vecteur quelconque de cette sphère. Par hypothèse, si $x \in S_N$ il existe $g \in G_N$ tel que $x = g(x_0)$. On a alors

$$q(x) = q(g(x_0)) = q(x_0)$$

car $g \in O(q)$. Autrement dit, q est constante sur S_N. Si $x \in E$ est non nul, le vecteur $\dfrac{x}{N(x)}$ est dans S_N et $q\left(\dfrac{x}{N(x)}\right) = q(x_0)$ donc par homogénéité $q(x) = q(x_0)N(x)^2$. On en déduit que N est positivement colinéaire à la norme euclidienne $\sqrt{q}$: c'est donc aussi une norme euclidienne. $\triangleleft$

3.39. Endomorphisme auto-adjoint sur un espace quadratique complexe

> **1.** Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle forcément diagonalisable ?
>
> **2.** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

Par analogie avec la structure euclidienne, définir l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur E pour que tout endomorphisme auto-adjoint de E soit diagonalisable.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. La réponse est non si $n \geqslant 2$. Prenons par exemple une matrice symétrique de taille $(2,2)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $X^2 - (a+c)X + ac - b^2$ dont le discriminant est

$$\Delta = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2.$$

Si on travaille sur le corps des réels on voit que Δ ne peut être nul que si $a = c$ et $b = 0$ et dans ce cas A est une matrice scalaire. Mais cela n'est plus le cas sur $\mathbb{C}$. Prenons par exemple $a = 1$, $c = -1$ et $b = i$ c'est-à-dire $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. On a $\Delta = 0$ donc A admet une seule valeur propre mais comme A n'est pas scalaire elle n'est pas diagonalisable. Il est immédiat d'en déduire un contre-exemple pour toute taille $n \geqslant 2$.

2. On procède comme dans le cas euclidien. Soit $y \in E$. L'application $x \longmapsto b(u(x), y)$ est une forme linéaire sur E et comme b est non dégénérée il existe un unique vecteur $u^*(y)$ tel que $b(u(x), y) = b(u^*(y), x)$ pour tout x de E. Cela définit une application $u^* : E \longrightarrow E$ et il est immédiat de vérifier qu'elle est linéaire.

3. Choisissons une base $\mathcal{B}$ de E orthonormée pour b. Soit u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. La matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est la transposée de A. Ainsi, tout endomorphisme auto-adjoint de E est diagonalisable si, et seulement si, toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable (où $n = \dim E$). La question 1 montre que cela n'est le cas que si $n = 1$. ◁

La démonstration effectuée dans l'exercice suivant est à rapprocher de celle de l'exercice 2.66.

3.40. Réduction des matrices symétriques complexes

Soit M une matrice symétrique complexe. Montrer qu'il existe une matrice unitaire O telle que ${}^t\mathrm{OMO}$ soit diagonale, à termes diagonaux réels positifs ou nuls.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On va démontrer la propriété par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il existe $m \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{M} = (m)$ et un réel θ tel que $m = |m|e^{i\theta}$. On obtient $(m) = (e^{i\frac{\theta}{2}})(|m|)(e^{i\frac{\theta}{2}})$, qui est la décomposition cherchée.

On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$ et on considère M symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si O est une matrice unitaire ayant la propriété voulue et X_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que ${}^t\mathrm{OMOX}_1 = \lambda\mathrm{X}_1$ et donc $\mathrm{MOX}_1 = \lambda\overline{\mathrm{O}}\mathrm{X}_1 = \lambda\overline{\mathrm{OX}_1}$. On va donc chercher un vecteur X tel que $\mathrm{MX} = \lambda\overline{\mathrm{X}}$. Si cela est réalisé, on a alors $\overline{\mathrm{M}}\mathrm{MX} = \lambda\overline{\mathrm{MX}} = \lambda^2\mathrm{X}$ et X est un vecteur propre de $\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M}$.

Il faut remarquer qu'en fait $\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M}$ est hermitienne positive. En effet, on a $(\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})^* = \mathrm{M}^*(\overline{\mathrm{M}})^* = \overline{\mathrm{M}}\mathrm{M}$ car M est symétrique, et pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{X}^*\overline{\mathrm{M}}\mathrm{MX} = (\mathrm{MX})^*(\mathrm{MX}) \geqslant 0$. Les valeurs propres de $\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M}$ sont donc réelles et positives.

Soit donc $\mu \in \mathbb{R}_+$ une valeur propre de $\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M}$, X un vecteur propre associé.

Si la famille $(\mathrm{X}, \overline{\mathrm{MX}})$ est $\mathbb{R}$-liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{\mathrm{MX}} = \lambda\mathrm{X}$ (on peut montrer que $\lambda^2 = \mu$). Si $\lambda < 0$, on remarque que $\overline{\mathrm{M}i\mathrm{X}} = -\lambda i\mathrm{X}$.

Si la famille $(\mathrm{X}, \overline{\mathrm{MX}})$ est $\mathbb{R}$-libre, on pose $\mathrm{Y} = \lambda\mathrm{X} + \overline{\mathrm{MX}}$, où $\lambda = \sqrt{\mu}$. Le vecteur Y n'est pas nul et on obtient alors

$$\overline{\mathrm{MY}} = \lambda\overline{\mathrm{MX}} + \overline{\mathrm{M}}\mathrm{MX} = \lambda\overline{\mathrm{MX}} + \mu\mathrm{X} = \lambda\mathrm{Y}.$$

Dans tous les cas, on a déterminé un vecteur X non nul et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overline{\mathrm{MX}} = \lambda\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{MX} = \lambda\overline{\mathrm{X}}$. En le multipliant par une constante réelle, on peut supposer de plus que X est de norme (hermitienne) 1. Soit U une matrice unitaire telle que $\mathrm{UX}_1 = \mathrm{X}$ et $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{UMU}$. La matrice N est également symétrique et

$$\mathrm{NX}_1 = {}^t\mathrm{UMUX}_1 = {}^t\mathrm{UMX} = \lambda\,{}^t\mathrm{U}\overline{\mathrm{X}} = \lambda\overline{\mathrm{U}^{-1}\mathrm{X}} = \lambda\overline{\mathrm{X}_1} = \lambda\mathrm{X}_1.$$

Ainsi, il existe une matrice symétrique de $\mathrm{N}_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{N}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse de récurrence à N_1. Il existe une matrice O_1 unitaire de taille $n-1$ telle que ${}^t\mathrm{O}_1\mathrm{N}_1\mathrm{O}_1 = \mathrm{D}_1$, matrice diagonale à coefficients positifs ou nuls. On pose $\mathrm{O}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{O}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. La matrice O' est unitaire et $D = {}^tO'NO' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ est diagonale à coefficients positifs. Finalement, on obtient

$$D = {}^tO'NO' = {}^tO'\,{}^tUMUO' = {}^t(UO')M(UO'),$$

ce qui est le résultat voulu, car $O = UO'$ est unitaire. ◁

Il s'agit d'une « pseudo-réduction » : la matrice M *est congruente à une matrice diagonale à coefficients positifs, la matrice de passage étant unitaire.*

Le résultat obtenu peut encore s'énoncer ainsi : pour toute forme quadratique q sur $\mathbb{C}^n$, il existe une base orthonormale pour le produit hermitien ordinaire dans laquelle $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels positifs.

Nous terminons ce chapitre avec divers exercices touchant aux formes quadratiques et qui sont relativement inclassables.

3.41. Une décomposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On pose

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y_1 & y_2 & \dots & \dots & y_n \\ y_1 & z_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ y_2 & 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1} & 0 & \dots & 0 & z_{n-1} & 0 \\ y_n & 0 & \dots & \dots & 0 & z_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det M(x, y, z)$.

2. On pose $S = \{M(x, y, z) \text{ positive}\}$, $S_0 = \{M(x, 0, 0),\ x \geqslant 0\}$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$S_i = \{M(x, (0, \dots, y_i, \dots, 0), (0, \dots, z_i, \dots, 0)),\ x \geqslant 0,\ z_i \geqslant 0,\ xz_i = y_i^2\}.$$

Montrer que $S = S_0 + S_1 + \cdots + S_n$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Supposons le produit $z_1 z_2 \dots z_n$ non nul. On peut alors se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire. Pour $2 \leqslant j \leqslant n+1$, on multiplie la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{M}(x,y,z)$ par $-\dfrac{y_j}{z_j}$ et on l'ajoute à la première colonne. On obtient

$$\det \mathrm{M}(x,y,z) = \begin{vmatrix} x - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{y_j^2}{z_j} & y_1 & \dots & y_n \\ 0 & z_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z_n \end{vmatrix}.$$

On a alors $\det \mathrm{M}(x,y,z) = \left(x - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{y_j^2}{z_j} \right) \prod\limits_{i=1}^{n} z_i$, et donc

$$\boxed{\det \mathrm{M}(x,y,z) = x \prod_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \prod_{j \neq i} z_j}.$$

L'application $(x,y,z) \longmapsto \det \mathrm{M}(x,y,z)$ est continue car polynomiale, et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{*n}$ est dense dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On en déduit que la formule précédente est vérifiée pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. On va procéder par double inclusion. Vérifions, pour commencer, que chaque S_i (pour $0 \leqslant i \leqslant n$) est inclus dans S. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{M}(x,y,z)$, q la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est M et $t = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Si M est dans S_0, alors $q(t) = xt_1^2 \geqslant 0$ et M est positive.

Si M est dans S_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors $q(t) = xt_0^2 + 2y_i t_0 t_i + z_i t_i^2$.

- Si $x = 0$, alors $y_i = 0$, par définition de S_i et $q(t) = z_i t_i^2 \geqslant 0$.
- Si $x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} q(t) &= x\left(t_0^2 + 2\frac{y_i}{x} t_0 t_i\right) + z_i t_i^2 \\ &= x\left(t_0 + \frac{y_i z_i}{x}\right)^2 + \underbrace{\left(z_i - \frac{y_i^2}{x}\right)}_{=0} t_i^2 \\ &= x\left(t_0 + \frac{y_i z_i}{x}\right)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que M est positive. Chaque S_i est bien inclus dans S. Comme l'application

$$(x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathrm{M}(x,y,z) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

est linéaire, $\{\mathrm{M}(x,y,z),(x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. De plus, une somme de matrices symétriques positives étant symétrique positive, on en déduit $\mathrm{S}_0+\cdots+\mathrm{S}_n\subset\mathrm{S}$.

Montrons maintenant que toute matrice de S s'écrit comme somme de matrices appartenant à $\mathrm{S}_0,\mathrm{S}_1,\ldots,\mathrm{S}_n$. Soit $\mathrm{M}=\mathrm{M}(x,y,z)\in\mathrm{S}$ et q la forme quadratique de $\mathbb{R}^{n+1}$ associée dans la base canonique $(e_0,e_1,\ldots,e_n)$.

Pour $1\leqslant i\leqslant n$, les coefficients y_i et z_i qu'il nous faut mettre dans l'élément de S_i sont ceux qui se trouvent dans la matrice M. On a simplement le choix du coefficient en position $(1,1)$. La matrice de S_0 sera alors fixée de manière unique : il nous faudra vérifier qu'elle convient.

Remarquons que $q(e_0)=x\geqslant 0$, et pour $1\leqslant i\leqslant n$, $z_i=q(e_i)\geqslant 0$. De plus $q_{|\mathrm{Vect}(e_0,e_i)}$ est positive donc son déterminant est positif : $xz_i-y_i^2\geqslant 0$. On en déduit que si $z_i=0$, alors $y_i=0$.

Considérons alors $\mathrm{I}=\{i\in[\![1,n]\!],z_i\neq 0\}$. Pour $i\in\mathrm{I}$, posons $x_i=\dfrac{y_i^2}{z_i}$ et $\mathrm{M}_i=\mathrm{M}(x_i,(0,\ldots,y_i,\ldots,0),(0,\ldots,z_i,\ldots,0))$. Sachant que $z_i>0$ et étant donné le choix de x_i, M_i est dans S_i. Pour $i\notin\mathrm{I}$, on pose $\mathrm{M}_i=0$, qui est encore dans S_i.

On a alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{M}_i=\mathrm{M}\left(\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}x_i,y,z\right)$. Cette égalité résulte de la linéarité de l'application $(x,y,z)\longmapsto\mathrm{M}(x,y,z)$ et du fait que $y_i=z_i=0$ si $i\notin\mathrm{I}$.

Pour obtenir $\mathrm{M}=\sum\limits_{i=0}^{n}\mathrm{M}_i$, il faut prendre $\mathrm{M}_0=\mathrm{M}\left(x-\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}x_i,0,0\right)$. Il reste à montrer que cette matrice est dans S_0, *i.e.* que $x-\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}x_i\geqslant 0$.

Considérons la matrice M' obtenue en enlevant à M les lignes et les colonnes d'indice i tel que $1\leqslant i\leqslant n$ et $i\notin\mathrm{I}$. La matrice M' est la restriction de q à $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\{0\}\cup\mathrm{I}}$ et elle est donc positive. Son déterminant est positif. Il a la même forme que celui de M et on trouve

$$\begin{aligned}\det\mathrm{M}'&=x\prod_{j\in\mathrm{I}}z_j-\sum_{i\in\mathrm{I}}y_i^2\prod_{j\in\mathrm{I},j\neq i}z_j\\&=x\prod_{j\in\mathrm{I}}z_j-\sum_{i\in\mathrm{I}}x_i\prod_{j\in\mathrm{I}}z_j\ \text{par définition de } x_i\\&=\left(\prod_{j\in\mathrm{I}}z_j\right)\left(x-\sum_{i\in\mathrm{I}}x_i\right).\end{aligned}$$

Ce déterminant est positif et, de plus, pour tout $j\in\mathrm{I}$, on a $z_j>0$. On en déduit $x-\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}x_i\geqslant 0$, ce qui permet de conclure la démonstration. ◁

L'exercice suivant est un joli problème de recherche d'extremum.

3.42. Maximum d'une forme quadratique sur un compact

Soit $\mathrm{K} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall i,\ x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

1. Déterminer la borne supérieure sur K de la forme quadratique définie par $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$.

2. Même question pour la forme quadratique q_A définie par $q_\mathrm{A}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \mathrm{A}} x_i x_j$, où A est une partie symétrique non vide de $[\![1, n]\!]^2$.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

1. Nous avons pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{K}$,

$$q(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1 - \frac{1}{n},$$

car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. La borne supérieure de q sur K est donc $1 - \frac{1}{n}$: c'est un maximum atteint pour le vecteur dont toutes les coordonnées valent $\frac{1}{n}$ et seulement en ce point (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

2. Notons que la borne supérieure est toujours un maximum, car q_A est continue et K est compact. Par ailleurs, si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{K}$, on a

$$q_\mathrm{A}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = 1$$

de sorte que le maximum est toujours inférieur ou égal à 1. Cela permet de conclure dans le cas où la partie A contient un élément (k, k) de la diagonale D du carré $\mathrm{C} = [\![1, n]\!]^2$ car on a alors $q_\mathrm{A}(e_k) = 1$, où e_k désigne le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous supposerons donc dans la suite que A ne contient aucun terme de la diagonale. Soit q le cardinal maximal d'une partie I de $[\![1, n]\!]$ telle que $\mathrm{I} \times \mathrm{I} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A}$ (comme A est non vide on a $q \geqslant 1$). D'après les calculs vus dans la première question on a

$$q_\mathrm{A}\left(\frac{1}{q} \sum_{i \in \mathrm{I}} e_i\right) = 1 - \frac{1}{q}$$

donc $\max\limits_{K} q_A \geqslant 1 - \dfrac{1}{q}\cdot$ Nous allons montrer qu'il s'agit bien du maximum de q_A sur K. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un point de K où le maximum de q_A est atteint et supposons par l'absurde qu'il existe deux indices $h \neq k$ tels que $x_h x_k \neq 0$ et $(h, k) \notin A$. On peut alors écrire

$$q_A(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_h + \beta x_k + \gamma$$

où les coefficients α, β, γ ne dépendent que des réels x_i avec $i \notin \{h, k\}$. On va un peu perturber le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$. Posons $y_h = x_h + \varepsilon$, $y_k = x_k - \varepsilon$ et $y_i = x_i$ pour tous les autres indices i. Il est clair que pour $|\varepsilon|$ assez petit $(y_1, \ldots, y_n) \in K$. On a

$$q_A(y_1, \ldots, y_n) = \alpha(x_h + \varepsilon) + \beta(x_k - \varepsilon) + \gamma = q_A(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon(\alpha - \beta).$$

On en déduit que $\alpha = \beta$ sans quoi le maximum ne serait pas atteint en q_A. On peut alors remplacer le point x de K par $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ où $x'_h = x_h + x_k$ et $x'_k = 0$ les autres coordonnées étant inchangées. Le maximum de q_A est encore atteint en x'. En itérant cela on peut donc obtenir un point $(z_1, \ldots, z_n) \in K$ en lequel q_A atteint son maximum et tel que $(i, j) \in A$ pour tout couple (i, j) tel que $z_i z_j \neq 0$. Autrement dit, si on pose $I = \{i \in [\![1, n]\!],\ z_i \neq 0\}$, on a $I \times I \setminus D \subset A$. On a alors

$$q_A(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{(i,j) \in I^2, i \neq j} z_i z_j \leqslant 1 - \frac{1}{|I|} \leqslant 1 - \frac{1}{q}$$

ce qui prouve le résultat. $\lhd$

Les liens entre les formes quadratiques et l'arithmétique sont très riches même si très peu abordés dans ce chapitre. Voici toutefois deux exercices qui s'inscrivent dans ce thème.

3.43. Forme quadratique et réseau

Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme quadratique définie positive. On pose $e = \inf\limits_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0\}} q(x, y)$.

1. Montrer que e est atteint.

2. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ et $q(u) = e$.

3. Prouver que $3e^2 \leqslant 4(ac - b^2)$. Peut-il y avoir égalité ?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $q(x,y) > 0$. On en déduit que $\inf\limits_{\|(x,y)\|=1} q(x,y) = m > 0$, car ce minimum est atteint, puisque le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est compact. Par homogénéité, on obtient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x,y) \geqslant m(x^2+y^2)$. Soit N un entier naturel tel que $\mathrm{N} \geqslant \sqrt{\dfrac{e+1}{m}}$. D'après ce qui précède, on a, si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ et $|x| > \mathrm{N}$ ou $|y| > \mathrm{N}$, $q(x,y) \geqslant e+1$. On a donc $e = \inf\limits_{\substack{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\\ |x|\leqslant \mathrm{N}, |y|\leqslant \mathrm{N}}} q(x,y)$. Cette borne inférieure est atteinte car l'ensemble est fini. On en déduit que $e > 0$.

2. Soit $u = (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $q(u) = e$. Notons $d = \mathrm{pgcd}(\alpha,\beta)$ et α', β' les entiers tels que $\alpha = d\alpha'$ et $\beta = d\beta'$. On a

$$e = q(u) = d^2 q(\alpha', \beta') \geqslant d^2 e$$

et donc $d^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire $d = 1$.

Ainsi α et β sont premiers entre eux et d'après le théorème de Bezout, il existe $(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha\gamma + \beta\delta = 1$. Posons $v = (-\gamma, \delta)$ et montrons que (u,v) convient. On a évidemment $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subset \mathbb{Z}^2$. Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \alpha & -\delta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On a $\det \mathrm{P} = 1$, donc P est inversible et $\mathrm{P}^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. La matrice P^{-1} est la matrice de passage de (u,v) à la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. Comme elle est à coefficients entiers, e_1 et e_2 appartiennent à $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ et finalement $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}^2$.

3. Il existe $(b', c') \in \mathbb{R}^2$ tel que l'expression de q dans la base (u,v) est $ex^2 + 2b'xy + c'y^2$, puisque $q(u) = e$. On a $\begin{pmatrix} e & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{P} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mathrm{P}$ et donc $c'e - b'^2 = (\det \mathrm{P})^2(ac - b^2) = (ac - b^2)$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, on obtient

$$q(xu + yv) = ex^2 + 2b'xy + c'y^2 = e\left(x + \frac{b'}{e}y\right)^2 + \left(c' - \frac{b'^2}{e}\right)y.$$

En prenant $y = 1$ et en choisissant $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\left| n + \dfrac{b'}{e} \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a

$$e \leqslant q(nu + v) \leqslant \frac{1}{4}e + c' - \frac{b'^2}{e}$$

et donc $3e^2 \leqslant 4(c'e - b'^2)$. Comme $c'e - b'^2 = ac - b^2$, on a bien

$$\boxed{3e^2 \leqslant 4(ac - b^2)}.$$

D'après ce qui précède, il y a égalité s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + \frac{b'}{e} = \frac{1}{2}$ et $3e^2 = 4(c'e - b'^2)$, ce qui donne $2b' = (2n+1)e$ et $c' = \frac{1}{4e}(3e^2 + b'^2) = e(n^2+n+1)$.

Réciproquement, si (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}^2$, si $e > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ et si q est la forme quadratique définie par

$$q(xu + yv) = ex^2 + (2n+1)exy + (n^2+n+1)ey^2,$$

on écrit $q(xu + yv) = e\left(x + \frac{2n+1}{2}y\right)^2 + \frac{3e}{4}y^2$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si y est pair, on $q(xu + yv) \geqslant e$, avec égalité si $x = 1$ et $y = 0$ et si y est impair, on a $q(xu + yv) \geqslant \frac{e}{4} + \frac{3e}{4} \geqslant e$. Le minimum de q sur $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est e et si l'expression de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, on a

$$4(ac - b^2) = 4\left((n^2+n+1)e^2 - \frac{(2n+1)^2}{4}\right) = 3e^2. \quad \triangleleft$$

L'exercice suivant a été traité dans un cas particulier dans le tome 1 d'algèbre (exercice 4.36 dans la première édition et 4.37 dans la seconde édition) à savoir le cas où $n = 3$ et $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$. La démonstration est essentiellement la même.

3.44. Lemme de Davenport-Cassels

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice symétrique définie positive et q_A la forme quadratique associée de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}^n$, il existe $y \in \mathbb{Z}^n$ tel que $q_\mathrm{A}(x - y) < 1$.

Montrer que $\mathbb{N}^* \cap q_\mathrm{A}(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{N}^* \cap q_\mathrm{A}(\mathbb{Z}^n)$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On démontre que $\mathbb{N}^* \cap q_\mathrm{A}(\mathbb{Q}^n) \subset \mathbb{N}^* \cap q_\mathrm{A}(\mathbb{Z}^n)$, l'autre inclusion étant évidente. On note φ la forme polaire de q_A. Soit α dans $\mathbb{N}^* \cap q_\mathrm{A}(\mathbb{Q}^n)$ et $x \in \mathbb{Q}^n$ tel que $q_\mathrm{A}(x) = \alpha$. On écrit $x = \frac{1}{d}z$, avec $z \in \mathbb{Z}^n$ et d entier $d \geqslant 1$. On choisit x et z pour que d soit minimal. Par hypothèse, il existe $y \in \mathbb{Z}^n$ tel que $q_\mathrm{A}(x - y) < 1$.

Si $q_\mathrm{A}(x - y) = 0$ alors $x = y \in \mathbb{Z}^n$ et $\alpha \in q_\mathrm{A}(\mathbb{Z}^n)$. Supposons donc $q_\mathrm{A}(x - y) > 0$ et montrons qu'on abontit à une contradiction.

On a $q_\mathrm{A}(x - y) = q_\mathrm{A}(x) + q_\mathrm{A}(y) - 2\varphi(x, y)$ et $dq_\mathrm{A}(x - y)$ est entier car

$q_A(x)$ est entier par hypothèse, $q_A(y)$ l'est également car $y \in \mathbb{Z}^n$ et A est à coefficients entiers et enfin $d\varphi(x,y) = \varphi(dx,y) = \varphi(z,y)$ est entier car z et y sont dans $\mathbb{Z}^n$. Ainsi, il existe un entier a tel que $q_A(x-y) = \dfrac{a}{d}$ et $0 < a < d$.

On pose $u = y + t(x-y)$ et on cherche le réel t tel que $q_A(u) = q_A(x)$. Comme $q_A(u) = q_A(y) + 2t\varphi(y, x-y) + t^2 q_A(x-y)$, il faut

$$t^2 q_A(x-y) + 2t\varphi(y, x-y) + q_A(y) - q_A(x) = 0.$$

Une solution évidente de cette équation du second degré est 1, cas où $u = x$. L'autre est donc $\dfrac{q_A(y) - q_A(x)}{q_A(x-y)}$. On obtient

$$\begin{aligned} u &= y + \frac{q_A(y) - q_A(x)}{q_A(x-y)}(x-y) = y + \frac{q_A(y) - q_A(x)}{\frac{a}{d}}\left(\frac{1}{d}z - y\right) \\ &= y + \frac{q_A(y) - q_A(x)}{a}(z - dy). \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $q_A(x)$ et $q_A(y)$ sont entiers, u s'écrit $\dfrac{1}{a}v$, où $v \in \mathbb{Z}^n$. Comme $a = q(u) = q(x)$ et $0 < a < d$, cela contredit le choix de x. $\triangleleft$

3.45. Image d'un cône

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique. On pose $C = (\mathbb{R}_+)^n$ et on note ∂C la frontière de C. On suppose que $q(\partial C) \subset \mathbb{R}_+$ et que tout vecteur propre de A qui est dans C est associé à une valeur propre positive. Montrer que $q(C) \subset \mathbb{R}_+$.

(**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

Posons $\Gamma = C \cap S$, où $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$. Démontrer que q est positive sur C revient à démontrer que q est positive sur Γ. L'ensemble Γ est compact et comme q est continue, elle possède un minimum m sur Γ qui est atteint en un point u.

Si $x_0 \in \partial C$, alors $m = q(x_0) \geqslant 0$ par hypothèse. Supposons désormais que x_0 appartient à $(\mathbb{R}_+^*)^n$. On a alors

$$m = \min_{(\mathbb{R}_+^*)^n \cap S} q(x) = \min_{(\mathbb{R}_+^*)^n} \frac{q(x)}{\|x\|^2}.$$

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{q(x)}{\|x\|^2}$ est différentiable sur l'ouvert

$(\mathbb{R}_+^*)^n$. Au point u où elle atteint son minimum, sa différentielle est donc nulle. On a pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\|x\|^4}\left(\|x\|^2 \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) - 2x_i q(x)\right)$$
$$= \frac{1}{\|x\|^2}\left(2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \frac{2x_i q(x)}{\|x\|^2}\right).$$

Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$, la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(u) = 0$ donne $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = \dfrac{q(u)}{\|u\|^2} u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On obtient $\mathrm{A}u = \dfrac{q(u)}{\|u\|^2} u$. Ainsi u est un vecteur propre de A qui est dans C. Par hypothèse, la valeur propre correspondante $\dfrac{q(u)}{\|u\|^2}$ est positive. On en déduit $m = q(u) \geqslant 0$. $\triangleleft$

Le raisonnement précédent montre qu'étant donné une forme quadratique quelconque sur $\mathbb{R}^n$ de matrice A, tout point de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ où la fonction $x \longmapsto \dfrac{q(x)}{\|x\|}$ atteint son minimum est vecteur propre de q et donc de A. Un tel minimum existe toujours car c'est aussi le minimum de la fonction sur la sphère unité. C'est une méthode possible pour montrer que toute matrice symétrique réelle possède une valeur propre (réelle), première étape dans la démonstration du théorème spectral.

Chapitre 4

Géométrie affine et euclidienne

Nous allons commencer ce chapitre par quelques exercices de géométrie affine réelle plane. Les espaces affines ayant disparu des programmes des classes préparatoires lors de la dernière réforme, les énoncés sont désormais donnés dans le cadre des espaces vectoriels (un espace vectoriel E *est naturellement muni d'une structure d'espace affine de direction* E *lui-même), voire directement dans* $\mathbb{R}^n$. *Cette restriction a certes l'inconvénient de créer une légère confusion entre les points et les vecteurs mais n'apporte pas vraiment de perte de généralité puisque tout espace affine s'identifie canoniquement à un hyperplan affine d'un espace vectoriel*[1]. *Nous avons choisi de modifier les énoncés les plus anciens pour respecter ce nouveau programme. Nos lecteurs ayant étudié les espaces affines n'auront aucun mal à les reformuler éventuellement dans un contexte plus général.*

4.1. Partage équitable

On considère 1000 points dans le plan $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une droite ayant (au sens strict) 500 points d'un côté et 500 points de l'autre.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Imaginons que l'on fasse glisser une droite sur le plan, en venant de l'infini et en gardant toujours la même direction. Lorsque la droite traverse le nuage de points, ceux-ci vont passer d'un côté de la droite à l'autre. Si la direction de la droite est bien choisie, il n'y a qu'un seul point à la fois qui traverse la droite et il suffit de s'arrêter lorsque l'on a passé le 500-ième point !

On peut formaliser cela un peu plus. On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne et on note $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant 1000}$ les points. Les vecteurs unitaires $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}}{\|\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}\|}$, $i \neq j$, sont en nombre fini et le cercle unité du plan est infini. On choisit un vecteur unitaire u qui n'est pas dans l'ensemble précédent

1. Le lecteur intéressé lira par exemple le chapitre 3 de l'ouvrage *Géométrie 1* de MARCEL BERGER, Nathan. 1990.

et on considère un repère $R = (O, u, v)$. Les ordonnées y_i des points A_i dans ce repère sont deux à deux distinctes. On peut renuméroter les points pour avoir $y_1 < y_2 < \cdots < y_{1000}$. Il suffit de choisir un réel α entre y_{500} et y_{501} et de prendre la droite d'équation $y = \alpha$ dans le repère R. ◁

On regroupe dans l'exercice suivant deux versions affines du théorème de Pappus qui ont été posées séparément. Signalons que Pappus était un mathématicien grec qui a vécu au IV^e siècle.

4.2. Théorème de Pappus

Soient D et D′ deux droites affines sécantes d'un plan vectoriel réel, des points distincts A, B et C de D\D′, et des points distincts A′, B′, C′ de D′\D.

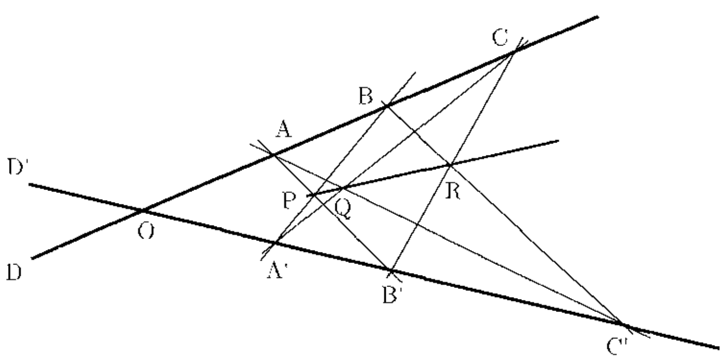
1. On suppose que (AB′) et (A′B) se coupent en P, (BC′) et (B′C) en Q et (CA′) et (C′A) en R. Montrer que P, Q, R sont alignés.

2. On suppose maintenant que (AB′) est parallèle à (A′B) et que (BC′) est parallèle à (B′C). Montrer que (AC′) est parallèle à (A′C).

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Prenons comme repère $R = (O, i, j)$ où O est le point d'intersection de D et D′, où i dirige D et j dirige D′. On pourrait prendre $i = \overrightarrow{OA}$ mais cela ferait jouer un rôle particulier au point A et cette perte de symétrie impliquerait finalement plus de calculs.



Posons $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$ et de même $A' = (0, a')$, $B' = (0, b')$ et $C' = (0, c')$ dans le repère choisi. On écrit l'équation de la droite (AB′). Un point $M = (x, y)$ est sur cette droite si, et seulement si, $\det_{(i,j)}(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AM}) = 0$, ce qui donne $b'x + ay = ab'$. Pour trouver l'équation de la droite (A′B) il n'y a pas de calcul à faire : il suffit d'échanger les lettres a et b pour obtenir $a'x + by = a'b$. On résout le petit système obtenu, par exemple avec les formules de Cramer, pour obtenir les coordonnées du point P :

$$P = \left(\frac{ab(b'-a')}{bb'-aa'}, \frac{a'b'(b-a)}{bb'-aa'}\right).$$

La non nullité de $bb' - aa'$ est précisément la condition pour que les deux droites (AB′) et (A′B) se coupent. Il n'y a pas de calcul à faire pour obtenir les points Q et R : il suffit d'effectuer la permutation circulaire (a, b, c) deux fois de suite. On a donc

$$Q = \left(\frac{bc(c'-b')}{cc'-bb'}, \frac{b'c'(c-b)}{cc'-bb'}\right) \text{ et } R = \left(\frac{ac(a'-c')}{aa'-cc'}, \frac{a'c'(a-c)}{aa'-cc'}\right).$$

Rappelons que trois points $M_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ du plan sont alignés si, et seulement si,

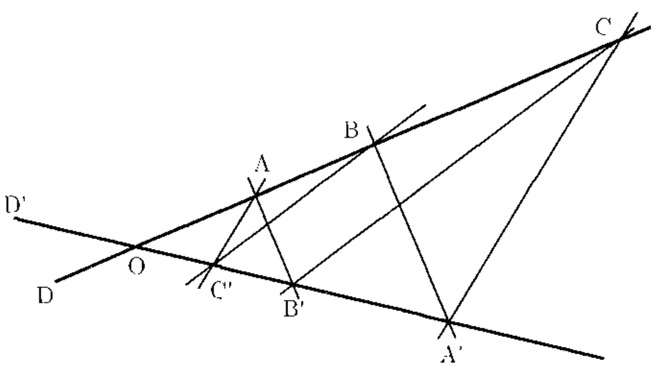
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En sortant les dénominateurs par multilinéarité, on est donc amené à prouver que

$$\begin{vmatrix} bb'-aa' & cc'-bb' & aa'-cc' \\ ab(b'-a') & bc(c'-b') & ac(a'-c') \\ a'b'(b-a) & b'c'(c-b) & a'c'(a-c) \end{vmatrix} = 0.$$

C'est le cas puisque l'on a $cc'C_1 + aa'C_2 + bb'C_3 = 0$, où C_1, C_2, C_3 sont les trois colonnes de la matrice.

2. Voici la figure dans ce cas :



On garde les mêmes notations. Comme on l'a vu, la condition de parallélisme de (AB′) et (A′B) est $aa' = bb'$. On a de même $bb' = cc'$ car (BC′) est parallèle à (B′C). Par transitivité, il vient $aa' = cc'$ ce qui signifie exactement que (AC′) est parallèle à (A′C). ◁

La distinction des deux cas s'explique par le fait que le théorème de Pappus est un résultat de géométrie projective : sans rentrer dans les détails, le cas où les trois paires de droites sont parallèles est celui où elles se coupent sur la «droite à l'infini» et les points d'intersection sont encore alignés. Le lecteur pourra montrer que le résultat de l'exercice reste encore vrai dans le cas où les droites D *et* D′ *sont parallèles.*

Dans certaines questions, l'utilisation des coordonnées barycentriques peut se révéler plus commode que le recours aux coordonnées cartésiennes. Rappelons que si (A, B, C) *est un triangle d'un plan vectoriel (disons réel), on appelle coordonnées barycentriques d'un point* M *de ce plan dans la base affine* (A, B, C) *l'unique triplet* (a, b, c) *tel que* $a+b+c = 1$ *et tel que* M *soit le barycentre de* (A, a), (B, b) *et* (C, c). *Il est bien entendu très facile de passer des coordonnées barycentriques aux coordonnées cartésiennes par exemple dans le repère* $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$. *Mais l'intérêt des premières est qu'elles font jouer un rôle parfaitement symétrique aux trois points* A, B, C.

La première question de l'énoncé suivant donne une condition d'alignement de trois points donnés en coordonnées barycentriques. La suite est consacrée au classique théorème de Ménélaüs.

4.3. Théorème de Ménélaüs

Soit P un plan vectoriel et A, B, C trois points non alignés de ce plan.

1. Soit M, M′ et M″ trois points de coordonnées barycentriques respectives (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ dans la base affine (A, B, C) ; exprimer à l'aide d'un déterminant la condition pour que ces trois points soient alignés.

2. On suppose maintenant que P, Q, R sont trois points sur les côtés respectifs du triangle ABC : trouver une condition pour que P, Q et R soient alignés.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On revient simplement aux coordonnées cartésiennes dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$. On a $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM'}} = \alpha'\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{MM'} = (\alpha' - \alpha)\overrightarrow{AB} + (\beta' - \beta)\overrightarrow{AC}$$

et de même
$$\overrightarrow{MM''} = (\alpha'' - \alpha)\overrightarrow{AB} + (\beta'' - \beta)\overrightarrow{AC}.$$

Ainsi M,M', M'' sont alignés si, et seulement si, $\det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}) = 0$ soit $\begin{vmatrix} \alpha' - \alpha & \beta' - \beta \\ \alpha'' - \alpha & \beta'' - \beta \end{vmatrix} = 0$. On peut mettre ce déterminant sous une forme plus symétrique en remarquant qu'il vaut

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha' & \beta' & 1 \\ \alpha'' & \beta'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha' & \beta' & \alpha'+\beta'+\gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \alpha''+\beta''+\gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

La condition cherchée est donc $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$

2. Supposons que les points P,Q et R appartiennent respectivement à (BC), (CA) et (AB). Leurs coordonnées barycentriques sont respectivement de la forme $(0,\beta,\gamma)$, $(\alpha',0,\gamma')$ et $(\alpha'',\beta'',0)$. D'après la question précédente, les trois points sont alignés si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha' & 0 & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & 0 \end{vmatrix} = \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' = 0.$$

Si les points P, Q, R sont distincts des sommets du triangle, cette condition s'écrit $\dfrac{\gamma}{\beta}\dfrac{\alpha'}{\gamma'}\dfrac{\beta''}{\alpha''} = -1$, soit encore

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

C'est cette équivalence qui constitue le théorème de Ménélaüs. ◁

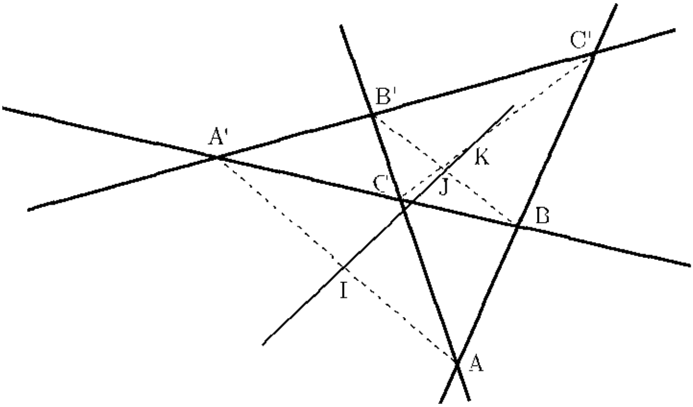
4.4. Quadrilatère complet

On se donne quatre droites affines d'un plan vectoriel en position générale. On appelle diagonale un segment joignant un point d'intersection de deux des droites avec le point d'intersection des deux autres droites. Montrer que les milieux des diagonales sont alignés.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Notons $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ les trois diagonales comme sur la figure suivante.



Dire que les droites sont en position générale signifie que tous les points d'intersection existent et sont deux à deux distincts. On va utiliser les coordonnées barycentriques dans la base affine (A, B, C). Écrivons les coordonnées de tous les points : $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ et $A' = (0, \alpha, 1-\alpha)$, $B' = (1-\beta, 0, \beta)$, et $C' = (\gamma, 1-\gamma, 0)$. Comme les points A', B', C' sont alignés, α, β, γ sont liés par la relation ci-après (voir la question 1 de l'exercice précédent) :

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les milieux I, J, K des diagonales $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ ont pour coordonnées barycentriques respectives $I = \left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right)$, $J = \left(\frac{1-\beta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ et $K = \left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right)$ L'alignement des trois points équivaut donc à la nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Cela revient à dire que -1 est une valeur propre de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, nous savons que 0 est valeur propre de M et il est visible que 1 est aussi valeur propre (avec pour vecteur propre $(1, 1, 1)$). Comme la trace de M est nulle, -1 est aussi valeur propre et le résultat en découle. $\triangleleft$

Le problème suivant, posé en 1893 par Sylvester, est étonnant : la formulation de la question est purement affine et pourtant sa résolution nécessite des arguments euclidiens (le résultat n'est pas vrai sur un corps quelconque).

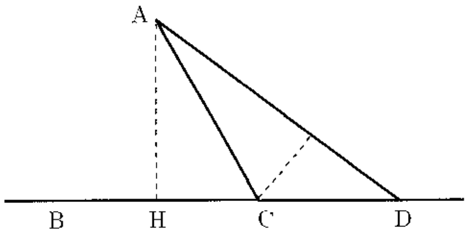
4.5. Théorème de Sylvester-Gallai

On considère n points du plan $\mathbb{R}^2$ qui ont la propriété suivante : toute droite passant par deux des points en contient un troisième. Montrer que tous les points sont alignés.

(École polytechnique)

$\triangleright$ **Solution.**

Une autre formulation du problème est la suivante : si les points ne sont pas tous alignés, il existe une droite du plan qui contient exactement deux des points. C'est sous cette forme que nous allons le résoudre. Notons X notre ensemble de points et $\mathcal{D}$ l'ensemble (fini) de toutes les droites passant par deux points de X. Parmi tous les couples (A, Δ) vérifiant $A \in X$, $\Delta \in \mathcal{D}$ et $A \notin \Delta$ choisissons-en un tel que la distance de A à Δ soit minimale. Nous allons prouver que la droite Δ convient. Par hypothèse, il y a au moins deux points B, C de X qui sont sur Δ. Supposons par l'absurde qu'il y ait un troisième point D de X sur Δ. Quitte à permuter nos trois points, on peut très bien supposer que B, C, D sont dans cet ordre. Notons H le projeté orthogonal de A sur Δ. Deux des trois points B, C, D au moins sont sur la même demi-droite définie par H. Supposons que ce soient C et D. Voici la figure :



La contradiction apparaît bien sur la figure : la distance du point C à la droite $(AD) \in \mathcal{D}$ est visiblement strictement inférieure à la distance

AH (elle est inférieure à la distance de H à (AD) elle-même inférieure à AH). ◁

Il n'est pas certain que Sylvester ait disposé d'une solution à sa question. La première preuve publiée (près de 40 ans après la question) est due à Gallai, ce qui explique le nom du théorème. L'idée de la solution donnée ci-dessus est due à L.M. Kelly.

Les nombreux énoncés qui vont suivre concernent la géométrie affine euclidienne. Nous les avons classés selon plusieurs thèmes : géométrie du triangle, utilisation des nombres complexes, cercles, coniques euclidiennes, problèmes d'extrema.

4.6. Aire d'un triangle

Soit trois droites non parallèles deux à deux du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ définies par leur équation dans le repère orthonormé canonique

$$ax + by + c = 0,\quad a'x + b'y + c' = 0,\quad a''x + b''y + c'' = 0.$$

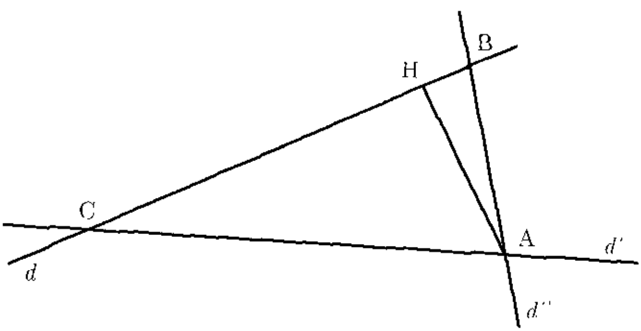
Soit S l'aire du triangle formé par ces trois droites. Montrer que

$$2S = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2}{|(ab' - a'b)(ab'' - a''b)(a'b'' - a''b')|}.$$

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

On note d, d' et d'' les trois droites, $\{A\} = d' \cap d''$, $\{B\} = d'' \cap d$ et $\{C\} = d \cap d'$ et enfin Δ le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.



En résolvant le système constitué des équations de d' et d'', on trouve les coordonnées de A,

$$x_A = \frac{b'c'' - b''c'}{a'b'' - a''b'}, \quad y_A = \frac{a''c' - a'c''}{a'b'' - a''b'}.$$

On en déduit la distance de A à la droite d,

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a(b'c''-b''c') + b(a''c'-a'c'') + c(a'b''-a''b')|}{\sqrt{a^2+b^2}\,|a'b'' - a''b'|},$$

où H est le projeté orthogonal de A sur (BC). On identifie au numérateur le développement du déterminant Δ selon sa première ligne. Ainsi,

$$AH = \frac{|\Delta|}{\sqrt{a^2+b^2}\,|a'b'' - a''b'|}.$$

On va maintenant calculer la distance BC. Le vecteur $(b, -a)$ est un vecteur directeur de la droite d donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BC} = (bt, -ta)$ et donc $x_C = x_B + bt$, $y_C = y_B - ta$. Le point C appartient à d' donc on a

$$a'x_C + b'y_C + c' = a'x_B + b'y_B + c' + t(-ab' + a'b) = 0.$$

On en déduit que $t = \dfrac{a'x_B + b'y_B + c'}{ab' - a'b}$ puis que

$$BC = |t|\,\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|a'x_B + b'y_B + c'|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab' - a'b|}.$$

Or, le même calcul que celui qui a été effectué précédemment pour le point A montre que $|a'x_B + b'y_B + c'| = \dfrac{|\Delta|}{|ab'' - a''b|}$. On obtient donc finalement

$$2S = AH \cdot BC = \frac{\Delta^2}{|ab'' - a''b||ab' - a'b||a'b'' - a''b'|}. \quad \triangleleft$$

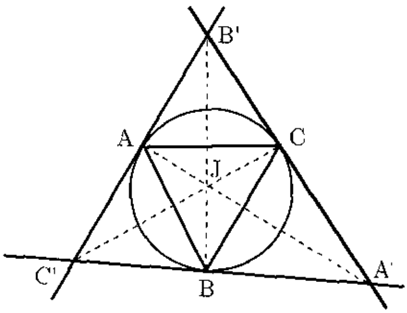
Ce n'est pas une formule très commode. Dans le même genre, le lecteur pourra démontrer la formule de Héron : si a, b, c sont les trois côtés d'un triangle alors son aire est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

4.7. Point de Gergonne

> Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Les tangentes à Γ en A et B se coupent en C'. On définit de même A' et B'. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Voici pour commencer la figure :



On va démontrer que les trois droites sont concourantes en un point J que l'on va exprimer comme barycentre de $(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$. On pose

$$\alpha = \mathrm{A'B} = \mathrm{A'C}, \quad \beta = \mathrm{B'C} = \mathrm{B'A} \quad \text{et} \quad \gamma = \mathrm{C'A} = \mathrm{C'B}.$$

Ces trois nombres sont strictement positifs. Le point A étant à l'intérieur du segment $[\mathrm{B'C'}]$, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{AB'}}}{\overline{\mathrm{AC'}}} = -\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{AC'}} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

et donc $\frac{1}{\beta}\overrightarrow{\mathrm{AB'}} + \frac{1}{\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \overrightarrow{0}$. Ainsi A est le barycentre des points pondérés $\left(\mathrm{B'}, \frac{1}{\beta}\right)$ et $\left(\mathrm{C'}, \frac{1}{\gamma}\right)$. On montre de même que B est le barycentre de $\left(\mathrm{A'}, \frac{1}{\alpha}\right)$ et $\left(\mathrm{C'}, \frac{1}{\gamma}\right)$ et C celui de $\left(\mathrm{A'}, \frac{1}{\alpha}\right)$ et $\left(\mathrm{B'}, \frac{1}{\beta}\right)\Big)$.

Considérons le barycentre J de $\left(\left(\mathrm{A'}, \frac{1}{\alpha}\right), \left(\mathrm{B'}, \frac{1}{\beta}\right), \left(\mathrm{C'}, \frac{1}{\gamma}\right)\right)$. Par associativité du barycentre, on trouve que G est le barycentre de $\left(\left(\mathrm{A'}, \frac{1}{\alpha}\right), \left(\mathrm{A}, \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right)$, de $\left(\left(\mathrm{B'}, \frac{1}{\beta}\right), \left(\mathrm{B}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)\right)$ et de $\left(\left(\mathrm{C'}, \frac{1}{\gamma}\right), \left(\mathrm{C}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\right)$. On en déduit que J appartient aux droites (AA'), (BB') et (CC'). Ces trois droites sont donc concourantes en J. ◁

Le cercle Γ *est le cercle inscrit dans le triangle* A'B'C' *et les points* A, B, C *sont les points de contact entre les côtés du triangle et ce cercle inscrit. Le point de concours des droites* (AA'), (BB') *et* (CC') *est appelé le point de Gergonne du triangle* A'B'C'.

4.8. Quadrilatère formé par les sommets et l'orthocentre d'un triangle

Soit A, B, C, D quatre points du plan, trois à trois non alignés, d'isobarycentre G. Montrer l'équivalence entre

(*i*) un des quatre points A, B, C, D est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres ;

(*ii*) G est à égale distance des 6 milieux de [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD].

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Notons I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des côtés [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD].

• Remarquons pour commencer que si l'un des quatre points A, B, C, D est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, alors chacun des quatre points A, B, C, D est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. En effet si par exemple A est l'orthocentre du triangle BCD, on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

En écrivant ces égalités sous la forme

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

on voit que B est l'orthocentre du triangle BCD et il en est de même pour les deux autres points.

Ainsi (*i*) équivaut à : A est l'orthocentre du triangle BCD.

• Par associativité du barycentre, G est le milieu du segment [I, N] donc est équidistant de I et N. De même, il est équidistant de J et M et de K et L. On en déduit que G est équidistant des six points si, et seulement si, GI = GJ et GI = GK.

Cherchons à quelle condition, GI = GJ. On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

On en déduit

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Cela montre que GI = GJ équivaut à $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. On montre de même que GI = GK équivaut à $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

Finalement (*ii*) équivaut à $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, c'est-à-dire à A orthocentre du triangle BCD, car si un point appartient à deux des hauteurs c'est l'orthocentre. Ainsi (*ii*) équivaut à (*i*). ◁

Le corps des nombres complexes permet d'algébriser la géométrie euclidienne plane. Les trois exercices suivants fournissent des exemples de cela. Le premier est très classique.

4.9. Caractérisation des triangles équilatéraux

> Montrer qu'il existe un polynôme $P(X,Y,Z)\in\mathbb{R}[X,Y,Z]$ tel que, pour $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $P(a,b,c)=0$ si, et seulement si, le triangle (a,b,c) est équilatéral.
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

Le triangle (a,b,c) est équilatéral direct si, et seulement si, c est l'image de b par la rotation de centre a et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'expression analytique de cette rotation est $z\longmapsto e^{\frac{i\pi}{3}}(z-a)+a$ ou encore en posant classiquement $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z\longmapsto -j^2(z-a)+a$. Donc (a,b,c) est équilatéral direct si, et seulement si, $c=-j^2(b-a)+a$ soit encore $c+ja+j^2b=0$. De même le triangle (a,b,c) est équilatéral indirect si, et seulement si, $c+j^2a+jb=0$. On peut conclure que le triangle est équilatéral si, et seulement si, la quantité

$$(c+ja+j^2b)(c+j^2a+jb)=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$$

est nulle. Le polynôme P recherché est donc

$$P(X,Y,Z)=X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ.$$

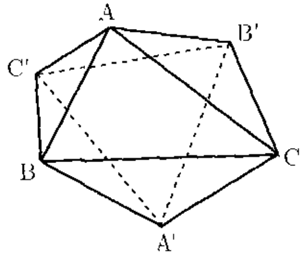
Il est symétrique ce qui est tout à fait normal. ◁

4.10. Un triangle équilatéral

> Soit ABC un triangle du plan euclidien. On construit A′ tel que A et A′ soient de part et d'autre de la droite (BC), avec $\widehat{BA'C}=\dfrac{2\pi}{3}$ et A′B = A′C. On construit de manière analogue B′ et C′. Montrer que le triangle A′B′C′ est équilatéral.
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

On oriente le plan de façon à ce que le triangle ABC soit direct et on rapporte le plan à un repère orthonormal direct (O, u, v). On note a, b, c, a', b', c' les affixes des points A, B, C, A′, B′, C′.



Le triangle A′CB est alors aussi direct et B est l'image de C par la rotation de centre A′ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, ce qui donne

$$b - a' = e^{\frac{2i\pi}{3}}(c - a') = j(c - a')$$

et donc $a' = \dfrac{b - cj}{1 - j}$. On obtient de même $b' = \dfrac{c - aj}{1 - j}$ et $c' = \dfrac{a - bj}{1 - j}$ en permutant les lettres. On en déduit que

$$\begin{aligned} b' - a' &= \frac{c - aj - b + cj}{1 - j} = \frac{-aj - b - cj^2}{1 - j} \quad \text{et} \\ c' - a' &= \frac{a - bj - b + cj}{1 - j} = \frac{a + bj^2 + cj}{1 - j}. \end{aligned}$$

car $1 + j + j^2 = 0$. Ainsi,

$$c' - a' = -j^2(b' - a') = e^{i\frac{\pi}{3}}(b' - a').$$

Le point C′ est donc l'image de B′ dans la rotation de centre A′ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le triangle A′B′C′ est équilatéral (direct). ◁

On peut démontrer de plus que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en un point nommé point de Torricelli du triangle ABC. Ce point est étudié dans l'exercice 4.34.

L'utilisation des nombres complexes est particulièrement efficace pour le résultat suivant (théorème de Ptolémée) lorsqu'on ne connaît pas les inversions. Il donne une condition métrique, et non pas angulaire, pour que quatre points du plan soient cocycliques.

4.11. Théorème de Ptolémée

Soient A, B, C, D quatre points distincts formant dans cet ordre un polygone convexe d'un plan euclidien. Montrer que ces points sont cocycliques si, et seulement si, AC.BD = AB.CD + AD.BC.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On se place dans le plan complexe et on note a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D. On a alors AC.BD $= |c-a||d-b|$, AB.CD $= |b-a||d-c|$ et AD.BC $= |d-a||c-b|$. La clé est de remarquer que

$$(c-a)(d-b) = (b-a)(d-c) + (d-a)(c-b).$$

Par inégalité triangulaire on a donc AC.BD $\leqslant$ AB.CD + AD.BC et il y a égalité si, et seulement si,

$$|(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)| = |(b-a)(d-c)| + |(d-a)(c-b)|.$$

Or deux nombres complexes non nuls z et z' vérifient $|z+z'| = |z|+|z'|$ si, et seulement si, ils ont le même argument.
Ainsi l'égalité AC.BD = AB.CD + AD.BC est vérifiée si, et seulement si, $\arg(b-a)(d-c) \equiv \arg(d-a)(c-b)$ $[2\pi]$ soit encore

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{d-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{d-c}\right) + \pi \quad [2\pi].$$

Cette condition se traduit en termes d'angles par

$$(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}}) + \pi \quad [2\pi].$$

Comme les points A et C sont de part et d'autre du segment [BD] puisque le quadrilatère est supposé convexe, il s'agit exactement de la condition pour que les points A, B, C, D soient cocycliques. ◁

Les exercices suivants concernent des cercles sous divers aspects. Dans le premier, on rappelle la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle et la condition de cocyclicité de quatre points qui en résulte.

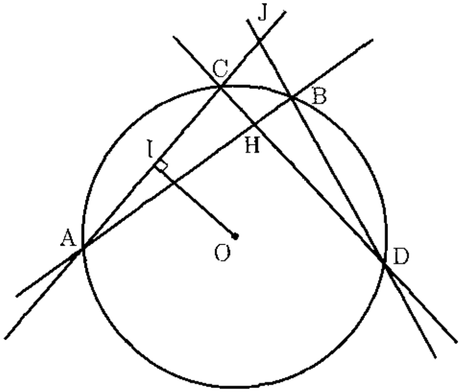
4.12. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un plan euclidien. On suppose que les droites (AC) et (BD) se coupent en J et que les droites (AB) et (CD) se coupent en H. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{JA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JC}} = \overrightarrow{\mathrm{JB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JD}}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{HC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HD}}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Montrons que la condition $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD}$ équivaut à A, B, C, D cocycliques.



• Si les quatre points sont cocycliques sur un cercle $\mathcal{C}$, les deux produits scalaires $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD}$ sont égaux à la puissance du point J par rapport au cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire à $JO^2 - R^2$, où O est le centre du cercle et R son rayon. En effet, en appelant I le milieu du segment [AC], on obtient

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC} = (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{JI} - \overrightarrow{IA}) = JI^2 - IA^2.$$

La droite (OI) est la médiatrice du segment [AC], donc est orthogonale à (AC) et d'après le théorème de Pythagore,

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC} = JO^2 - OI^2 - IA^2 = JO^2 - OA^2 = JO^2 - R^2.$$

On obtient de même $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD} = JO^2 - R^2$ et on l'égalité voulue.

• Supposons réciproquement que $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD}$. Si J n'est égal ni à A, ni à C, les points A, B et C ne sont pas alignés. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (JB) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D' tel que

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD'}.$$

Comme les points J,B D et D' sont alignés, on a $\overline{JB} \cdot \overline{JD} = \overline{JB} \cdot \overline{JD'}$ et $D = D'$ puisque $J \neq B$.

Si J = A ou C, on a alors $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JC} = 0$, donc $\overline{JB} \cdot \overline{JD} = 0$. On en déduit que J = B ou J = D. Mais, deux des points sont égaux, car confondus avec J, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équivalence annoncée est ainsi démontrée.

De la même façon, on a $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HD}$ si et seulement si A, B, C et D sont cocycliques. Cela démontre l'équivalence demandée. ◁

4.13. Suite de cercles

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, C_n un cercle de $\mathbb{R}^2$ euclidien, de rayon $r_n > 0$, et D_n le disque fermé de frontière C_n. On suppose que la suite (r_n) est croissante majorée et que les cercles C_n sont deux à deux disjoints. On suppose de plus que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(0,0) \in D_n$ et $(1,0) \notin D_n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique x_n appartenant à $[0,1]$ tel que $(x_n, 0) \in C_n$.

2. Montrer que la suite (x_n) converge.

3. Montrer que la tangente à C_n en $(x_n, 0)$ converge vers une droite à préciser.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Le point $O = (0,0)$ est à l'intérieur du disque D_n et le point $A = (1,0)$ à l'extérieur du disque. Le segment $[O, A]$ coupe donc le cercle C_n en un unique point B_n. Les points du segment $[O, A]$ sont les points $(0, x)$ avec $x \in [0,1]$, donc il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $B_n = (x_n, 0)$. Ce réel x_n est unique car le segment $[0, A]$ coupe C_n en un point unique.

2. Les cercles C_n étant disjoints, soit les disques D_n et D_{n+1} sont disjoints, soit l'un est inclus dans l'autre. Comme ils contiennent tous $(0,0)$, on est dans le deuxième cas. La suite (r_n) étant croissante, on a $r_n \leqslant r_{n+1}$ et $D_n \subset D_{n+1}$. On en déduit que $D_n \cap [0, A] \subset D_{n+1} \cap [0, A]$, *i.e.* $[0, B_n] \subset [0, B_{n+1}]$ et donc $x_n \leqslant x_{n+1}$. La suite (x_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. On note ℓ sa limite, $\ell \in [0,1]$.

3. Pour tout entier naturel n, notons ω_n le centre du cercle C_n. La suite (r_n) est croissante et majorée donc converge. Soit n et p deux entiers tels que $n \geqslant p$. Comme $D_p \subset D_n$, on a $\|\omega_n - \omega_p\| \leqslant r_n - r_p$. La suite (ω_n) est donc de Cauchy et, comme $\mathbb{R}^2$ est complet, elle converge. On note ω sa limite. La tangente en $B_n = (x_n, 0)$ à C_n est la droite passant par B_n orthogonale à $\overrightarrow{\omega_n B_n}$. Elle converge vers la droite contenant $L = (\ell, 0)$ et orthogonale à $\overrightarrow{\omega L}$. ◁

L'exercice suivant rappelle l'étude classique des lignes de niveau d'une fonction scalaire de Leibniz.

4.14. Condition de cocyclicité de quatre points

Soit A, B, C et D quatre points non alignés d'un plan euclidien.

1. Montrer que A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si, il existe a, b, c, d réels non tous nuls tels que

$$a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 + c\mathrm{MC}^2 + d\mathrm{MD}^2 = 0$$

pour tout point M du plan.

2. Étudier, pour (a, b, c, d) quelconque, les lignes de niveau de l'application

$$M \longmapsto a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 + c\mathrm{MC}^2 + d\mathrm{MD}^2.$$

(École polytechnique)

Solution.

1. • Supposons qu'il existe quatre réels non tous nuls tels que l'application $f : \mathrm{M} \longmapsto a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 + c\mathrm{MC}^2 + d\mathrm{MD}^2$ soit identiquement nulle. Pour tout point O du plan, on obtient

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}) &= a(\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2 + b(\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2 + c(\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2 + d(\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})^2 \\ &= (a+b+c+d)\mathrm{MO}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MO}} \cdot \overrightarrow{u} + f(\mathrm{O}), \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}} + d\overrightarrow{\mathrm{OD}}$.

Si $a + b + c + d \neq 0$, on $f(\mathrm{M}) \sim (a + b + c + d)\mathrm{MO}^2$ quand OM tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que f est identiquement nulle. Donc $a + b + c + d = 0$.

On a alors, pour tout M,

$$f(\mathrm{M}) = 2\overrightarrow{\mathrm{MO}} \cdot \overrightarrow{u} = 0,$$

ce qui nécessite d'avoir $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Les coefficients a, b, c, d ne sont pas tous nuls. On suppose par exemple $a \neq 0$. Comme $a+b+c+d = 0$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ ne dépend pas de O : $\overrightarrow{u} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Puisque $b+c+d = -a \neq 0$, le point A est le barycentre de la famille $((\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c), (\mathrm{D}, d))$. Si les points B, C, D sont alignés, il en est de même des quatre points A, B, C, D, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi les points B, C, D ne sont pas alignés. On considère le centre O du cercle circonscrit à BCD. On note R son rayon ($\mathrm{R} > 0$). On a alors

$$\begin{aligned} f(\mathrm{O}) &= a\mathrm{OA}^2 + b\mathrm{OB}^2 + c\mathrm{OC}^2 + d\mathrm{OD}^2 \\ &= a\mathrm{OA}^2 + (b+c+d)\mathrm{R}^2 = a(\mathrm{OA}^2 - \mathrm{R}^2) = 0. \end{aligned}$$

Comme $a \neq 0$, on a nécessairement $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$. Les quatre points A, B, D et D sont cocycliques sur le cercle de centre O et de rayon R.

• Supposons réciproquement que les points A, B, C et D sont cocycliques sur un cercle de centre O de rayon R. Pour quatre réels a, b, c, d tels que $a + b + c + d = 0$, on obtient comme précédemment, pour tout M du plan,

$$f(\mathrm{M}) = (a + b + c + d)\mathrm{MO}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MO}} \cdot \overrightarrow{u} + f(\mathrm{O}) = 2\overrightarrow{\mathrm{MO}} \cdot \overrightarrow{u}.$$

car $a+b+c+d=0$ et $f(\mathrm{O})=(a+b+c+d)\mathrm{R}^2=0$. Pour que f soit identiquement nulle, il faut choisir a, b, c, d tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$. Comme $a+b+c+d=0$, on a encore $\overrightarrow{u}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ forment une famille liée, on peut trouver b, c, d non tous nuls tels que $b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{0}$. Pour ce choix de b, c, d et $a=-(b+c+d)$, l'application f est identiquement nulle.

2. Pour O et M quelconques, on peut toujours écrire

$$f(\mathrm{M})=(a+b+c+d)\mathrm{MO}^2+2\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{u}+f(\mathrm{O}).$$

• Si $a+b+c+d\neq 0$, on prend pour O le barycentre de $((\mathrm{A},a),(\mathrm{B},b),(\mathrm{C},c),(\mathrm{D},d))$. Alors $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ et, pour tout point M du plan

$$f(\mathrm{M})=(a+b+c+d)\mathrm{MO}^2+f(\mathrm{O}).$$

Les lignes de niveau non vides sont des cercles de centre O.

• Si $a+b+c+d=0$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ ne dépend pas de O et, pour tout point M du plan,

$$f(\mathrm{M})=2\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{u}+f(\mathrm{O}).$$

Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, les lignes de niveau de f sont des droites orthogonales au vecteur $\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, l'application f est constante. ◁

4.15. Problème angulaire

> Dans le plan euclidien, on se donne trois points distincts A, B et C. Déterminer les points D tels que
>
> $$(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{DB}},\overrightarrow{\mathrm{DC}}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}})\ [\pi]\ \text{ et }\ (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{DC}},\overrightarrow{\mathrm{DA}}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}})\ [\pi].$$
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Si les points A, B, C sont alignés, le point D doit vérifier les égalités

$$(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{DB}},\overrightarrow{\mathrm{DC}}})\equiv 0\ [\pi]\ \text{ et }\ (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{DC}},\overrightarrow{\mathrm{DA}}})\equiv 0\ [\pi]$$

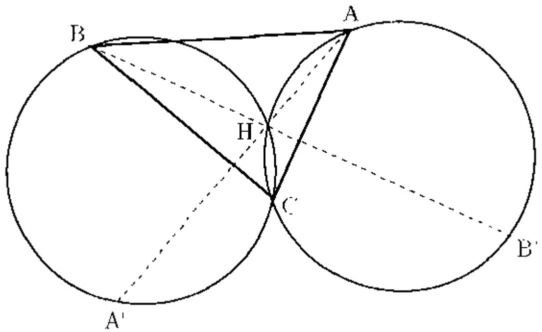
et le point D doit appartenir à la droite (AB) privée des points A, B, C.

On suppose dorénavant que les points A, B, C ne sont pas alignés. L'égalité $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{DB}},\overrightarrow{\mathrm{DC}}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}})\ [\pi]$ ne traduit pas la cocyclicité des quatre points A, B, C, D, car l'ordre des points B, C n'est pas le même à gauche et à droite : le point D serait sur le cercle circonscrit au triangle ABC si on avait $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{DB}},\overrightarrow{\mathrm{DC}}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}})\ [\pi]$.

Pour se ramener à des conditions de cocyclicité, il nous suffit d'introduire A′ le symétrique de A par rapport à (BC) et B′ le symétrique de B par rapport à (CA). En effet, les conditions s'écrivent alors

$$(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}})\ [\pi] \ \text{ et } \ (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}})\ [\pi].$$

Le point D doit donc appartenir aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ circonscrits aux triangles A′BC et B′CA respectivement. Ces deux cercles sont forcément distincts : il s'agirait sinon du cercle circonscrit au triangle ABC et les segments [BC] et [AC] devraient être deux diamètres de ce cercle, ce qui est impossible. Ils se coupent donc en C et un autre point, éventuellement confondu avec C.



Montrons que ce deuxième point d'intersection des cercles est l'orthocentre H du triangle ABC. Si H ≠ B, C, on a, modulo π,

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC}})\\ &\equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) + \frac{\pi}{2} \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}}).\end{aligned}$$

On trouve de même si H ≠ C, A, $(\widehat{\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$, donc si le triangle n'est pas rectangle, H appartient à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Si par exemple H = A, on obtient

$$(\widehat{\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}})$$

et la conclusion est la même. Le cas H = B est identique.

Si H = C, les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont symétriques par rapport au point C qui appartient aux deux cercles. Ils sont donc tangents en C et n'ont qu'un point d'intersection, le point C.

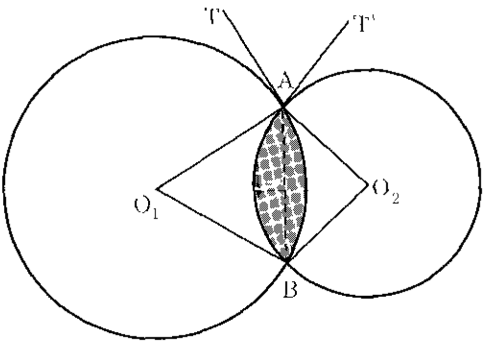
Conclusion. Si le triangle ABC n'est pas rectangle, le problème a une seule solution, l'orthocentre H du triangle. Si le triangle est rectangle, il n'a pas de solution. ◁

4.16. Intersection de deux disques

> Deux disques fermés de rayons respectifs R_1 et R_2 ont en commun un ménisque d'aire $\mathcal{A}$. Déterminer un équivalent de $\mathcal{A}$ lorsque l'angle des deux cercles en leurs points communs tend vers 0.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles, O_1 et O_2 leurs centres, A et B leurs points communs, (AT) et (AT′) les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en A et $\theta = \widehat{TAT'}$. Posons enfin $\alpha = \widehat{AO_1B}$ et $\beta = \widehat{AO_1B}$. On suppose que θ tend vers 0.



Pour $i = 1, 2$, on considère l'aire $\mathcal{A}_i$ de la partie du disque de centre O_i de rayon R_i à l'intérieur du secteur angulaire $\widehat{AO_iB}$. On note S est l'aire du quadrilatère O_1AO_2B. On a alors

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A} + S.$$

On obtient $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2}\alpha R_1^2$, $\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2}\beta R_2^2$ et, en écrivant que S est la somme des aires des triangles O_1AB et O_2AB, $S = \dfrac{1}{2}\sin\alpha\, R_1^2 + \dfrac{1}{2}\sin\beta\, R_2^2$, ce qui donne finalement

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - S = \frac{R_1^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) + \frac{R_2^2}{2}(\beta - \sin\beta).$$

On remarque que, d'après les propriétés des angles au centre, on a

$$\alpha + \beta = 2\left(\pi - \widehat{BAT}\right) + 2\left(\pi - \widehat{BAT'}\right) = 2\theta.$$

Ainsi quand θ tend vers 0, α et β tendent vers 0. On en déduit que

$$\mathcal{A} = \frac{R_1^2}{2}\left(\frac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^3)\right) + \frac{R_2^2}{2}\left(\frac{\beta^3}{6} + o(\beta^3)\right) = \frac{R_1^2}{12}\alpha^3 + \frac{R_2^2}{12}\beta^3 + o(\theta^3).$$

Mais la loi des sinus dans le triangle O_1AO_2 donne $\dfrac{R_2}{\sin\alpha/2} = \dfrac{R_1}{\sin\beta/2}$.
On a donc, quand θ tend vers 0, $\dfrac{R_2}{\alpha} \sim \dfrac{R_1}{\beta}$ et comme $\alpha+\beta = 2\theta$, $\alpha\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right) \sim 2\theta$, soit $\alpha \sim \dfrac{2R_2}{R_1+R_2}\theta$. On a de même $\beta \sim \dfrac{2R_1}{R_1+R_2}\theta$.
On obtient finalement

$$\mathcal{A} \sim \frac{R_1^2}{12}\cdot\frac{8R_2^3}{(R_1+R_2)^3}\theta^3 + \frac{R_1^2}{12}\cdot\frac{8R_1^3}{(R_1+R_2)^3}\theta^3 \sim \boxed{\frac{2(R_1R_2)^2}{3(R_1+R_2)^2}\theta^3}. \lhd$$

Les exercices suivants concernent les coniques.

4.17. Ellipses semblables

> Montrer que deux ellipses d'un plan euclidien se déduisent l'une de l'autre par une similitude si, et seulement si, elles ont la même excentricité.
>
> (**École polytechnique**)

$\rhd$ **Solution.**

L'intervention de l'excentricité nous incite bien entendu à utiliser la définition monofocale des coniques.

• Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'excentricité e, de foyer F et de directrice associée d. Par définition, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{MF} = e\mathrm{MH}$, où H est le projeté orthogonal de M sur d.

Soit s une similitude de rapport k, F' et d' les images de F et d par s. Pour un point M quelconque, de projeté orthogonal H sur d, on pose $\mathrm{M}' = s(\mathrm{M})$ et $\mathrm{H}' = s(\mathrm{H})$. Alors, une similitude conservant l'orthogonalité, H' est le projeté orthogonal de M' sur d'. Par définition d'une similitude, on a $\mathrm{M'F'} = k\mathrm{MF}$ et $\mathrm{M'H'} = k\mathrm{MH}$. Si $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$ on a $\mathrm{MF} = e\mathrm{MH}$ et en multipliant cela par k il vient $\mathrm{M'F'} = e\mathrm{M'H'}$ de sorte que M' appartient à l'ellipse $\mathcal{E}'$ d'excentricité e, de foyer F' et de directrice associée d'. On a donc $s(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$. En appliquant ce qui précède à la similitude s^{-1}, on obtient $s^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{E}$, c'est-à-dire $\mathcal{E}' \subset s(\mathcal{E})$ et finalement $\mathcal{E}' = s(\mathcal{E})$. L'image d'une ellipse par une similitude est donc une ellipse de même excentricité.

• Soit réciproquement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux ellipses d'excentricité e, de foyers F et F' de directrices associées d et d'. D'après ce qui précède, pour qu'une similitude s transforme $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$, il suffit que $s(\mathrm{F}) = \mathrm{F}'$ et $s(d) = d'$. En appelant K (resp. K') le projeté orthogonal de F (resp. F') sur d (resp. d'), cela équivaut à $s(\mathrm{F}) = \mathrm{F}'$ et $s(\mathrm{K}) = \mathrm{K}'$. Il existe une unique similitude directe (et aussi une unique similitude indirecte) transformant un couple de points distincts en un autre couple de points distincts (pour le montrer, on peut utiliser l'expression complexe d'une similitude qui est $z \longmapsto az+b$ pour une similitude directe et $z \longmapsto a\overline{z}+b$ pour une similitude indirecte, où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$). Il existe donc une similitude transformant $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$.

Conclusion. Deux ellipses se déduisent l'une de l'autre par une similitude si, et seulement si, elles ont la même excentricité. $\triangleleft$

Avec la même démonstration, on montre plus généralement que deux coniques quelconques se déduisent l'une de l'autre par une similitude si et seulement si elles ont la même excentricité. Ainsi deux paraboles quelconques sont toujours semblables.

4.18. Rayon de courbure d'une ellipse

On considère une ellipse $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ de foyers F_1, F_2. Soit R le rayon de courbure en un point M de l'ellipse et ω l'angle entre la tangente en M et la droite MF_1. On pose $r_1 = \mathrm{F}_1\mathrm{M}$ et $r_2 = \mathrm{F}_2\mathrm{M}$. Montrer que

$$\frac{2}{\mathrm{R}} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sin\omega.$$

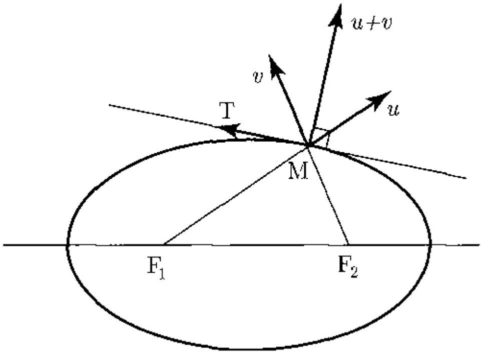
(**École polytechnique**)

$\triangleright$ **Solution.**

On se donne un paramétrage normal $s \longmapsto \mathrm{M}$ de $\mathcal{E}$. D'après la définition bifocale de l'ellipse, la fonction $s \longmapsto \mathrm{F}_1\mathrm{M}+\mathrm{F}_2\mathrm{M}$ est constante. Sa dérivée est donc nulle. Comme le gradient de la fonction $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{F}_1\mathrm{M}$ en un point M distinct de F_1 est le vecteur $u = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{F}_1\mathrm{M}}}{\mathrm{F}_1\mathrm{M}}$, la dérivée de $s \longmapsto \mathrm{F}_1\mathrm{M}$ est $s \longmapsto \langle u, \mathrm{T}\rangle$ où $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}s}$ est le vecteur tangent unitaire. En posant $v = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{F}_2\mathrm{M}}}{\mathrm{F}_2\mathrm{M}}$ on a donc

$$\langle u+v, \mathrm{T}\rangle = 0.$$

On retrouve ainsi, un résultat bien connu : le vecteur $u+v$ est normal à l'ellipse en M, autrement dit la normale en M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{F}_1\mathrm{MF}_2}$.



Le rayon de courbure géométrique R est défini par $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}$ où N est le vecteur normal principal (N est unitaire et pointe dans la concavité de l'ellipse). Dérivons la fonction nulle $s \longmapsto \langle u+v, \mathrm{T}\rangle$. Il vient,

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\langle u+v, \mathrm{N}\rangle + \langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \mathrm{T}\rangle = 0.$$

On a $\overrightarrow{\mathrm{F}_1\mathrm{M}} = \mathrm{F}_1\mathrm{M}\, u$, donc en dérivant,

$$\mathrm{T} = \mathrm{F}_1\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \langle u, \mathrm{T}\rangle u.$$

En posant $r_1 = \mathrm{F}_1\mathrm{M}$ on a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r_1}(\mathrm{T} - \langle u, \mathrm{T}\rangle u)$ et donc

$$\langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}, \mathrm{T}\rangle = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}\langle u, \mathrm{T}\rangle^2 = \frac{\sin^2\omega}{r_1}$$

car par définition $|\langle u, \mathrm{T}\rangle| = \cos\omega$. On a de même $\langle \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \mathrm{T}\rangle = \frac{\sin^2\omega}{r_2}\cdot$ Par ailleurs on a $\langle u, \mathrm{N}\rangle = \langle v, \mathrm{N}\rangle = \cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\omega$.

On obtient donc finalement

$$\frac{2\sin\omega}{\mathrm{R}} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sin^2\omega,$$

ce qui donne la relation voulue en simplifiant par $\sin\omega$ (qui n'est pas nul). $\lhd$

Le fait que la tangente à l'ellipse en un point M *est la bissectrice extérieure de l'angle* $\widehat{\mathrm{F}_1\mathrm{MF}_2}$ *est une propriété classique et importante. Elle permet par exemple de montrer immédiatement le résultat suivant qui a aussi été proposé à l'oral : dans un billard elliptique, une bille dont la trajectoire passe par le foyer* F_1 *va, après rebond en un point* M *du bord, passer par l'autre foyer* F_2.

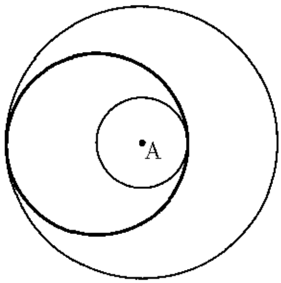
4.19. Cercles tangents à une ellipse

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les points A pour lesquels il existe quatre points distincts de $\mathcal{E}$ en lesquels un cercle de centre A est tangent à l'ellipse.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons que l'ensemble à déterminer n'est jamais vide puisqu'il contient toujours le centre O de l'ellipse : on peut trouver un cercle de centre O tangent à l'ellipse en deux sommets opposés, et un autre tangent à l'ellipse aux deux autres sommets. Si l'ellipse est un cercle, il s'agit de la seule solution : si le point A est différent du centre du cercle $\mathcal{E}$, il n'existe que deux cercles de centre A tangents à $\mathcal{E}$, chacun en un seul point.



Nous supposerons donc désormais que l'ellipse $\mathcal{E}$ n'est pas un cercle et, quitte à changer de repère orthonormé, que l'ellipse est donnée par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, avec $a > b > 0$. Soit $A = (\alpha, \beta)$ un point du plan. La question équivaut clairement à chercher le nombre de points M de l'ellipse tels que la normale à l'ellipse en M passe par A et plus précisément de déterminer pour quels points A il y en a quatre.

Au point de paramètre t, la normale à $\mathcal{E}$ a pour vecteur directeur $(b\cos t, a\sin t)$. Un point de cette normale s'écrit donc

$$(a\cos t, b\sin t) + \lambda(b\cos t, a\sin t) = \big((a+\lambda b)\cos t, (b+\lambda a)\sin t\big),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le point A est le centre d'un cercle tangent à $\mathcal{E}$ au point de paramètre t s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \alpha = (a+\lambda b)\cos t \\ \beta = (b+\lambda a)\sin t \end{cases}$. Pour un réel λ fixé (distinct de $-b/a$ et $-a/b$), il existe t (unique modulo 2π) tel que ce système soit vérifié si, et seulement si,

$$\left(\frac{\alpha}{a+\lambda b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b+\lambda a}\right)^2 = 1.$$

De plus, deux valeurs distinctes de λ qui vérifient cette équation conduisent à deux valeurs distinctes de t modulo 2π, donc à deux points distincts de l'ellipse.

Avant de poursuivre, examinons le cas $a+\lambda b=0$. On a alors $\alpha=0$ et notre point A est sur l'axe des ordonnées, axe qui est la normale à l'ellipse aux sommets $(0,b)$ et $(0,-b)$. Pour avoir d'autres points solutions on doit pouvoir trouver t vérifiant $\beta=\left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)\sin t$ et $\sin t\neq\pm1$. C'est le cas si et seulement si $-\dfrac{c^2}{b}<\beta<\dfrac{c^2}{b}$ avec $c^2=a^2-b^2$ et on a deux solutions en t distinctes modulo 2π. Les points de cet intervalle ouvert de l'axe des ordonnées sont donc solution. On obtient un intervalle analogue sur l'axe des abscisses dans le cas $\lambda=-\dfrac{b}{a}$, à savoir l'intervalle des points $(\alpha,0)$ avec $-\dfrac{c^2}{a}<\alpha<\dfrac{c^2}{a}\cdot$

Dans le cas général, le problème se ramène donc à déterminer à quelle condition la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{a}{b},-\dfrac{b}{a}\right\}$ par

$$f(\lambda)=\left(\frac{\alpha}{a+\lambda b}\right)^2+\left(\frac{\beta}{b+\lambda a}\right)^2-1$$

admet 4 zéros distincts. Notons déjà qu'il ne peut pas y avoir plus de 4 solutions puisque la recherche des zéros de f conduit à une équation polynomiale de degré 4. Étudions les variations de f. Sa dérivée est définie par $f'(\lambda)=-\dfrac{2\alpha^2b}{(a+b\lambda)^3}-\dfrac{2\beta^2a}{(b+a\lambda)^3}\cdot$ Elle s'annule si, et seulement si, $\dfrac{a+b\lambda}{b+a\lambda}=-\left(\dfrac{\alpha^2b}{\beta^2a}\right)^{1/3}$ et donc en une unique valeur $\lambda_0=\dfrac{-a-bu}{b+au}$, en posant $u=\left(\dfrac{\alpha^2b}{\beta^2a}\right)^{1/3}$. Comme $f'(\lambda)$ est positif (resp. négatif) pour $\lambda<-\dfrac{a}{b}$ $\left(\text{resp. }\lambda>-\dfrac{b}{a}\right)$, car somme de termes de même signe et que f a pour limite $+\infty$ en $-\dfrac{a}{b}$ et $-\dfrac{b}{a}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-a/b$		λ_0		$-b/a$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\lambda_0)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	-1

La fonction f s'annule une fois sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-\dfrac{a}{b}\right[$ et $\left]-\dfrac{b}{a},+\infty\right[$. Elle s'annule donc quatre fois si, et seulement si, $f(\lambda_0)<0$.

On trouve $a + b\lambda_0 = \dfrac{c^2 u}{b + au}$ et $b + a\lambda_0 = -\dfrac{c^2}{b + au}$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. En remplaçant u par son expression, on obtient

$$b + au = \frac{b^{1/3}}{\beta^{2/3}} \left((a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) &= \frac{(b+au)^2}{c^4}\left(\frac{\alpha^2}{u^2} + \beta^2\right) - 1 \\ &= \frac{b^{2/3}}{\beta^{4/3}c^4}\left((a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3}\right)^2 \left(\frac{\alpha^{2/3}\beta^{4/3}a^{2/3}}{b^{2/3}} + \beta^2\right) - 1 \\ &= \frac{1}{c^4}\left((a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3}\right)^3 - 1. \end{aligned}$$

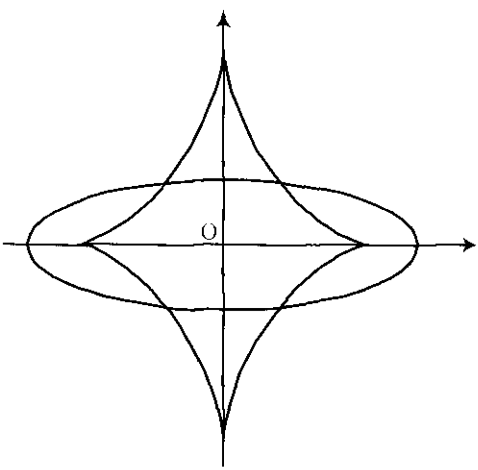
La condition $f(\lambda_0) < 0$ s'écrit donc $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} < c^{4/3}$. On obtient la partie du plan limitée par la courbe d'équation $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = c^{4/3}$. En écrivant cette équation

$$\left((a\alpha)^{1/3}\right)^2 + \left((b\beta)^{1/3}\right)^2 = \left(c^{2/3}\right)^2,$$

on voit que la courbe qu'elle définit peut se paramétrer sous la forme $(a\alpha)^{1/3} = c^{2/3}\cos t$, $(b\beta)^{1/3} = c^{2/3}\cos t$, ou encore

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ \beta = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t. \end{cases}$$

On obtient une *astroïde*, qui n'est autre que la développée de l'ellipse. ◁



Ce résultat s'explique. Donnons-nous, plus généralement, un arc bi-régulier $s \longmapsto \mathrm{M}(s) = (x(s), y(s))$ paramétré par l'abscisse curviligne s. Un point $\mathrm{A} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est sur la normale à l'arc au point $\mathrm{M}(s)$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}(s)}$ est orthogonal à $\mathrm{M}'(s)$ ce qui équivaut à

$$f(s, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) = x'(s)(\mathrm{X} - x(s)) + y'(s)(\mathrm{Y} - y(s)) = 0.$$

Imaginons que nous ayons une solution $(s_0, \mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0)$. Si la dérivée partielle de f selon s en ce point n'est pas nulle, le théorème des fonctions implicites permet de dire que l'équation $f(s, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$ admet une unique solution s au voisinage de s_0 lorsque (X, Y) est au voisinage de $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0)$. Or un petit calcul facile montre que le système $f(s_0, \mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s_0, \mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0) = 0$ a pour solution

$$\mathrm{X}_0 = x(s_0) - \frac{y'(s_0)}{(x'y'' - x''y')(s_0)} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Y}_0 = y(s_0) + \frac{x'(s_0)}{(x'y'' - x''y')(s_0)}$$

c'est-à-dire le centre de courbure en $\mathrm{M}(s_0)$. On en déduit donc que si le point $\mathrm{A}_0 = (\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0)$ n'est pas sur la développée, le nombre de normales à la courbe passant par $\mathrm{A} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ reste constant lorsque A est au voisinage de A_0. Ce nombre reste donc constant sur les composantes connexes du complémentaire de la développée, ce que l'on observe dans l'exemple de l'exercice. Nous remercions Nicolas Tosel de nous avoir transmis cette remarque pertinente.

4.20. Triangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse

Quels sont les triangles inscrits dans une ellipse qui sont d'aire maximale ?

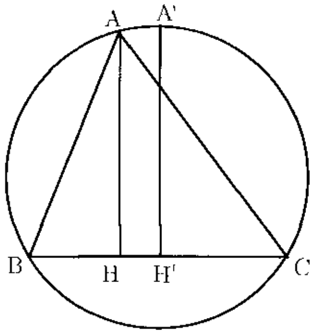
(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Soit $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, avec $a \geqslant b > 0$ une représentation paramétrique de l'ellipse $\mathcal{E}$, A, B et C trois points de $\mathcal{E}$. L'affinité orthogonale f dont l'axe est le grand axe de l'ellipse et le rapport $\dfrac{a}{b}$ transforme l'ellipse $\mathcal{E}$ en un cercle Γ de rayon a. Rappelons que f est tout simplement l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/b \end{pmatrix}$. Notons A_1, B_1 et C_1 les images de A, B et C par f. L'aire du triangle ABC, que l'on notera $\mu(\mathrm{ABC})$, est égale à $\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})\right|$. On a

$$\det(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \det f \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{a}{b}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

On en déduit que $\mu(A_1B_1C_1) = \dfrac{a}{b}\,\mu(ABC)$. Ainsi l'aire du triangle ABC est maximale si, et seulement si, l'aire de $A_1B_1C_1$ est maximale. On est donc ramené à traiter le problème pour le cercle Γ. Celui-ci étant compact et la fonction $(A, B, C) \in \Gamma^3 \longmapsto \mu(ABC)$ étant continue, son maximum est atteint. Soit ABC un triangle réalisant ce maximum. Supposons que ce triangle ne soit pas équilatéral. On a par exemple $AB \neq AC$. Soit A' le point d'intersection de Γ et de la médiatrice de [BC] du même côté que A par rapport à (BC). En notant H et H' les projetés respectifs de A et A' sur (BC), on a $A'H' > AH$ et donc $\mu(A'BC) > \mu(ABC)$, ce qui contredit la maximalité de l'aire de ABC.



Le triangle ABC est donc équilatéral. Or, tous les triangles équilatéraux inscrits dans le cercle Γ ont pour côté $2a\cos\dfrac{\pi}{6} = a\sqrt{3}$ et ont donc la même aire. Ils réalisent donc tous l'aire maximale.

Les triangles inscrits dans l'ellipse $\mathcal{E}$ et d'aire maximale sont donc les images de ces triangles équilatéraux par f^{-1}. Le cercle Γ ayant comme représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, un triangle équilatéral correspond à trois points de paramètres t, $t + \dfrac{2\pi}{3}$, $t + \dfrac{4\pi}{3}$, où t est un réel quelconque.

Conclusion. Un triangle inscrit dans l'ellipse est d'aire maximale si et seulement s'il existe t tel que les trois sommets aient pour paramètres t, $t + \dfrac{2\pi}{3}$, $t + \dfrac{4\pi}{3}$ respectivement. ◁

L'énoncé suivant pose la même question mais avec des rectangles au lieu de triangles.

4.21. Rectangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse

> Quels sont les rectangles inscrits dans une ellipse qui sont d'aire maximale ?
>
> **(École normale supérieure)**

▷ **Solution.**

Soit $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$, avec $a > 0$, $b > 0$ une représentation paramétrique de l'ellipse $\mathcal{E}$, et M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points distincts de $\mathcal{E}$. On note θ_i le paramètre de M_i. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour coordonnées

$$(a(\cos\theta_2 - \cos\theta_1), b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)),$$

c'est-à-dire

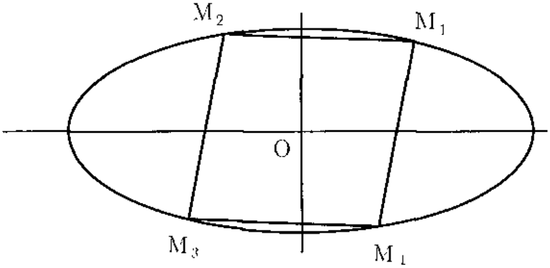
$$\left(-2a\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_1}{2}, 2b\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right).$$

Ce vecteur est colinéaire à $u = \left(-a\sin\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}, b\cos\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)$. De même, (M_3M_4) a pour vecteur directeur $v = \left(-a\sin\dfrac{\theta_3+\theta_4}{2}, b\cos\dfrac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)$.

Le déterminant de ces deux vecteurs est $ab\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}$. Ainsi les droites (M_1M_2) et (M_3M_4) sont parallèles si, et seulement si,

$$\theta_1+\theta_2 \equiv \theta_3+\theta_4 \pmod{2\pi}.$$

Il en découle que le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\theta_1+\theta_2 \equiv \theta_3+\theta_4 \pmod{2\pi}$ et $\theta_1+\theta_4 \equiv \theta_3+\theta_2 \pmod{2\pi}$. On en déduit $\theta_1 \equiv \theta_3 \pmod{\pi}$ et $\theta_2 \equiv \theta_4 \pmod{\pi}$. Comme les points sont supposés distincts, on doit donc avoir $\theta_3 \equiv \theta_1 + \pi \pmod{2\pi}$ et $\theta_4 \equiv \theta_2 + \pi \pmod{2\pi}$. Autrement dit, les points sont deux à deux symétriques par rapport au centre de l'ellipse :



Réciproquement, si $\theta_3 \equiv \theta_1 + \pi \pmod{2\pi}$ et $\theta_4 \equiv \theta_2 + \pi \pmod{2\pi}$, alors $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme de centre O. Regardons maintenant à quelle condition ce parallélogramme est un rectangle. Il faut et il suffit pour cela que (M_1M_2) et (M_2M_3) soient orthogonales ce qui équivaut d'après ce qui précède à la nullité du produit scalaire des vecteurs u et $w = \left(-a\sin\dfrac{\theta_4+\theta_1}{2}, b\cos\dfrac{\theta_4+\theta_1}{2}\right) = \left(-a\cos\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}, -b\sin\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)$, c'est-à-dire de $\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)\sin(\theta_1+\theta_2)$. On discute alors comme suit.

• Si $\mathcal{E}$ est un cercle, $a = b$ et ce produit scalaire est toujours nul. Tout parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle. L'aire d'un tel rectangle est $4\dfrac{1}{2}a^2|\sin(\theta_1-\theta_2)|$. Cette aire est maximale si $\theta_2 \equiv \theta_1 + \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, c'est-à-dire si $M_1M_2M_3M_4$ est un carré. Elle vaut alors $2a^2$.

• Si $\mathcal{E}$ n'est pas un cercle, alors $a \neq b$ et $M_1M_2M_3M_4$ est un rectangle si et seulement si $\theta_2 \equiv -\theta_1 \pmod{\pi}$. Ainsi $M_1M_2M_3M_4$ est un rectangle si et seulement s'il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que les quatre points aient pour paramètre θ_1, $-\theta_1$, $\theta_1+\pi$ et $-\theta_1+\pi$ (autrement dit les axes du rectangle sont les axes de l'ellipse).

On a alors, en supposant que $\theta_2 = \pi - \theta_1$, $M_1M_2 = 2a|\sin\theta_1|$ et $M_1M_4 = 2b|\cos\theta_1|$. L'aire du rectangle vaut donc

$$\mathcal{A} = 4ab|\sin\theta_1\cos\theta_1| = 2ab|\sin(2\theta_1)|.$$

Elle est maximale si $|\sin(2\theta_1)| = 1$, c'est-à-dire si $2\theta_1 \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ou encore $\theta_1 \equiv \dfrac{\pi}{4} \pmod{\dfrac{\pi}{2}}$. Les différentes valeurs de θ_1 donnent le même rectangle. Il existe donc un seul rectangle inscrit dans l'ellipse $\mathcal{E}$, d'aire maximale. Il a pour sommets les points de coordonnées $\left(\pm\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right)$. Il est d'aire $2ab$. ◁

4.22. Problème de Pappus

> Soient A, B, C et D quatre points d'un plan euclidien. Trouver le lieu des points M tels que
>
> $$d(M,(AB)) \times d(M,(CD)) = d(M,(AC)) \times d(M,(BD)).$$
>
> **(École polytechnique)**

▷ **Solution.**

Notons $\mathcal{E}$ le lieu cherché. Il contient toujours les points A, B, C et D. On suppose que $A \neq B$, $A \neq C$, $D \neq B$ et $D \neq C$.

• Si les quatre points sont alignés, $\mathcal{E}$ est égal au plan tout entier.

• Si trois des points, par exemple A, B, C sont alignés, sans qu'ils soient tous alignés, le point M appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si,

$$d(\mathrm{M}, (\mathrm{AB})) \times d(\mathrm{M}, (\mathrm{CD})) = d(\mathrm{M}, (\mathrm{AB})) \times d(\mathrm{M}, (\mathrm{BD})),$$

c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$ ou si $d(\mathrm{M}, (\mathrm{CD})) = d(\mathrm{M}, (\mathrm{BD}))$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite (AB) et des bissectrices de l'angle $\widehat{\mathrm{BDC}}$.

• Supposons que les points soient en position générale (trois à trois non alignés). On rapporte le plan à un repère orthonormal. Toute droite Δ possède une équation normale, c'est-à-dire de la forme $ax+by+c=0$. avec $a^2+b^2=1$. Pour tout point M de coordonnées (x,y), la distance de M à la droite Δ est égale à $|ax+by+c|$. Notons $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$. $h(x,y)=0$ et $k(x,y)=0$ des équations normales des droites (AB), (CD), (AC) et (BD). Alors M appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $|f(x,y)||g(x,y)| = |h(x,y)||k(x,y)|$, *i.e.* $f(x,y)g(x,y) = \pm h(x,y)k(x,y)$. Cela montre que $\mathcal{E}$ est la réunion de deux coniques, éventuellement dégénérées. Les seuls points d'intersection entre les deux coniques sont A, B. C et D. $\lhd$

4.23. Cocyclicité de quatre points d'une ellipse

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ avec $a > b > 0$, M_1. M_2, M_3, M_4 quatre points de $\mathcal{E}$ distincts, de paramètres t_1, t_2, t_3, t_4. Montrer que les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont cocycliques si, et seulement si,

$$t_1+t_2+t_3+t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

(École polytechnique)

$\rhd$ **Solution.**

• Supposons que les quatre points soient cocycliques. Ce sont les points d'intersection de $\mathcal{E}$ et d'un cercle d'équation $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$. Pour $t \in \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ on a donc

$$a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t + 2\alpha a\cos t + 2\beta b\sin t + \gamma = 0.$$

Remplaçons le cosinus et le sinus à l'aide des formules d'Euler. Il vient

$$\frac{a^2}{4}(e^{2it}+e^{-2it}+2) + \frac{b^2}{4}(2-e^{2it}-e^{-2it}) \\ + \alpha a(e^{it}+e^{-it}) - i\beta b(e^{it}-e^{-it}) + \gamma = 0.$$

En multipliant par e^{2it} et en ordonnant les termes cela donne

$$\frac{a^2-b^2}{4}e^{4it}+(\alpha a-i\beta b)e^{3it}+\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\gamma\right)e^{2it} \\ +(\alpha a+i\beta b)e^{it}+\frac{a^2-b^2}{4}=0.$$

Autrement dit, les nombres complexes $z_k=e^{it_k}$ pour $k=1,\dots,4$ sont racines du polynôme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X})=\frac{a^2-b^2}{4}\mathrm{X}^4+(\alpha a-i\beta b)\mathrm{X}^3+\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\gamma\right)\mathrm{X}^2 \\ +(\alpha a+i\beta b)\mathrm{X}+\frac{a^2-b^2}{4}.$$

Or il est clair que le produit des racines de ce polynôme est égal à 1. On a donc $1=z_1z_2z_3z_4=e^{i(t_1+t_2+t_3+t_4)}$, d'où il découle $t_1+t_2+t_3+t_4\in 2\pi\mathbb{Z}$.

• Supposons réciproquement que $t_1+t_2+t_3+t_4\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Considérons le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$. Il coupe $\mathcal{E}$ en quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4'. En notant t_4' le paramètre de M_4', on obtient d'après ce qui précède $t_1+t_2+t_3+t_4'\equiv 0 \pmod{2\pi}$ et donc $t_4\equiv t_4' \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire $\mathrm{M}_4=\mathrm{M}_4'$. Ainsi les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques sur $\mathcal{C}$. ◁

4.24. Cercle orthoptique d'une ellipse

Déterminer l'ensemble des points où passent deux tangentes orthogonales à une ellipse $\mathcal{E}$ donnée.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Considérons un repère orthonormé dans lequel l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Par la règle du dédoublement, la tangente à l'ellipse au point de coordonnées (x_0,y_0) a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. Soit Δ une droite d'équation $ux+vy=h$ avec (u,v) non nul. La droite Δ est tangente à l'ellipse s'il existe $(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ tel que

$$ux+vy=h \iff \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Cela équivaut à $h\neq 0$ et $x_0=\frac{a^2u}{h}$, $y_0=\frac{b^2v}{h}$. Le point (x_0,y_0) ainsi défini appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $\dfrac{a^2u^2}{h^2}+\dfrac{b^2v^2}{h^2}=1$, soit encore $a^2u^2+b^2v^2=h^2$. Réciproquement, tout triplet non nul (u,v,h) vérifiant cette relation définit une droite Δ qui est tangente à l'ellipse. On appelle cette relation *une équation tangentielle* de l'ellipse.

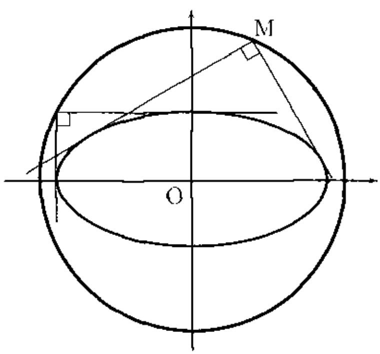
Soit $\mathrm{M}=(\alpha,\beta)$ un point du plan. Une droite passant par M a pour équation $ux+vy=u\alpha+v\beta$ avec (u,v) non nul. Elle est tangente à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $a^2u^2+b^2v^2=(u\alpha+v\beta)^2$, c'est-à-dire

$$(a^2-\alpha^2)u^2-2\alpha\beta uv+(b^2-\beta^2)v^2=0.$$

• Supposons $b^2-\beta^2\neq 0$. Si (u,v) est un couple non nul qui vérifie l'équation précédente on a forcément $u\neq 0$ (la droite n'est pas verticale) et la pente $m=-\dfrac{v}{u}$ vérifie l'équation du second degré

$$(b^2-\beta^2)m^2+2\alpha\beta m+a^2-\alpha^2=0.$$

Cette équation admet deux solutions réelles si, et seulement si, son discriminant est positif ce qui équivaut à $\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}-1\geqslant 0$. Géométriquement cette condition signifie que M doit être extérieur à l'ellipse $\mathcal{E}$. Dans le cas où M est sur l'ellipse il n'y a bien entendu qu'une seule tangente à l'ellipse passant par M : c'est le cas où l'équation admet une racine double. Plaçons nous dans le cas où il y a deux tangentes distinctes de pentes m_1 et m_2. Celles-ci sont orthogonales si, et seulement si, $m_1m_2=-1$. Cela équivaut à $\dfrac{a^2-\alpha^2}{b^2-\beta^2}=-1$, c'est-à-dire à $\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2$. On vérifie réciproquement que tout point (α,β) de ce cercle avec $\beta\neq\pm b$ est bien extérieur à l'ellipse et convient.



• Si $b^2-\beta^2=0$ alors il y a une tangente verticale à l'ellipse passant par M (cas $u=0$, v quelconque non nul). On a une seconde tangente donnée par la relation $(a^2-\alpha^2)u-2\alpha\beta v=0$, à savoir la droite de pente $\dfrac{a^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}$

(on a $\beta \neq 0$ et on peut supposer $\alpha \neq 0$ sans quoi M est sur l'ellipse). Les deux droites sont orthogonales si, et seulement si, $a^2 - \alpha^2 = 0$. On trouve les quatre points du cercle précédent qui nous manquaient.

Conclusion. L'ensemble des points où passent deux tangentes orthogonales à une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, appelé *cercle orthoptique.* ◁

Le même problème pour une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *conduit à l'ensemble d'équation* $x^2+y^2 = a^2-b^2$. *Si* $a < b$ *c'est l'ensemble vide. Si* $a = b$, *i.e. si l'hyperbole est équilatère, on trouve un seul point, le centre de l'hyperbole mais il ne convient pas vraiment : les droites orthogonales sont les deux asymptotes et elles sont tangentes à l'hyperbole au point à l'infini. Enfin lorsque* $a > b$ *on obtient un cercle auquel il faut ôter les quatre points d'intersection avec les deux asymptotes (car pour ces points l'une des deux droites obtenues est parallèle à une asymptote et ne coupe pas l'hyperbole). Notons que la condition* $a > b$ *équivaut à* $2a^2 > a^2 + b^2$. *Comme* $\dfrac{a^2+b^2}{a^2}$ *est le carré de l'excentricité e, elle s'écrit aussi* $1 < e < \sqrt{2}$.

Pour une parabole, on trouve la directrice.

L'exercice suivant envisage le même problème pour un ellipsoïde de l'espace $\mathbb{R}^3$.

4.25. Sphère orthoptique d'un ellipsoïde

Soit S la surface d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, où a, b, c sont des réels strictement positifs. Déterminer l'ensemble des points par lesquels passent trois plans tangents à S, deux à deux perpendiculaires.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Nous allons démontrer que le lieu cherché est une sphère de centre 0. Par la règle du dédoublement, une équation du plan tangent à S au point $(x_0, y_0, z_0) \in$ S est

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Le plan d'équation $ux + vy + wz = h$ avec (u, v, w) non nul est donc tangent à S si et seulement si $h \neq 0$ et $\dfrac{1}{h}(ua^2, vb^2, wc^2)$ appartient à S, c'est-à-dire si, et seulement si,

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = h^2.$$

Soit $X = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Un plan contenant le point X a une équation de la forme $ux + vy + wz = u\alpha + v\beta + w\gamma$. Il est tangent à S si, et seulement si, $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = (u\alpha + v\beta + w\gamma)^2$.

Considérons la forme quadratique définie par

$$q(u, v, w) = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - (u\alpha + v\beta + w\gamma)^2.$$

On cherche les points $X = (\alpha, \beta, \gamma)$ pour lesquels il existe trois vecteurs non nuls $U = (u, v, w)$, $U' = (u', v', w')$ et $U'' = (u'', v'', w'')$, deux à deux orthogonaux tels que $q(U) = q(U') = q(U'') = 0$. En effet, la première condition traduit le fait que les plans $\mathrm{Vect}(U, U')$, $\mathrm{Vect}(U, U'')$ et $\mathrm{Vect}(U', U'')$ sont deux à deux perpendiculaires, la deuxième le fait qu'ils sont tangents à S et contiennent X. En considérant des vecteurs de norme 1 colinéaires à U, U' et U'', cela équivaut à l'existence d'une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs q-isotropes (*i.e.* tels que $q(e_1) = q(e_2) = q(e_3) = 0$).

• Si une telle base existe, la matrice de q dans cette base a une trace nulle. Cette trace ne dépend pas de la base orthonormale choisie, car les matrices d'une forme quadratique dans deux bases orthonormales sont semblables : si l'une est A, l'autre s'écrit ${}^t\mathrm{QAQ}$, avec Q orthogonale et donc $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$. On obtient, à partir de l'expression de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Tr}(q) = (a^2 - \alpha^2) + (b^2 - \beta^2) + (c^2 - \gamma^2) = 0$$

et donc $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 + c^2$: le point X appartient à la sphère S' de centre 0 et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

• Supposons réciproquement que X appartient à S', c'est-à-dire que $\mathrm{Tr}(A) = 0$, où A est la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous avons démontré dans l'exercice 2.8 que toute matrice est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont égaux. Il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tPAP$ ait des termes diagonaux égaux. Comme B est semblable à A, on a $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A) = 0$, donc tous les termes diagonaux de B sont nuls. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Alors B est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ et on a donc $q(e_1) = q(e_2) = q(e_3) = 0$. Le point X appartient à l'ensemble cherché.

Conclusion. L'ensemble des points par lesquels passent trois plans tangents à l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ et deux à deux perpendiculaires est la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, appelée *sphère orthoptique* de l'ellipsoïde. ◁

Cette démonstration s'applique sans changement pour un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$.

Nous poursuivons cette série avec deux exercices assez calculatoires.

4.26. Centres des cercles circonscrits à une famille de triangles inscrits dans une parabole

On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$. Une droite Δ variable passant par le foyer coupe (P) en A et B. Déterminer l'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles OAB.

(École polytechnique)

▷ **Solution.**

Le foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. On écarte le cas où Δ est l'axe de la parabole, car alors elle ne coupe P qu'en un point. Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que Δ ait pour équation $x - \frac{p}{2} = my$. On note $\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$ et $\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$ les coordonnées de A et B. Alors a et b sont les solutions de

$$(E) \qquad y^2 - 2pmy - p^2 = 0.$$

Soit (x, y) les coordonnées du centre du cercle circonscrit Ω au triangle OAB. Une équation de la médiatrice de [OA] est

$$\frac{a^2}{2p}\left(x - \frac{a^2}{4p}\right) + a\left(y - \frac{a}{2}\right) = 0,$$

soit $\frac{1}{2p}x + \frac{1}{a}y = \frac{a^2}{8p^2} + \frac{1}{2}$. De même, la médiatrice de [OB] a pour équation $\frac{1}{2p}x + \frac{1}{b}y = \frac{b^2}{8p^2} + \frac{1}{2}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{a-b}{ab}y = \frac{b^2 - a^2}{8p^2}$ et donc $-\frac{1}{ab}y = \frac{b+a}{8p^2}$ puisque $a \neq b$. Comme a, b sont les solutions de (E) on a $ab = -p^2$ et $b + a = 2mp$ donc $y = \frac{pm}{4}$.

En additionnant les deux équations, on obtient

$$\frac{1}{p}x + \frac{a+b}{ab}y = \frac{a^2 + b^2}{8p^2} + 1,$$

soit $\frac{1}{p}x - \frac{2m}{p}y = \frac{2m^2 + 1}{4} + 1$, car $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4p^2m^2 + 2p^2$. On en déduit que $x = pm^2 + \frac{5p}{4}$ et donc que

$$x = \frac{16y^2}{p} + \frac{5p}{4}.$$

Ainsi Ω appartient à une parabole. Comme m décrit $\mathbb{R}$, il en est de même de y et le lieu de Ω est la parabole en entier. Cette parabole a le même axe que (P), ce qui est normal par symétrie. ◁

4.27. Centres des triangles équilatéraux inscrits dans une parabole

> Déterminer le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans la parabole d'équation $y^2 = 2px$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.
>
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soit $M_i = \left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ trois points distincts de la parabole, et $G = (a, b) = \left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{6p}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$. Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral si, et seulement si, G est aussi orthocentre du triangle, c'est-à-dire si, et seulement si, on a $\overrightarrow{GM_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} = 0$ et les autres égalités obtenues par permutation circulaire. On obtient

$$\left(\frac{y_1^2}{2p} - a\right)\left(\frac{y_3^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}\right) + (y_1 - b)(y_3 - y_2) = 0$$

et après simplification par $y_3 - y_2$ et multiplication par $4p^2$,

$$\left(y_1^2 - 2pa\right)(y_3 + y_2) + 4p^2(y_1 - b) = \left(y_1^2 - 2pa\right)(3b - y_1) + 4p^2(y_1 - b) = 0,$$

car $y_1 + y_2 + y_3 = 3b$. Ainsi y_1, et par permutation circulaire y_2 et y_3, sont racines du polynôme

$$P = X^3 - 3bX^2 - (2pa + 4p^2)X + (6pab + 4p^2b).$$

Les fonctions symétriques des racines vérifient

$$\sigma_1 = 3b \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -(2pa + 4p^2).$$

Mais par définition de a,

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 6ap = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9b^2 + 4ap + 8p^2.$$

On a donc $a = \dfrac{9}{2p}b^2 + 4p$.

Réciproquement, soit $G = (a, b)$ tel que $a = \dfrac{9}{2p} b^2 + 4p$. Considérons les racines y_1, y_2, y_3 du polynôme P, où P est défini comme précédemment et admettons provisoirement qu'elles sont bien réelles. On définit les points $M_i = \left(\dfrac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$. On a alors

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \dfrac{\sigma_1}{3} = b \\ \dfrac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{6p} = \dfrac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{6p} = \dfrac{9b^2 + 4pa + 8p^2}{6p} = a, \end{cases}$$

car $a = \dfrac{9}{2p} b^2 + 4p$, donc G est le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$. Et, d'après ce qui précède, comme y_1, y_2, y_3 sont racines de P, le triangle $M_1M_2M_3$ est bien équilatéral.

Il suffit maintenant de vérifier que, pour tout réel b, le polynome

$$P = X^3 - 3bX^2 - (9b^2 + 12p^2)X + (27b^3 + 28p^2b).$$

(on a remplacé a par son expression en fonction de b) possède trois racines distinctes. Le polynôme dérivé $P' = 3X^2 - 6bX - (9b^2 + 12p^2)$ possède deux racines distinctes $b - 2\sqrt{b^2 + p^2}$ et $b + 2\sqrt{b^2 + p^2}$. Le polynôme P a trois racines distinctes si, et seulement si,

$$P\left(b - 2\sqrt{b^2 + p^2}\right) P\left(b + 2\sqrt{b^2 + p^2}\right) < 0.$$

Le reste dans la division de P par P' est $-8(b^2 + p^2)(X - 3b)$. On étudie donc le signe de

$$\Big(8(b^2 + p^2)\Big)^2 (-2b - 2\sqrt{b^2 + p^2})(-2b + 2\sqrt{b^2 + p^2}) = -4\Big(8(b^2 + p^2)\Big)^2 p^2.$$

C'est bien un terme strictement négatif : le polynôme P a trois racines distinctes.

Conclusion. Le lieu cherché est la parabole d'équation $x = \dfrac{9}{2p} y^2 + 4p$, ou $y^2 = \dfrac{2p}{9}(x - 4p)$. Elle a même axe que la parabole initiale et son sommet est $(4p, 0)$. ◁

On peut se poser le même problème pour une ellipse ou une hyperbole.

• *Pour une ellipse d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *avec* $0 < b < a$, *le lieu des centres des triangles équilatéraux est l'ellipse d'équation*

$$\frac{(a^2 + 3b^2)^2 x^2}{(a^2 - b^2)^2 a^2} + \frac{(3a^2 + b^2)^2 y^2}{(a^2 - b^2)^2 b^2} = 1.$$

Dans le cas où $a = b$ *l'ellipse de départ est un cercle et on obtient seulement le point* $(0, 0)$.

• *Pour un hyperbole d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *le lieu des centres des triangles équilatéraux a pour équation*

$$\frac{(a^2 - 3b^2)^2 x^2}{(a^2 + b^2)^2 a^2} - \frac{(3a^2 - b^2)^2 y^2}{(a^2 + b^2)^2 b^2} = 1.$$

Si $a = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$, *on obtient la réunion de deux droites (d'équation* $x = \pm\dfrac{a}{2}$*), si* $a = b\sqrt{3}$, *l'ensemble vide, et dans le cas général* $a \notin \{\dfrac{b}{\sqrt{3}}, b\sqrt{3}\}$ *une hyperbole de mêmes axes que l'hyperbole initiale.*

L'énoncé suivant fait apparaître une quadrique.

4.28. Points équidistants de deux droites non coplanaires

> Dans un espace euclidien de dimension 3, trouver l'ensemble des points équidistants de deux droites affines non coplanaires données.
> (**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Soient D et D′ les deux droites, H ∈ D et H′ ∈ D′ les deux points tels que (HH′) soit la perpendiculaire commune à D et D′. On choisit un repère orthonormal $(0, i, j, k)$ de l'espace tel que le point O soit le milieu de [HH′], $(\mathrm{O}, k) = (\mathrm{HH}')$. Il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tels que les droites D et D′ soient dans les plans $z = a$ et $z = -a$ respectivement. En choisissant de plus i et j tels que (O, i) et (O, j) soient les bissectrices des projetées de D et D′ sur le plan orthogonal à k contenant 0, il existe m tel que D et D′ aient pour équations respectives

$$\mathrm{D}\begin{cases} y = mx \\ z = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}'\begin{cases} y = -mx \\ z = -a \end{cases}.$$

Soit M de coordonnées (x, y, z). En appelant P le projeté de M sur le plan d'équation $z = a$, la distance d de M à D vérifie

$$d^2 = \mathrm{MP}^2 + (d(\mathrm{P}, \mathrm{D}))^2 = (z - a)^2 + \frac{(y - mx)^2}{1 + m^2}.$$

On obtient de même pour la distance d' de M à D′,

$$d'^2 = (z + a)^2 + \frac{(y + mx)^2}{1 + m^2}.$$

On cherche les points M vérifiant

$$(z-a)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2} = (z+a)^2 + \frac{(y+mx)^2}{1+m^2}.$$

Cela équivaut à $az + \dfrac{mxy}{1+m^2} = 0$ soit encore $z = -\dfrac{m}{a(1+m^2)}xy$. L'ensemble des points M équidistants des droites D et D′ est donc un paraboloïde hyperbolique. ◁

Avant d'aborder le thème des problèmes d'extrema, voici un exercice qui n'utilise que les propriétés générales de la distance. Il fournit une petite introduction à la notion de diamètre transfini d'une partie du plan.

4.29. Diamètre transfini

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On pose, pour $n \geqslant 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{E}^n$,

$$\delta_n(a_1, \dots, a_n) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(a_i, a_j)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

(moyenne géométrique des distances entre les points pris deux à deux), puis

$$d_n(\mathrm{E}) = \sup_{(a_1,\dots,a_n)\in \mathrm{E}^n} \delta_n(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

1. Que dire de $d_n(\mathrm{E})$ suivant que E est bornée ou non bornée ? Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$, comparer $d_n(\mathrm{E})$ et $d_n(\mathrm{F})$.

2. On suppose E bornée. Montrer que la suite $(d_n(\mathrm{E}))_{n \geqslant 0}$ est décroissante et converge. *Sa limite est appelée le diamètre transfini de la partie* E.

3. Calculer $d_3(\mathrm{E})$ lorsque E est un segment.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. On remarque déjà que si E est un ensemble fini alors $d_n(\mathrm{E}) = 0$ dès que n est strictement plus grand que Card E. On supposera donc dans la suite que E est une partie infinie. Notons aussi que $d_2(\mathrm{E})$ est le diamètre usuel de la partie E.

• Si E est borné de diamètre $d_2(\mathrm{E})$, alors pour tout $(a, b) \in \mathrm{E}^2$, on a $d(a, b) \leqslant d_2(\mathrm{E})$. On en déduit que, si $n \geqslant 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{E}^n$, alors

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(a_i, a_j) \leqslant d_2(\mathrm{E})^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{et} \quad \delta_n(a_1, \dots, a_n) \leqslant d_2(\mathrm{E}).$$

Ainsi, si E est borné, on a $d_n(\mathrm{E}) \leqslant d_2(\mathrm{E})$, pour tout $n \geqslant 2$.

• Supposons que E ne soit pas borné. Soit $\mathrm{K} > 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que si $1 \leqslant i < j \leqslant n$ alors $d(a_i, a_j) \geqslant \mathrm{K}$. C'est clair pour $n = 2$. Supposons le résultat au rang n. La réunion des boules fermés de rayon K centrées en les a_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$ ne recouvre pas E car E n'est pas borné. On peut donc trouver $a_{n+1} \in \mathrm{E}$ tel que $d(a_{n+1}, a_k) \geqslant \mathrm{K}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ce qui donne un $(n+1)$-uplet vérifiant la propriété souhaitée.

Pour un tel choix de $a_1, \ldots, a_n$, on a alors $\delta_n(a_1, \ldots, a_n) \geqslant \mathrm{K}$, et donc $d_n(\mathrm{E}) \geqslant \mathrm{K}$. Comme K est arbitraire, on a donc $d_n(\mathrm{E}) = +\infty$ pour tout $n \geqslant 2$.

Soit E et F tels que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. Si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{E}$ alors $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{F}$ et $\delta_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant d_n(\mathrm{F})$. On en déduit que $d_n(\mathrm{E}) \leqslant d_n(\mathrm{F})$ pour tout $n \geqslant 2$.

2. Montrons que la suite $(d_n(\mathrm{E}))_{n\geqslant 2}$ est décroissante. Soit $n \geqslant 2$ et $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathrm{E}^{n+1}$. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, considérons le produit

$$\mathrm{P}_k = \prod_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n+1 \\ i \neq k,\, j \neq k}} d(a_i, a_j).$$

On a, par définition,

$$\mathrm{P}_k = \delta_n(a_1, \ldots, \widehat{a_k}, \ldots, a_{n+1})^{\frac{n(n-1)}{2}} \leqslant d_n(\mathrm{E})^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Considérons le produit $\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{n+1}$. Il est égal à $\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} d(a_i, a_j)\right)^{n-1}$, car chaque élément $d(a_i, a_j)$ apparait autant de fois que l'on peut choisir k dans $[\![1, n+1]\!] \setminus \{i, j\}$. De ce qui précède, il résulte que

$$\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} d(a_i, a_j)\right)^{n-1} = \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{n+1} \leqslant d_n(\mathrm{E})^{\frac{n(n-1)(n+1)}{2}}$$

puis $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} d(a_i, a_j) \leqslant d_n(\mathrm{E})^{\frac{n(n+1)}{2}}$, soit $\delta_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) \leqslant d_n(\mathrm{E})$. Ceci étant vrai pour tout $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathrm{E}^{n+1}$, on en déduit par passage à la borne supérieure que

$$d_{n+1}(\mathrm{E}) \leqslant d_n(\mathrm{E}).$$

Conclusion. La suite $(d_n(\mathrm{E})_{n\geqslant 2}$ décroît. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

3. On suppose que E est le segment $[m, n]$. Soit $(a, b, c) \in \mathrm{E}^3$. On peut supposer que m, a, b, c, n sont alignés dans cet ordre. On a, par définition : $\delta_3(a,b,c) = (d(a,b)d(b,c)d(a,c))^{\frac{1}{3}}$. Puisque $b \in [a,c]$, on a $d(a,b)+d(b,c) = d(a,c)$. On en déduit que

$$d(a,b)d(b,c) = \frac{1}{4}\left[(d(a,c))^2 - (d(a,b)-d(b,c))^2\right] \leqslant \frac{1}{4}(d(a,c))^2,$$

avec égalité si b est le milieu de $[a,c]$. On obtient donc

$$\delta_3(a,b,c) \leqslant \left(\frac{1}{4}(d(a,c))^3\right)^{1/3} \leqslant \left(\frac{1}{4}(d(m,n))^3\right)^{1/3},$$

avec égalité si $a = m, c = n$ et b est le milieu de $[m,n]$. On obtient donc $d_3(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}d(m,n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\mathrm{long}(\mathrm{E})$, où $\mathrm{long}(\mathrm{E})$ est la longueur du segment E. ◁

La notion de diamètre transfini est reliée aux polynômes. Identifions $\mathbb{R}^2$ *avec le plan complexe et notons* $\mathcal{U}_n$ *l'ensemble des polynômes unitaires de degré* n *de* $\mathbb{C}[X]$. *Soit* $\mathrm{E} \subset \mathbb{C}$ *bornée et infinie. Pour* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[X]$ *on pose* $\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{E}} = \sup_{z\in\mathrm{E}} |\mathrm{P}(z)|$ *(c'est une norme) et* $\mu_n(\mathrm{E}) = \inf_{\mathrm{P}\in\mathcal{U}_n} \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{E}}$. *On peut montrer que la suite* $(\mu_n(\mathrm{E}))_{n\geqslant 0}$ *vérifie* $\mu_{n+m}(\mathrm{E}) \leqslant \mu_n(\mathrm{E})\mu_m(\mathrm{E})$ *pour tout couple* (n,m) *ce qui implique la convergence de la suite* $\mu_n(\mathrm{E})^{1/n}$ *(voir l'exercice 2.3 du tome 1 d'analyse). On montre ensuite, à l'aide du déterminant de Vandermonde, que sa limite* $\mu(\mathrm{E})$ *n'est autre que le diamètre transfini de la partie* E. *A l'aide de cela on peut approfondir la question 3 de l'exercice et montrer (en faisant intervenir les polynômes de Tchebychev) que le diamètre transfini d'un segment de longueur* a *est égal à* $a/4$. *Le lecteur pourra aussi s'amuser à calculer (directement) le diamètre transfini d'un cercle de rayon 1 (il vaut 1). Indiquons que la seconde épreuve du concours commun des Mines de 1993 (option M) contient l'essentiel des résultats de cette note.*

Les quatre exercices suivants étudient des problèmes d'extrema.

4.30. Deux problèmes d'extrema

Soit ABC un triangle du plan et M un point à l'intérieur du triangle (au sens large, en comptant les trois segments).

1. Déterminer les points M tels que le produit des trois distances de M aux côtés du triangle soit extrémal ?

2. Même question avec la somme des distances aux côtés du triangle.

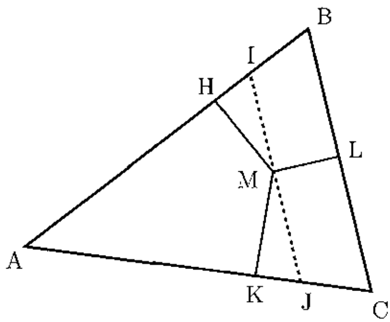
(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. L'intérieur du triangle est un compact. En effet, c"est l'image par l'application continue $(\lambda,\mu) \longmapsto \lambda A + \mu B + (1-\lambda-\mu)C$ du compact $\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^2,\ \lambda+\mu \leqslant 1\}$. La fonction f qui à M associe le produit des trois distances est continue. Elle possède donc un minimum et un maximum sur ce compact.

Son minimum est clairement égal à 0 et est atteint en tout point situé sur l'un des côtés du triangle.

Appelons H, K, L les projetés orthogonaux de M sur (AB), (CA), (BC). On a donc $f(M) = MH \cdot MK \cdot ML$. Supposons que ML soit fixé, c'est-à-dire que M varie sur un segment [IJ] parallèle à (BC) ($I \in [AB]$, $J \in [AC]$).



Les angles $\widehat{HMI}$ et $\widehat{KMJ}$ sont constants quand M décrit [IJ]. On a donc $f(M) = \cos\widehat{HMI} \cdot MI \cdot \cos\widehat{KMJ} \cdot MJ \cdot ML$ qui est proportionnel au produit $MI \cdot MJ$. Comme $MI + MJ = IJ$, ce produit est maximum quand $MI = MJ$, c'est-à-dire quand M est le milieu de [IJ]. La droite (AM) est alors une médiane du triangle ABC. Si le maximum de f est atteint en M, on montre par le même raisonnement que M appartient aux trois médianes du triangle. C'est donc le centre de gravité G du triangle.

Le raisonnement précédent montre que f ne possède pas d'autre extremum local que ses extrema globaux. Si M_0 est un point situé strictement à l'intérieur du triangle et différent de G, il n'appartient pas aux trois médianes du triangle. Si par exemple M_0 n'appartient pas à la médiane relative au point A, on fait varier M sur un segment parallèle au côté (BC). Dans un voisinage de M_0. f est monotone, donc f ne possède pas d'extremum local en M_0.

2. On reprend les notations de la question précédente et on pose $g(M) = MH + MK + ML$. Quand ML est fixé, on obtient

$$g(M) = \cos\widehat{HMI} \cdot MJ + \cos\widehat{KMJ} \cdot MJ + ML.$$

Comme $\mathrm{MI} + \mathrm{MJ} = \mathrm{IJ}$, cette somme est une fonction affine de MI. Une fonction affine est monotone donc les extrema de $g(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in [\mathrm{IJ}]$ sont atteints en I et en J donc sur l'un des côtés du triangle. Mais le même raisonnement montre que quand M décrit un côté du triangle, un extremum est atteint en un sommet du triangle. Comme $g(\mathrm{A})$, $g(\mathrm{B})$ et $g(\mathrm{C})$ sont égaux respectivement aux trois hauteurs du triangle, c'est-à-dire à $\dfrac{2\mathrm{S}}{\mathrm{BC}}$, $\dfrac{2\mathrm{S}}{\mathrm{CA}}$ et $\dfrac{2\mathrm{S}}{\mathrm{AB}}$, où S est l'aire du triangle, le maximum (resp. le minimum) de g est obtenu au point opposé au plus petit (resp. plus grand) côté du triangle.

Si le triangle n'est pas isocèle, le maximum et le minimum sont obtenu en un unique point.

Supposons que le triangle soit isocèle en A, mais pas équilatéral. Avec les notations précédentes, on a

$$g(\mathrm{M}) = \cos\widehat{\mathrm{HMI}} \cdot \mathrm{MI} + \cos\widehat{\mathrm{KMJ}} \cdot \mathrm{MJ} + \mathrm{ML} = \cos\widehat{\mathrm{HMI}} \cdot \mathrm{IJ} + \mathrm{ML}$$

et g est constante sur chaque parallèle à (BC). On en déduit que les extrema de g sont obtenus en A d'une part et en tout point du segment [BC] d'autre part.

Si le triangle est équilatéral, la fonction g ne varie pas si on se déplace sur une parallèle à un quelconque des côtés. Elle est donc constante.

Le raisonnement précédent montre que g ne possède pas d'autres extrema locaux que ses extrema globaux. $\triangleleft$

Voici une autre rédaction de la première question qui donne en outre la valeur du maximum de f. Avec les notations de la figure ci-dessus, on a $\mathrm{ML} \cdot \mathrm{BC} + \mathrm{MK} \cdot \mathrm{AC} + \mathrm{MH} \cdot \mathrm{AB} = 2\mathrm{S}$ *où* S *désigne l'aire du triangle* ABC. *L'inégalité arithmético-géométrique permet de dire que*

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BC} \cdot f(\mathrm{M}) \leqslant \left(\frac{2\mathrm{S}}{3}\right)^3$$

donc que $f(\mathrm{M}) \leqslant \dfrac{8\mathrm{S}^3}{27abc}$ *avec* $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ *et* $c = \mathrm{AB}$. *On a égalité lorsque* $a\mathrm{ML} = b\mathrm{MK} = c\mathrm{MH}$ *et il est facile de voir que cela défini le centre de gravité du triangle.*

Dans l'exercice 4.34 sera étudiée la fonction qui à M *associe la somme des distances* $\mathrm{AM} + \mathrm{BM} + \mathrm{CM}$. *En attendant, voici un autre problème d'extremum où on cherche à maximiser un rapport d'aire.*

4.31. Problème d'extremum

1. Soit $\mathrm{E} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Déterminer

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{E}} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)}.$$

2. Application : dans le plan euclidien, on considère un triangle ABC et des points $\mathrm{A}' \in [\mathrm{B},\mathrm{C}]$, $\mathrm{B}' \in [\mathrm{C},\mathrm{A}]$, $\mathrm{C}' \in [\mathrm{A},\mathrm{B}]$ tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en O. Comment faut-il choisir O pour que le rapport des aires des triangles $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ et ABC soit maximal.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. La fonction $f : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)}$ n'est pas définie sur E tout entier, mais uniquement sur l'ensemble F des éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ de E tels que $x_i \neq 1$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour $n = 1$, $\mathrm{F} = \emptyset$; pour $n = 2$, la fonction f est constante et vaut 1. Pour $n \geqslant 3$, il est tentant, étant donnée la symétrie du problème, de penser que le maximum est obtenu quand $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$. Posons $m = f\left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{(n-1)^n}$.

L'ensemble F n'étant pas compact, on ne peut pas affirmer directement que f est majorée sur F. On va se ramener au cas d'un compact en montrant que f prend des petites valeurs si l'un des x_i est proche de 1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{F}$. Supposons qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k > 1 - \varepsilon$. Pour $i \neq k$, on a $x_i \leqslant 1 - x_k < \varepsilon$ et $1 - x_i \geqslant 1 - \varepsilon$. On en déduit que

$$f(x) \leqslant \frac{x_k(1 - x_k)^{n-1}}{(1 - x_k)(1 - \varepsilon)^{n-1}} \leqslant \frac{\varepsilon^{n-2}}{(1 - \varepsilon)^{n-1}}.$$

Comme cette quantité tend vers 0 avec ε, on peut choisir ε tel que

$$\frac{\varepsilon^{n-2}}{(1 - \varepsilon)^{n-1}} \leqslant \frac{m}{2}.$$

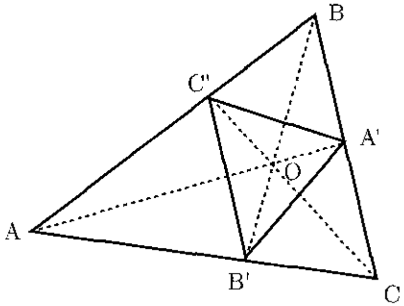
Considérons $\mathrm{G} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{F},\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant 1 - \varepsilon\}$. L'ensemble G est clairement fermé et borné. Il est donc compact et f possède un maximum sur G. Comme $f(x) \leqslant \frac{m}{2}$ pour tout $x \in F \setminus G$ et $m \in f(G)$, on a $\sup_G f = \sup_F f$. Ainsi f possède une borne supérieure sur F qui est atteinte en un point de G.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ tel que $\sup_G f = f(a)$. Montrons que l'on a $a_1 = \cdots = a_n$ en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux indices i et j tels que $a_i \neq a_j$. Considérons $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ tel que $x_k = a_k$ si $k \neq i, j$. Alors x_i et x_j varient avec $x_i + x_j = a_i + a_j = s$, où $s \in \,]0,1[$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{f(a)} &= \frac{x_i x_j}{(1-x_i)(1-x_j)} : \frac{a_i a_j}{(1-a_i)(1-a_j)} \\ &= \frac{x_i(s-x_i)}{(1-x_i)(1-s+x_i)} : \frac{a_i(s-a_i)}{(1-a_i)(1-s+a_i)} = \frac{g(x_i)}{g(a_i)},\end{aligned}$$

où g est définie sur $[0,s]$ par $g(z) = \frac{z(s-z)}{(1-z)(1-s+z)}\cdot$ Le calcul de g' montre que g atteint son maximum en $\frac{s}{2}\cdot$ Ainsi $g\left(\frac{s}{2}\right) > g(a_i)$ et on peut trouver $x \in G$ tel que $f(x) > f(a)$, ce qui contredit la définition de a. Ainsi $a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ et $\sup_E f = \frac{1}{(n-1)^n}\cdot$

2. On sait que si on considère le déterminant dans une base orthonormale, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$. On a le même résultat pour l'aire de A'B'C' et il faut donc exprimer $\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ en fonction de $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



Le point O est à l'intérieur du triangle, strictement (si O est sur l'un des côtés du triangle, les points A', B' et C' sont alignés et A'B'C' n'est pas un triangle). On note (α, β, γ) ses coordonnées barycentriques relativement à (A, B, C). Ce sont des réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Montrons qu'alors A' est le barycentre de $((B, \beta), (C, \gamma))$. En effet si on note A'' ce point, par associativité du barycentre, O est le barycentre de $(A, \alpha), (A'', \beta+\gamma))$ et A'' appartient à (BC) et (OA). C'est A'. On montre de même que B′ et C′ sont les barycentres respectifs de $((\mathrm{A},\alpha),(\mathrm{C},\gamma))$ et $((\mathrm{A},\alpha),(\mathrm{B},\beta))$. On en déduit que

$$\overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \frac{1}{\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB'}} = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{AB}},$$

puis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} &= -\frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}-\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= -\frac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\gamma(\beta-\alpha)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

et de même

$$\overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\det(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}},\overrightarrow{\mathrm{A'C'}})}{\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})} &= \begin{vmatrix} -\dfrac{\beta}{\beta+\gamma} & \dfrac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)} \\ \dfrac{\gamma(\beta-\alpha)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)} & -\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\end{vmatrix}\\ &= \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Le rapport entre les aires des triangles A′B′C′ et ABC est donc $\dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)} = \dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$. D'après la question 1, il est maximal lorsque $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire lorsque O est le centre de gravité du triangle. Le rapport vaut alors $2\left(\dfrac{1}{3-1}\right)^3 = \dfrac{1}{4}$. ◁

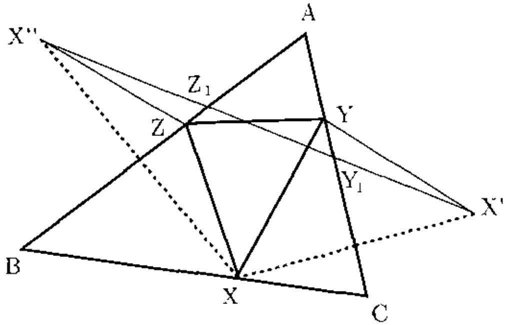
Le question suivante a été posée par Gianfranco Di Fagnano en 1775 et l'idée essentielle de la solution semble due à Fejér vers 1900.

4.32. Triangle de périmètre minimal inscrit dans un triangle

Soit ABC un triangle dont tous les trois angles sont aigus. Soit $\mathrm{X}\in[\mathrm{A},\mathrm{B}]$, $\mathrm{Y}\in[\mathrm{B},\mathrm{C}]$ et $\mathrm{Z}\in[\mathrm{C},\mathrm{A}]$. Montrer qu'il existe une configuration telle que le périmètre du triangle XYZ soit minimal et la caractériser. **(École polytechnique, École normale supérieure)**

▷ **Solution.**

L'ensemble $\mathrm{E}=[\mathrm{B},\mathrm{C}]\times[\mathrm{C},\mathrm{A}]\times[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ étant compact et la fonction $f:(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})\longmapsto \mathrm{XY}+\mathrm{YZ}+\mathrm{ZX}$ étant continue, elle possède un minimum sur E. Soit $(X, Y, Z) \in E$, X' et X'' les symétriques respectifs de X par rapport aux droites (AC) et (AB).



On a

$$f(X, Y, Z) = X'Y + YZ + ZX'' \geqslant X'X'',$$

avec égalité si, et seulement si, X', Y, Z et X'' sont alignés dans cet ordre. Fixons le point X. Le point X'' est l'image de X' dans la rotation de centre A et d'angle $2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$. On a donc $\widehat{X'AX''} = 2\widehat{CAB} < \pi$, car l'angle $\widehat{CAB}$ est aigu. Le segment $[X'X'']$ coupe donc les demi-droites [AC) et [AB) en Y_1 et Z_1 respectivement, avec X', Y_1, Z_1 et X'' alignés dans cet ordre. Comme $\widehat{XBX''} = 2\widehat{XBA} < \pi$ et $\widehat{XCX'} = 2\widehat{XCA} < \pi$, les points X' et X'' appartiennent au demi-plan limité par (BC) contenant A. Ce demi-plan étant convexe, il contient Y_1 et Z_1 qui appartiennent respectivement aux demi-droites [C, A) et [B, A). Finalement, on obtient $Y_1 \in [A, C]$ et $Z_1 \in [AB]$. De ce qui précède on peut conclure

$$f(X, Y, Z) \geqslant f(X, Y_1, Z_1) = X'X''.$$

On a $AX' = AX = AX''$. Le triangle $AX'X''$ étant isocèle, on en déduit

$$X'X'' = 2AX \cdot \cos \widehat{AX'X''} = 2AX \cdot \cos \frac{\pi - \widehat{X'AX''}}{2} = 2AX \cdot \sin \widehat{CAB}.$$

Ainsi $f(X, Y_1, Z_1) = X'X''$ est minimal si AX est minimal, c'est-à-dire si X est le projeté orthogonal de A sur (BC) *i.e* le pied de la hauteur issue de A. Ce projeté appartient au segment [B, C] car les angles du triangle sont aigus.

Le minimum de f est donc atteint en un seul triplet (X_0, Y_0, Z_0) : X_0 est le projeté orthogonal de A sur (BC), Y_0 et Z_0 les points d'intersection de $X'X''$ avec (AC) et (AB) respectivement. Si au lieu de fixer X, on avait fixé Y (resp. Z), on aurait trouvé qu'au triplet (X_0, Y_0, Z_0) où f est minimum, Y_0 (resp. Z_0) est le projeté orthogonal de B sur (AC) (resp. de C sur (AB)). Le minimum étant atteint en un point unique, on en déduit qu'il est atteint pour le triplet (X_0, Y_0, Z_0) formé des pieds des trois hauteurs. Le triangle $X_0Y_0Z_0$ est appelé *le triangle orthique* du triangle ABC. ◁

Montrons que les droites (AX_0), (BY_0) *et* (CZ_0) *sont les bissectrices intérieures du triangle* $X_0Y_0Z_0$. *Les quadrilatères* AY_0X_0B *et* AZ_0X_0C *sont inscriptibles dans des cercles de diamètre* [AB] *et* [AC] *respectivement. On a donc*

$$(X_0Y_0, X_0A) \equiv (BY_0, BA) \equiv \frac{\pi}{2} + (CA, BA) \pmod \pi$$
$$(X_0A, X_0Z_0) \equiv (CA, CZ_0) \equiv (CA, BA) + \frac{\pi}{2} \pmod \pi.$$

Le angles de droites (X_0Y_0, X_0A) *et* (X_0A, X_0Z_0) *sont égaux. Comme les demi-droites* $[X_0Y_0)$ *et* $[X_0Z_0)$ *sont dans le même demi-plan limité par la droite* (BC), *on a* $(\overrightarrow{X_0Y_0}, \overrightarrow{X_0A}) = (\overrightarrow{X_0A}, \overrightarrow{X_0Z_0})$ *et* (X_0A) *est bissectrice intérieure de l'angle* X_0 *du triangle* $X_0Y_0Z_0$. *La démonstration est la même pour les autres angles.*

Pour cette raison $X_0Y_0Z_0$ *est appelé une trajectoire de lumière. En effet, considérons trois miroirs* M_1, M_2 *et* M_3 *situés dans des plans perpendiculaires au plan* (ABC) *et coupant le plan* (ABC) *suivant les segments* [BC], [CA] *et* [AB]. *Un rayon lumineux issus de* Z_0 *et se dirigeant vers* X_0 *sera réfléchi sur* M_1, *selon la loi de réflexion de Descartes, dans la direction* (X_0Y_0) ; *il touchera le miroir* M_2 *en* Y_0, *sera réfléchi dans la direction* (Y_0Z_0), *touchera le miroir* M_3 *en* Z_0, *sera réfléchi dans la direction* (Z_0X_0). *On obtient ainsi une trajectoire fermée.*

Si le triangle est rectangle ou obtus en A, *le triangle de périmètre minimal dégénère en un segment :* $Y_0 = Z_0 = A$ *et* X_0 *projeté orthogonal de* A *sur* (BC).

Même si sa solution utilise un peu d'analyse, nous avons choisi de placer ici l'énoncé suivant qui concerne aussi les trajectoires de lumière.

4.33. Billard convexe compact

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière $\delta(K)$ est une courbe fermée de classe C^∞. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ on peut, en jouant au billard dans K, faire n rebonds et revenir au même point.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Quand la bille rebondit en un point M de la frontière, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, c'est-à-dire que la normale à $\delta(K)$ en M est la bissectrice de l'angle formé par les trajectoires incidentes et réfléchies : elle obéit à la loi de Descartes. C'est pourquoi une telle trajectoire est appelée une trajectoire de lumière.

Nous allons démontrer qu'un polygone à n côtés inscrits dans $\delta(\mathrm{K})$ de périmètre minimal est une trajectoire de lumière et donc répond à la question. L'existence d'un tel polygone est simple à établir. On paramètre la frontière $\delta(\mathrm{K})$ par $\mathrm{F} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^\infty$, L-périodique (où L est la longueur de la courbe), injective sur $[0, \mathrm{L}[$ et vérifiant $\|\mathrm{F}'(t)\| = 1$ pour tout réel t. Soit $\mathcal{C} = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant \mathrm{L}\}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est compact. L'application Φ définie sur $\mathcal{C}$ par

$$\Phi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t_{k+1})\|,$$

où $t_{n+1} = t_1 + \mathrm{L}$ est continue sur $\mathcal{C}$ donc elle possède un maximum. Notons $(u_1, \dots, u_n)$ un point où il est atteint et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{M}_k = \mathrm{F}(u_k)$.

On peut supposer que les points M_k sont distincts. En effet, ils ne sont pas tous égaux et si $t_k < t_{k+1} = t_{k+2}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, en prenant $t \in]t_k, t_{k+2}[$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t)\| + \|\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(t_{k+2})\| &\geqslant \|\mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t_{k+2})\| \\ &= \|\mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t_{k+1})\| + \|\mathrm{F}(t_{k+1}) - \mathrm{F}(t_{k+2})\|,\end{aligned}$$

donc on peut remplacer t_{k+1} par t. Par définition, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction f_k définie sur $[t_k, t_{k+2}]$ par

$$f_k(t) = \|\mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t)\| + \|\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(t_{k+2})\|$$

possède un maximum en t_{k+1}.

Montrons que la fonction f_k est dérivable sur $]t_k, t_{k+1}[$. Pour tout réel t_0, la fonction $f : t \longmapsto \|\mathrm{F}(t_0) - \mathrm{F}(t)\| = \sqrt{\|\mathrm{F}(t_0) - \mathrm{F}(t)\|^2}$ est dérivable en tout t non congru à t_0 modulo L et

$$f'(t) = \frac{\langle -\mathrm{F}'(t), \mathrm{F}(t_0) - \mathrm{F}(t)\rangle}{\|\mathrm{F}(t_0) - \mathrm{F}(t)\|}.$$

Pour $t \in]t_k, t_{k+2}[$, on obtient donc

$$\begin{aligned}f_k'(t_{k+1}) &= \frac{\langle -\mathrm{F}'(t_{k+1}), \mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t_{k+1})\rangle}{\|\mathrm{F}(t_k) - \mathrm{F}(t_{k+1})\|} + \frac{\langle -\mathrm{F}'(t_{k+1}), \mathrm{F}(t_{k+2}) - \mathrm{F}(t_{k+1})\rangle}{\|\mathrm{F}(t_{k+2}) - \mathrm{F}(t_{k+1})\|} \\ &= \left\langle -\mathrm{F}'(t_{k+1}), \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_k}}{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_k} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}}}{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}} \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Les vecteurs $u_k = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_k}}{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_k}$ et $v_k = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}}}{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}}$ sont unitaires et colinéaires à $\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_k}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}}$ respectivement.

Le vecteur $u_k + v_k$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $(\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+}}, \overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}})$. Il est orthogonal à $\mathrm{F}'(t_{k+1})$ donc dirige la normale à la courbe en M_{k+1}. On en déduit qu'une trajectoire allant de M_k à M_{k+1} repart après rebond de M_{k+1} vers M_{k+2}. La trajectoire $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\ldots\mathrm{M}_n\mathrm{M}_1$ a les propriétés voulues. $\lhd$

L'exercice précédent montre le lien entre trajectoire de lumière et périmètre minimal. La même démarche peut être utilisée pour résoudre l'exercice 4.32 dont nous reprenons les notations. Supposons que le minimum soit obtenu en $(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0)$ *et qu'aucun de ces points ne soit un sommet du triangle* ABC.

Considérons l'application $s \longmapsto \mathrm{X}(s) = \mathrm{X}_0 + s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. *Pour* $|s|$ *assez petit,* $\mathrm{X}(s)$ *appartient à* $]\mathrm{B},\mathrm{C}[$. *La fonction* $\varphi : s \longmapsto \mathrm{X}(s)\mathrm{Y}_0 + \mathrm{X}(s)\mathrm{Z}_0 + \mathrm{Y}_0\mathrm{Z}_0$ *possède un minimum en* 0. *Comme le gradient de la fonction* $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{Y}_0\mathrm{M}$ *(resp.* $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{Z}_0\mathrm{M}$*) en* X_0, *point distinct de* Y_0 *(resp.* Z_0*) est* $u = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{Y}_0\mathrm{X}_0}}{\mathrm{Y}_0\mathrm{X}_0}$ *(resp.* $v = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{Z}_0\mathrm{X}_0}}{\mathrm{Z}_0\mathrm{X}_0}$*), on obtient*

$$\varphi'(0) = (u + v, \mathrm{X}'(0)) = \langle u + v, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\rangle = 0.$$

Le vecteur $u + v$ *dirige la bissectrice intérieure de l'angle* $\widehat{\mathrm{Y}_0\mathrm{X}_0\mathrm{Z}_0}$ *donc* (BC) *est bissectrice extérieure de l'angle* $\widehat{\mathrm{Y}_0\mathrm{X}_0\mathrm{Z}_0}$. *On en déduit que l'on a* $\widehat{\mathrm{BX}_0\mathrm{Z}_0} = \widehat{\mathrm{Y}_0\mathrm{X}_0\mathrm{C}}$. *On peut faire le même raisonnement pour les trois sommets ce qui montre que* $\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0\mathrm{Z}_0$ *est une trajectoire de lumière. À partir de là, on retrouve les résultats obtenus géométriquement. Les droites* (AB), (BC) *et* (CA) *sont les bissectrices extérieures du triangle* $\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0\mathrm{Z}_0$, *donc* A, B *et* C *sont les centres des cercles exinscrits. On en déduit que* (AX_0), (BY_0) *et* (CZ_0) *sont les bissectrices intérieures du triangle* $\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0\mathrm{Z}_0$. *On a enfin* $(\mathrm{AX}_0) \perp (\mathrm{BC})$ *et de même* $(\mathrm{BY}_0) \perp (\mathrm{CA})$ *et* $(\mathrm{CZ}_0) \perp (\mathrm{AB})$ *: le triangle* $\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0\mathrm{Z}_0$ *est le triangle orthique du triangle* ABC.

Pour être complet, il suffirait de démontrer que dans le cas où les angles du triangle sont aigus, tout triangle XYZ *contenant un sommet donne un périmètre plus grand.*

La question de l'exercice suivant a été posée par Fermat et résolue par Torricelli.

4.34. Problème de Fermat

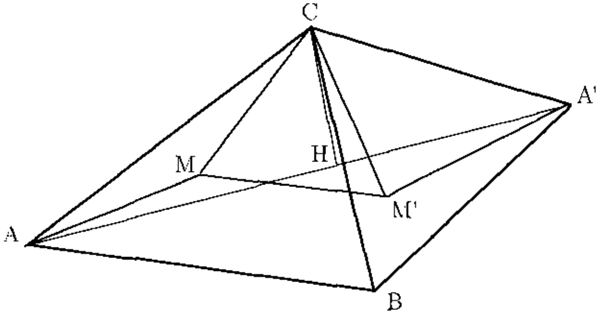
Soit ABC un triangle et M un point à l'intérieur du triangle (au sens large, en comptant les trois segments). Déterminer les points M tels que la somme MA + MB + MC soit minimale.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

L'intérieur du triangle ABC étant un compact, la fonction continue $f : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC}$ y possède un minimum. Il y a de nombreuses manières d'aborder ce problème classique (utilisation des nombres complexes ou du calcul différentiel par exemple) et nous avons choisi de présenter ici une solution assez géométrique.

On oriente le plan de telle manière que le triangle ABC soit direct et on considère le point A′ tel que le triangle A′BC soit équilatéral et extérieur au triangle ABC ; il est de sens indirect.



Considérons la rotation r de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On a $r(\mathrm{B}) = \mathrm{A}'$. Pour M donné on note $\mathrm{M}' = r(\mathrm{M})$. Comme r est une isométrie, on a $\mathrm{MB} = \mathrm{M'A'}$ et comme le triangle CMM′ est équilatéral, $\mathrm{MC} = \mathrm{MM}'$. On peut donc écrire

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MM}' + \mathrm{M'A'} \geqslant \mathrm{AA}'.$$

par l'inégalité triangulaire, avec égalité si les points A, M, M′ et A′ sont alignés dans cet ordre. Pour cela il faut prendre M et M′ sur le segment [AA′] de telle façon que CMM′ soit équilatéral direct. Si H est le projeté orthogonal de C sur (AA′), M et M′ sont symétriques par rapport à (CH) et les angles $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CM}}, \overrightarrow{\mathrm{CH}}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CH}}, \overrightarrow{\mathrm{CM}'}})$ ont pour mesure $\dfrac{\pi}{6}$.

Notons T et T′ les uniques points M et M′ vérifiant cela (voir la figure suivante plus bas). Le point T est appelé *point de Torricelli* du triangle ABC. Il reste à voir si les points A, T, T′, A′ sont alignés dans cet ordre et si T est à l'intérieur du triangle. Pour que le segment [AA′] coupe [BC], il faut que les angles $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CA}'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}'}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}})$ aient une mesure comprise entre 0 et π. Comme les angles du triangle BA′C ont pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$, il faut donc que les angles $\widehat{\mathrm{BCA}}$ et $\widehat{\mathrm{CBA}}$ soient inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$. On suppose cette condition réalisée.

Comme CTT′ est équilatéral, on a

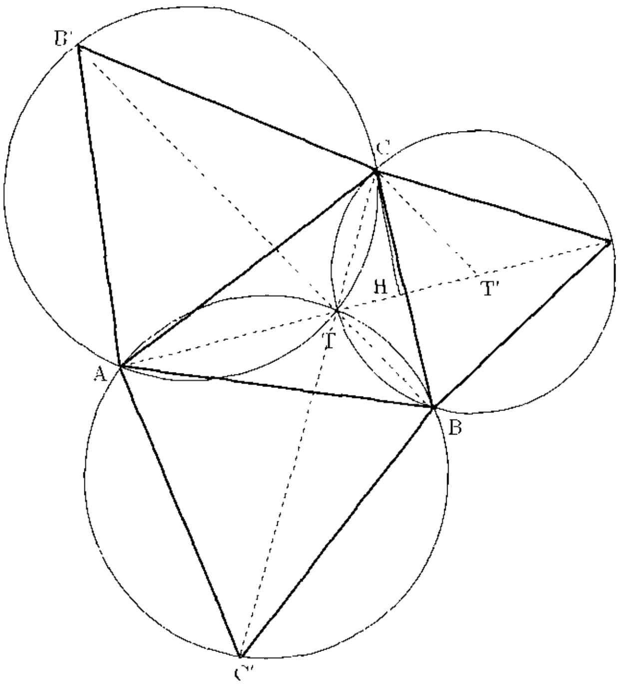
$$(\widehat{\overrightarrow{TA'}, \overrightarrow{TC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{TT'}, \overrightarrow{TC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}}) \pmod{\pi}$$

donc les points B, T, C, A′ sont cocycliques. De plus T et A′ ne sont pas sur le même arc BC donc $\widehat{BTC} = \frac{2\pi}{3}$. Le point T est à l'intérieur du triangle ABC si, et seulement si, $\widehat{BAC} \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

Si ces conditions sont réalisées, on a alors

$$\widehat{ACT'} = \widehat{ACT} + \frac{\pi}{3} \leqslant \widehat{ACB} + \frac{\pi}{3} \leqslant \widehat{ACA'}$$

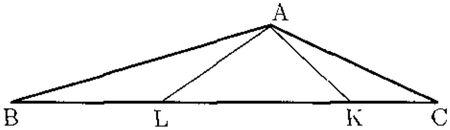
donc $T' \in [AA']$. Les points A, T, T′ et A′ sont alignés dans cet ordre, donc la *fonction f est minimale en* T.



Conclusion. Si les trois angles du triangle sont inférieurs ou égaux à $\frac{2\pi}{3}$, le minimum de f est atteint en T et vaut AA′. Pour des raisons de symétrie, si on construit les points B′ et C′ extérieurs au triangle tels que ACB′ et BC′A soient équilatéraux, on trouve que T appartient aux segments [BB′] et [CC′] et que le minimum de f vaut BB′ et CC′. Ainsi les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en T et on a, de plus, AA′ = BB′ = CC′. Le point T est aussi le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles BCA′, ABC′ et ACB′.

Notons que dans le cas où $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$, alors $T = A$.

Il reste à étudier le cas où l'un des angles du triangle est strictement supérieur à $\frac{2\pi}{3}$. Supposons que ce soit au point A. Montrons qu'alors le minimum de f est encore atteint en A. Pour cela, considérons les points K et L du segment [BC] tels que $\widehat{BAK} = \widehat{LAC} = \frac{2\pi}{3}$.



Soit M un point distinct de A à l'intérieur du triangle ABC.

• Si M est à l'intérieur du triangle ABK, l'étude du cas où l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\frac{2\pi}{3}$, appliquée au triangle ABK montre que

$$MA + MB + MK > AB + AK.$$

On en déduit que

$$f(M) = MA + MB + MC > AB + AK + MC - MK.$$

On veut montrer que $f(M) > AB + AC$. Il suffit de vérifier pour cela que

$$MC + AK \geqslant AC + MK,$$

ce qui est évident, car dans le quadrilatère convexe MKCA la somme des longueurs des diagonales est strictement supérieure à la somme des longueurs de deux côtés opposés (introduire le point d'intersection des diagonales pour le voir).

• Si M est à l'intérieur du triangle ALC, on fait le même raisonnement en échangeant les rôles de K et L et de B et C.

Conclusion. Lorsqu'un des angles du triangle est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, le minimum de f est obtenu au sommet correspondant. ◁

Comme pour le recherche du triangle de périmètre minimal, on peut donner une solution faisant appel au calcul différentiel. L'application $f : M \longmapsto MA + MB + MC$ *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$ *et son gradient vaut* $\frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$. *Si donc le minimum de f n'est pas obtenu en un des sommets du triangle, il est obtenu en un point M qui vérifie* $\frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} = 0$. *Considérons des points O, I, J et K tels que* $\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM}$, $\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{BM}}{BM}$ *et* $\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$. *On a alors* $OI = OJ = OK = 1$ *et* $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} = 0$ *: O est le centre de gravité et le centre du cercle* *circonscrit du triangle* IJK, *donc ce triangle est équilatéral. On a donc* $\widehat{\mathrm{IOJ}} = \widehat{\mathrm{JOK}} = \widehat{\mathrm{KOI}} = \frac{2\pi}{3}\cdot$ *Les droites* (MA), (MB) *et* (MC) *font donc nécessairement entre elles des angles de* $\frac{2\pi}{3}\cdot$ *On peut en déduire que* M *est le point de Torricelli du triangle* ABC. *Le minimum est donc obtenu soit en* T *soit en un sommet du triangle* ABC.

Le prochain thème abordé est celui des applications affines. Rappelons rapidement l'essentiel sur cette notion dans le cadre vectoriel. Si E *est un espace vectoriel, une application* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *est dite affine si elle est la composée* $f = t_u \circ g$ *d'une translation* $t_u : x \longmapsto x+u$ *et d'une application linéaire* g. *On a alors* $u = f(0)$ *de sorte que cette décomposition est unique. L'application* g *est appelée la partie linéaire de* f *et sera notée* $\vec{f}$. *Il est très simple de vérifier qu'une application affine conserve les barycentres (la réciproque est vraie), transforme un sous-espace affine en un sous-espace affine, etc. Par ailleurs* f *est injective (resp. surjective, bijective) si, et seulement si, sa partie linéaire* $\vec{f}$ *est injective (resp. surjective, bijective).*

Le premier exercice ci-après fait intervenir des symétries affines.

4.35. Polygone dont les milieux des côtés sont donnés

On considère n points $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ de $\mathbb{R}^p$. À quelle condition peut-on construire, une ligne brisée fermée $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_n$, $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_1$ telle que le point A_i soit le milieu de $[\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$? Comment en construire une ? Comment traduire la condition d'existence trouvée dans le cas n pair ?

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On note $\mathrm{S_A}$ la symétrie par rapport au point A. Le point M_1 étant donné, on a nécessairement

$$\mathrm{M}_2 = s_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{M}_1),\ \mathrm{M}_3 = s_{\mathrm{A}_2} \circ s_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{M}_1), \dots,\ \mathrm{M}_n = s_{\mathrm{A}_{n-1}} \circ \dots \circ s_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{M}_1)$$

et les points $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_n$ répondent au problème posé si, et seulement si,

$$\mathrm{M}_1 = s_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{M}_n) = s_{\mathrm{A}_n} \circ s_{\mathrm{A}_{n-1}} \circ \dots \circ s_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{M}_1).$$

Notons $f = s_{\mathrm{A}_n} \circ s_{\mathrm{A}_{n-1}} \circ \dots \circ s_{\mathrm{A}_1}$.

• Si n est impair, f est une symétrie centrale, qui possède un unique point invariant, son centre. On doit prendre ce centre comme point M_1. Le problème posé possède une solution unique, quels que soient les points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$.

• Si n est pair, f est une translation. Notons u le vecteur de cette translation. Si u n'est pas nul, l'application f ne possède pas de point invariant et le problème posé n'a pas de solution. Si $u = 0$, f est l'identité. La condition sur M_1 est toujours réalisée ; on peut choisir M_1 quelconque et le problème posé possède une infinité de solutions.

Déterminons le vecteur u. Étant donnés deux points A et B de l'espace affine, on montre, en cherchant l'image de A, que $s_B \circ s_A$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. On en déduit que

$$u = 2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}).$$

La condition d'existence d'une solution dans le cas n pair s'écrit

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = 0.$$

Elle signifie géométriquement que l'isobarycentre des points A_i d'indice pair est égal à l'isobarycentre des points d'indice impair. Par exemple, en dimension 2, quatre points donnés A_1, A_2, A_3, A_4 sont les milieux des côtés d'un quadrilatère si, et seulement si, $[A_1, A_3]$ et $[A_2, A_4]$ ont le même milieu, autrement dit si, et seulement si, (A_1, A_2, A_3, A_4) est un parallélogramme. ◁

Voici une autre approche. Il s'agit de déterminer des éléments $M_1, \ldots, M_n$ *de* $\mathbb{R}^p$ *tels que, pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$, $M_i + M_{i+1} = 2A_i$ *et* $M_n + M_1 = 2A_n$. *On peut voir l'exercice comme la résolution d'un système linéaire. Notons* S_n *la matrice du système. Il est clair que* $\mathrm{rg}(S_n) \geqslant n-1$ *et en développant par rapport à la dernière ligne, on trouve* $\det S_n = 1 + (-1)^{n+1}$. *Si* n *est impair,* $\det S_n = 2$ *et le système a une solution unique. Si* n *est pair,* $\det S_n = 0$, *la matrice est de rang* $n-1$. *En additionnant les lignes du système avec des signes alternés, on trouve* $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i A_i = 0$. *C'est la condition de compatibilité du système. Si elle est réalisée, on peut choisir* M_1 *arbitrairement.*

4.36. Triangles à côtés parallèles

Soient E un plan vectoriel réel, (A, B, C) et (A′, B′, C′) deux triangles tels que (AB) est parallèle à (A′B′), (BC) est parallèle à (B′C′), (AC) est parallèle à (A′C′). Montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont parallèles ou concourantes.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Comme (A, B, C) est une base affine du plan, il existe une unique application affine f de (ABC) dans (A'B'C') transformant A, B, C en A', B', C'. L'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ transforme $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{CB}$ en $\overrightarrow{C'B'}$. Par hypothèse, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AC}\right) = \mu\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{CB}\right) = \nu\overrightarrow{CB}$. Par linéarité de $\overrightarrow{f}$, on obtient

$$\lambda\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = f(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \mu\overrightarrow{AC} + \nu\overrightarrow{CB}.$$

On en déduit que $\lambda = \mu = \nu$ et $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle de rapport λ. Ainsi f est soit une translation, soit une homothétie affine selon que λ est égal ou non à 1. Dans le premier cas les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles. Dans le second cas, elles sont concourantes au O centre de l'homothétie f. $\triangleleft$

Depuis Felix Klein on perçoit les géométries comme l'étude de propriétés invariantes sous l'action d'un groupe. Regardons l'exemple simple du triangle dans un plan pour illustrer cette idée profonde. Un sous-groupe G *du groupe affine de* $\mathbb{R}^2$ *opère naturellement sur l'ensemble des triangles : deux triangles* ABC *et* A'B'C' *sont dans la même orbite s'il existe* $f \in \mathrm{G}$ *tel que* $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ *et* $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$. *Classifier les triangles dans diverses géométries, c'est-à-dire pour divers groupes* G, *revient à donner des invariants qui caractérisent les classes d'équivalence. Par exemple si* G *est le groupe affine tout entier il n'y a qu'une seule orbite : en géométrie affine tous les triangles se valent. Si* G *est le sous-groupe des similitudes, on vérifie aisément que deux triangles sont semblables si, et seulement si, leurs trois côtés sont proportionnels. Si* G *est le sous-groupe des isométries, on prouve que deux triangles sont dans la même orbite si, et seulement si, leurs trois côtés sont égaux ou encore si, et seulement si, ils ont un angle égal entre deux côtés égaux. Enfin si* G *est le sous-groupe affine unimodulaire (*i.e. *le groupe des applications affines dont la partie linéaire est de déterminant* 1*) on voit que deux triangles sont dans la même classe si et seulement si ils ont la même aire (algébrique).*

L'exercice suivant, dans le cadre de la géométrie affine, commence l'étude pour les petits degrés de la classification des graphes des polynômes.

4.37. Équivalence entre parties de $\mathbb{R}^2$

Si C et C′ sont deux parties de $\mathbb{R}^2$, on dit que C et C′ sont équivalentes si, et seulement si, il existe un automorphisme affine f de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(C) = C'$. Soient P, Q deux polynômes réels de degrés respectifs m et n et C (resp. C′) le graphe de P (resp. Q). Étudier l'équivalence de C et C′ lorsque (m, n) vaut $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$ et $(4,4)$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

L'équivalence ainsi définie entre des parties de $\mathbb{R}^2$ est évidemment un relation d'équivalence.

• Supposons que $m = 2$ et posons $P = aX^2 + bX + c$ $(a \neq 0)$. Le graphe C de P est la parabole d'équation $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$, soit

$$\frac{y}{a} + \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Considérons l'automorphisme affine $g : (x, y) \longmapsto \left(x + \dfrac{b}{2a}, \dfrac{y}{a} + \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$. L'image de C par g est la parabole $\Gamma : y = x^2$. Donc C est équivalente à Γ. Ainsi, si $(m, n) = (2, 2)$, C et C′ sont équivalentes à Γ donc sont équivalentes par transitivité.

• Supposons que $m = 3$ et posons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ $(a \neq 0)$. Il existe des réels e et f tels que $P = a\left(\left(X + \dfrac{b}{3a}\right)^3 + eX + f\right)$. Le graphe C de P a pour équation $y = a\left(\left(x + \dfrac{b}{3a}\right)^3 + ex + f\right)$, soit

$$\frac{1}{a}y - ex - f = \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3.$$

Considérons l'automorphisme affine

$$h : (x, y) \longmapsto \left(x + \frac{b}{3a}, -ex + \frac{1}{a}y - f\right).$$

L'image de C par h est la courbe Γ' d'équation $y = x^3$. Donc C est équivalente à Γ'. Si $(m, n) = (3, 3)$, C et C′ sont équivalentes à Γ' donc sont équivalentes.

• Supposons que $(m, n) = (2, 3)$. D'après ce qui précède, il suffit d'examiner le cas où $P = X^2$ et $Q = X^3$. Supposons qu'il existe un automorphisme affine f tel que $f(\Gamma) = \Gamma'$. Considérons la droite D d'équation

$y = x$. Elle coupe Γ' en trois points $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. On a $\Gamma' \cap \mathrm{D} = f(\Gamma) \cap \mathrm{D} = f(\Gamma \cap f^{-1}(\mathrm{D}))$. Comme f est bijective, $\Gamma \cap f^{-1}(\mathrm{D}))$ est de cardinal 3. Mais il est impossible que la droite affine $f^{-1}(\mathrm{D})$ coupe la parabole Γ en plus de deux points. On a une contradiction : C et C′ ne sont pas équivalentes si $(m,n) = (2,3)$.

• Supposons que $m = 4$ et posons $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^3 + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X} + e$ $(a \neq 0)$. Il existe des réels α, β et γ telles que

$$\mathrm{P} = a\left(\left(\mathrm{X} + \frac{b}{4a}\right)^4 + \alpha\left(\mathrm{X} + \frac{b}{4a}\right)^2 + \beta\mathrm{X} + \gamma\right).$$

Le graphe de P a pour équation

$$\frac{1}{a}y - \beta x - \gamma = \left(x + \frac{b}{4a}\right)^4 + \alpha\left(x + \frac{b}{4a}\right)^2.$$

On considère l'automorphisme affine

$$k : (x,y) \longmapsto \left(x + \frac{b}{4a}, \frac{1}{a}y - \beta x - \gamma\right).$$

L'image de C par k est la courbe d'équation $y = x^4 + \alpha x^2$.

Si $\alpha = 0$, C est équivalente à Γ_0 courbe d'équation $y = x^4$.

Si $\alpha > 0$, $y = x^4 + \alpha x^2$ équivaut à $\frac{1}{\alpha^2}y = \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^4 + \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$. Si ℓ est l'automorphisme affine

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{\alpha^2}y, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right),$$

l'image de $k(\mathrm{C})$ par ℓ est la courbe Γ_1 d'équation $y = x^4 + x^2$, donc C est équivalente à Γ_1.

Si $\alpha < 0$, $y = x^4 + \alpha x^2$ équivaut à $\frac{1}{\alpha^2}y = \left(\frac{x}{\sqrt{-\alpha}}\right)^4 - \left(\frac{x}{\sqrt{-\alpha}}\right)^2$. Si ℓ' est l'automorphisme affine

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{\alpha^2}y, \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}x\right),$$

l'image de $k(\mathrm{C})$ par ℓ' est la courbe Γ_{-1} d'équation $y = x^4 - x^2$, donc C est équivalente à Γ_{-1}.

Montrons que les courbes Γ_0, Γ_1 et Γ_{-1} sont non équivalentes deux à deux. Soit $f : (x,y) \longmapsto (ax + by + c, a'x + b'y + c')$. L'image de Γ_0 par f^{-1} a pour équation

$$a'x + b'y + c' = (ax + by + c)^4.$$

Si $f^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma_1$ ou Γ_2, on a nécessairement $c = 0$, $b = 0$ et $a' = 0$, sinon on obtient des termes en y^4, x^3 ou x. Mais alors on n'a pas de terme en x^2. Il est donc impossible d'avoir $f^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma_1$ ou Γ_2 : Γ_0 n'est équivalente ni à Γ_1 ni à Γ_2. On démontre de même que Γ_1 et Γ_2 ne sont pas équivalentes.

Si $m = n = 4$, C et C' ne sont pas nécessairement équivalentes. Dans les graphes des polynômes P de degré 4, il y a trois classes d'équivalence correspondant à $P = X^4$, $P = X^4 + X^2$ et $P = X^4 - X^2$. ◁

4.38. Étude d'une suite d'applications affines

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour toute droite affine $\mathcal{D}$ de E, on note $p_{\mathcal{D}}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ et $\Psi_{\mathcal{D}}$ l'application qui à $x \in$ E associe le milieu du segment $[x, p_{\mathcal{D}}(x)]$. Soit $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, n droites affines de E non coplanaires deux à deux. Soit $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[\![1, n]\!]$, non stationnaire. Soit enfin la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} f_0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall k \geqslant 1 \quad f_k = \psi_{\mathcal{D}_{\omega_k}} \circ f_{k-1}. \end{cases}$ On suppose que la suite $(f_k(0))$ tend vers ℓ. Étudier la suite (f_k).

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Pour tout $x \in$ E, on étudie la limite de la suite $\big(f_k(x)\big)$. Une projection orthogonale est continue, car 1-lipschitzienne. On en déduit que les applications $\Psi_{\mathcal{D}_i}$, puis les applications f_k sont continues. On a, pour tout $x \in$ E, $\|f_k(x) - f_k(0)\| = \|\overrightarrow{f_k}(x)\| \leqslant |\!|\!|\overrightarrow{f_k}|\!|\!| \cdot \|x\|$. Nous allons montrer que la suite $\left(|\!|\!|\overrightarrow{f_k}|\!|\!|\right)$ tend vers 0, ce qui montrera que, pour tout $x \in$ E, $\big(f_k(x)\big)$ converge vers ℓ.

Pour toute droite affine $\mathcal{D}$ de E, l'application $\Psi_{\mathcal{D}}$ est affine et sa partie linéaire est $\overrightarrow{\Psi_{\mathcal{D}}} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + \overrightarrow{p_{\mathcal{D}}})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a donc

$$|\!|\!|\overrightarrow{\Psi_{\mathcal{D}_i}}|\!|\!| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + |\!|\!|\overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}|\!|\!|\right) \leqslant 1,$$

car la norme d'une projection orthogonale non nulle est égale à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons u_i un vecteur unitaire dirigeant $\mathcal{D}_i$. Si $i \neq j$ et $u \in$ E, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}(u) = \lambda u_i$. On en déduit que

$$\overrightarrow{p_{\mathcal{D}_j}} \circ \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}(u) = \lambda \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_j}}(u_i) = \lambda \langle u_i, u_j \rangle u_j,$$

puis

$$\|\overrightarrow{p_{\mathcal{D}_j}} \circ \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}(u)\| = |\lambda| |\langle u_i, u_j \rangle| = \|\overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}(u)\| |\langle u_i, u_j \rangle| \leqslant \|u\| |\langle u_i, u_j \rangle|.$$

Cela montre que $\|\!|\overrightarrow{p_{\mathcal{D}_j}} \circ \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}|\!\| \leqslant |\langle u_i, u_j \rangle| < 1$, car les vecteurs u_i et u_j sont de norme 1 et ne sont pas colinéaires. On obtient

$$\|\!|\overrightarrow{\Psi_{\mathcal{D}_j}} \circ \overrightarrow{\Psi_{\mathcal{D}_i}}|\!\| = \frac{1}{4} \|\!|\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} + \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}} + \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_j}} + \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_j}} \circ \overrightarrow{p_{\mathcal{D}_i}}|\!\| \leqslant \frac{1}{4}\left(3 + |\langle u_i, u_j \rangle|\right) < 1.$$

Notons $\mathrm{M} = \max\limits_{i \neq j} \frac{1}{4}\left(3 + |\langle u_i, u_j \rangle|\right)$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, n_k le plus grand entier p pour lequel il existe des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_p$ de $[\![1, k]\!]$ tels que, pour $j \in [\![1, p-1]\!]$, $\omega_{i_j} \neq \omega_{i_j+1}$ et $i_{j+1} > i_j + 1$. Comme la norme triple est une norme d'algèbre et que $\|\!|\Psi_{\mathcal{D}_i}|\!\| \leqslant 1$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\!|\overrightarrow{f_k}|\!\| \leqslant \prod_{j=1}^{n_k} \|\!|\Psi_{\mathcal{D}_{\omega_{i_j+1}}} \circ \Psi_{\mathcal{D}_{\omega_{i_j}}}|\!\| \leqslant \mathrm{M}^{n_k}.$$

Quand k tend vers $+\infty$, n_k tend vers $+\infty$, car la suite (ω_k) n'est pas stationnaire, et comme $0 \leqslant \mathrm{M} < 1$, la suite $\left(\|\!|\overrightarrow{f_k}|\!\|\right)$ tend vers 0.

Conclusion. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\left(f_k(x)\right)$ tend vers ℓ. ◁

L'énoncé suivant est difficile.

4.39. Applications du plan conservant l'orthogonalité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application conservant l'orthogonalité (si abc est un triangle rectangle en b, alors $f(a)f(b)f(c)$ est un triangle rectangle en $f(b)$). Que peut-on dire de f ?

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

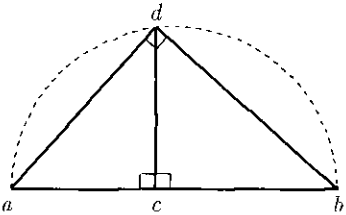
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure d'espace affine naturelle. Il est clair que toutes les similitudes affines conservent l'orthogonalité. Nous allons montrer que ce sont les seules applications ayant cette propriété. La difficulté de l'exercice tient à ce que f n'a aucune propriété *a priori* : ce serait évidemment beaucoup plus facile si on supposait f affine au départ.

• Énonçons quelques conséquences de l'hypothèse.

(i) f est injective : en effet si a et b sont distincts, on prend un point c tel que le triangle abc soit rectangle. Alors $f(a)f(b)f(c)$ est un triangle rectangle et donc $f(a) \neq f(b)$.

(ii) f conserve l'alignement : si a, b, c sont trois points alignés distincts, soit d tel que les droites (ac) et (cd) soient orthogonales. Les triangles acd

et bcd sont rectangles en c. Les triangles $f(a)f(c)f(d)$ et $f(b)f(c)f(d)$ sont donc rectangles en $f(c)$. On a alors $(f(c)f(a)) \perp (f(c)f(d))$ et $(f(c)f(b)) \perp (f(c)f(d))$. Les points $f(a), f(b), f(c)$ sont donc alignés.



On peut ajouter que si $c \in [ab]$ alors $f(c) \in [f(a)f(b)]$. En effet, on peut choisir d tel que (ac) et (cd) soient orthogonales et que, de plus, abd soit rectangle en d (on prend d sur le cercle de diamètre $[ab]$ et sur la perpendiculaire à (ab) en c : voir figure ci-dessus). Alors le triangle $f(a)f(d)f(b)$ est rectangle en $f(d)$ et le point $f(c)$, projeté orthogonal de $f(d)$ sur $(f(a)f(b))$ appartient à $[f(a)f(b)]$.

(iii) f conserve le parallélisme : soient a, b, c, d quatre points tels que les droites (ab) et (cd) soient parallèles. On les suppose distinctes, sinon les images des quatre points sont alignées d'après ce qui précède, et il n'y a rien à démontrer.

Considérons la droite orthogonale à (ab) contenant a. Elle coupe la droite (cd) en e. Les triangles abe et aec sont rectangles en a et e, respectivement. Les triangles $f(a)f(b)f(e)$ et $f(a)f(c)f(e)$ sont rectangles en $f(a)$ et $f(e)$ respectivement. On a donc $(f(a)f(e)) \perp (f(a)f(b))$ et $(f(a)f(e)) \perp (f(c)f(e))$; on en déduit $(f(a)f(b))$ parallèle à $(f(c)f(e))$. Les points c, d, e étant alignés, les points $f(c), f(d), f(e)$ le sont également. On a donc $(f(a)f(b))$ parallèle à $(f(c)f(d))$. (Tout ceci suppose $c \neq e$; sinon, on remplace c par d).

On en déduit que f transforme un parallélogramme en un parallélogramme.

• Montrons maintenant que f est une application affine. Il s'agit de démontrer que l'application

$$\varphi : a \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(a) - f(0) \in \mathbb{R}^2$$

est linéaire (0 désigne l'élément $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$).

Les démonstrations qui suivent résultent du fait que les points qui interviennent dans les démonstrations peuvent être construits à l'aide de parallèles.

(i) Montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$.

Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}^2$, $c = a + b$. Si a et b ne sont pas colinéaires, alors $0acb$ est un parallélogramme, donc $f(0)f(a)f(c)f(b)$ en est un également. On a donc $f(c) - f(a) = f(b) - f(0)$, ce qui s'écrit $f(c) - f(0) = f(a) - f(0) + f(b) - f(0)$, c'est-à-dire $\varphi(c) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

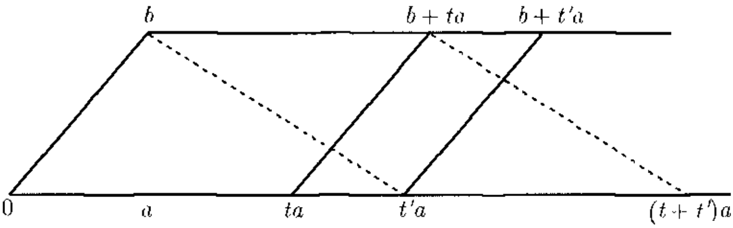
Si a et b sont colinéaires, on peut supposer $a \neq 0$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = \lambda a$. Il faut démontrer que $\varphi((1+\lambda)a) = \varphi(a) + \varphi(\lambda a)$. Cela résultera du point suivant.

(*ii*) Montrons que, pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(ta) = t\varphi(a)$.

C'est évident pour $a = 0$. Fixons donc $a \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point ta appartient à la droite $(0a)$. Le point $f(ta)$ appartient donc à la droite $(f(0)f(a))$. Il existe donc $t' \in \mathbb{R}$ tel que $f(ta) - f(0) = t'(f(a) - f(0))$, c'est-à-dire $\varphi(ta) = t'\varphi(a)$. Le réel t' est unique, car $a \neq 0$ implique $f(a) \neq f(0)$.

Considérons l'application $\sigma : t \longmapsto t'$. Il s'agit de montrer que $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. On remarque que, par construction, $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(0) = 0$. Nous allons montrer que σ est un morphisme de corps de $\mathbb{R}$.

Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^{*2}$ (si t ou t' sont nuls, il n'y a rien à démontrer). Soit $b \in \mathbb{R}^2$ tels que a et b ne soient pas colinéaires.



Les points $0, ta, b+ta$ et b forment un parallélogramme. Il en de même de leurs images par f. On a donc $f(b+ta) - f(b) = f(ta) - f(0)$. On montre de même que $f(t'a), f((t+t')a), f(b+ta)$ et $f(b)$ forment un parallélogramme. On a donc $f(b+ta) - f(b) = f((t+t')a) - f(t'a)$.

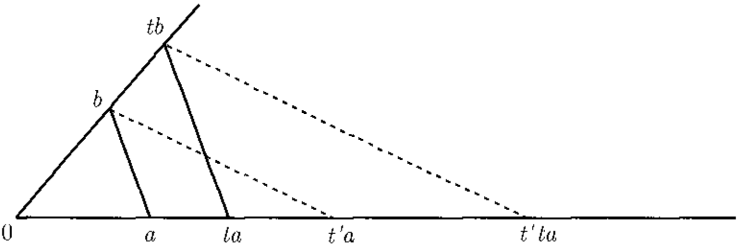
On en déduit que $f((t+t')a) - f(t'a) = f(ta) - f(0)$ et donc

$$f((t+t')a) - f(0) = f(ta) - f(0) + f(t'a) - f(0),$$

c'est-à-dire $\varphi((t+t')a) = \varphi(ta) + \varphi(t'a)$. Ceci montre que

$$\boxed{\sigma(t+t') = \sigma(t) + \sigma(t').}$$

Les droites (ab) et $(tatb)$ sont parallèles. Il en est donc de même des droites $(f(a)f(b))$ et $(f(ta)f(tb))$. On a $f(ta) - f(0) = \sigma(t)(f(a) - f(0))$ par définition de σ. Du théorème de Thalès on déduit que l'on a aussi $f(tb) - f(0) = \sigma(t)(f(b) - f(0))$.



Les droites $(t'ab)$ et $(tt'atb)$ aussi sont parallèles. Il en est de même de $(f(t'a)f(b))$ et $(f(tt'a)f(tb)$. Comme $f(tb) - f(0) = \sigma(t)(f(b) - f(0))$, on déduit du théorème de Thalès que

$$f(tt'a) - f(0) = \sigma(t)(f(t'a) - f(0)).$$

On obtient donc $\varphi(tt'a) = \sigma(t)\varphi(t'a) = \sigma(t)\sigma(t')\varphi(a)$ et donc

$$\boxed{\sigma(tt') = \sigma(t)\sigma(t')}.$$

Donc σ est un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ et il est connu que le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité. Donc σ est égal à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Ceci achève de démontrer que φ est linéaire et donc que f est affine.

• Montrons pour conclure que f est une similitude affine. L'application φ, comme f, est injective donc bijective car c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie. L'application f est affine et conserve l'orthogonalité. On a donc, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^2)^2$,

$$a \perp b \Longrightarrow \varphi(a) \perp \varphi(b).$$

Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Alors $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, orthogonale. Les vecteurs $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont orthogonaux donc $\varphi(e_1) + \varphi(e_2)$ et $\varphi(e_1) - \varphi(e_2)$ également. On en déduit que $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ ont même norme, que l'on note k $(k > 0)$.

La famille $\left(\frac{1}{k}\,\varphi(e_1), \frac{1}{k}\,\varphi(e_2)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, donc φ est la composée d'une homothétie vectorielle de rapport k et d'un endomorphisme orthogonal. C'est une similitude vectorielle et f est donc une similitude affine.

Conclusion. Les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui conservent l'orthogonalité sont les similitudes affines. ◁

La démonstration du fait que f est affine reprend les arguments de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie affine qui dans le cas réel s'énonce ainsi : soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines réels de même dimension $\geqslant 2$ et f une bijection ensembliste de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$, conservant l'alignement. Alors f est une bijection affine de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

Voici quelques exercices sur le thème des isométries.

4.40. Sous-groupes finis du groupe affine réel

Montrer qu'un sous-groupe fini du groupe des bijections affines d'un plan vectoriel réel E est isomorphe à un sous-groupe du groupe $O_2(\mathbb{R})$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons GA(E) le groupe des bijections affines de E et soit G un sous-groupe fini de GA(E). Si $f \in G$, sa partie linéaire $\vec{f}$ est dans le groupe GL(E). Nous savons de plus que l'application $\psi : f \longmapsto \vec{f}$ est un morphisme surjectif de groupes de GA(E) dans GL(E) dont le noyau est le sous-groupe des translations. Comme G est fini, il ne contient aucune translation non triviale car celles-ci sont d'ordre infini. Par suite, la restriction de ψ à G établit un isomorphisme entre G et $\psi(G)$ qui est un sous-groupe fini de GL(E).

Il nous suffit donc de traiter le cas où G est un sous-groupe fini de GL(E). Pour cela, il suffit de trouver un produit scalaire sur E conservé par tous les éléments de G. L'argument est classique. On choisit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ quelconque et on pose pour $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, y\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g(x), g(y)\rangle$$

On voit aisément que $\langle\ ,\ \rangle_G$ est un nouveau produit scalaire sur E et que tous les éléments de G sont orthogonaux pour $\langle\ ,\ \rangle_G$. En choisissant une base orthonormée B de E pour ce nouveau produit scalaire, l'application qui à $g \in G$ associe sa matrice dans B, établit alors un isomorphisme entre G et un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$. ◁

Notons que le résultat reste vrai avec la même preuve en toute dimension finie. L'argument de moyenne utilisé dans cet exercice est très important (cf. aussi la note qui suit l'exercice 6.22 dans le tome 1).

4.41. Une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ n'est pas dédoublable

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ ayant au moins deux points.

1. Montrer qu'il existe un et un seul disque fermé de rayon minimal contenant B.

2. Montrer qu'il n'existe pas de partition de B en deux parties B_1 et B_2 toutes deux isométriques à B (on dit que B n'est pas *dédoublable*).

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Le lecteur trouvera la solution de cette question classique dans l'exercice 4.45. On note D le disque de rayon minimal, a son centre et r son rayon.

2. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux parties B_1 et B_2 disjointes de $\mathbb{R}^2$ telles que $B = B_1 \cup B_2$ et deux isométries f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^2$ telles que $B_1 = f_1(B)$ et $B_2 = f_2(B)$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, on a $f_i(B) = B_i \subset B \subset D$. On en déduit $B \subset f_i^{-1}(D)$. Comme $f_i^{-1}(D)$ est aussi un disque de rayon r, on obtient, par unicité de D, $f_i^{-1}(D) = D$ et donc $f_i(D) = D$. Comme $f_i(D)$ a pour centre $f_i(a)$, on en déduit $f_i(a) = a$.

L'isométrie f_i est donc soit une rotation de centre a, soit une réflexion d'axe contenant a. Si f_i est une réflexion, alors on a, pour tout $x \in B$, $f_i(x) \in B_i$ et donc $f_i(x) \in B$. On en déduit $x = f_i(f_i(x)) \in f_i(B) = B_i$ et donc $B_i = B$. C'est faux. On a donc montré que f_1 et f_2 sont des rotations de centre a.

Les rotations f_1 et f_2 ont même centre donc elles commutent. On en déduit $f_1(f_2(B)) \subset f_1(B) \subset B_1$ et $f_1(f_2(B)) = f_2(f_1(B)) \subset f_2(B) \subset B_2$. On obtient $f_1(f_2(B)) \subset B_1 \cap B_2 = \emptyset$. C'est impossible car $B \neq \emptyset$. On aboutit à la contradiction voulue. ◁

La preuve qui précède est due à H. HADWIGER *et* H. DEBRUNNER *(1964). Aucune partie bornée de $\mathbb{R}^2$ n'est dédoublable, mais il existe des parties non bornées de $\mathbb{R}^2$ dédoublables (c'est le paradoxe de* SIERPINSKI-MAZURKIEWICZ *(1914)). Par contre, aucune partie de $\mathbb{R}$ n'est dédoublable (résultat dû à* SIERPINSKI*). Toutes ces questions ont fait l'objet du problème de l'Agrégation Interne de 2004.*

L'exercice suivant est assez difficile. Il montre qu'une application du plan dans lui-même est une isométrie affine dès qu'elle conserve la distance 1.

4.42. Application conservant la distance unité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application conservant la distance 1. Montrer que f est une isométrie affine.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Notons F l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui conservent la distance 1. Il est clair que F contient les isométries. On veut montrer l'autre inclusion. Si $f \in F$, notons D_f l'ensemble des distances conservées par f. C'est un ensemble non vide, contenant 1 et 0.

Posons $D = \bigcap_{f \in F} D_f$. C'est l'ensemble (non vide) de toutes les distances conservées par *toutes* les applications f de F. Le problème revient à montrer que $D = \mathbb{R}_+$. On procède en trois étapes.

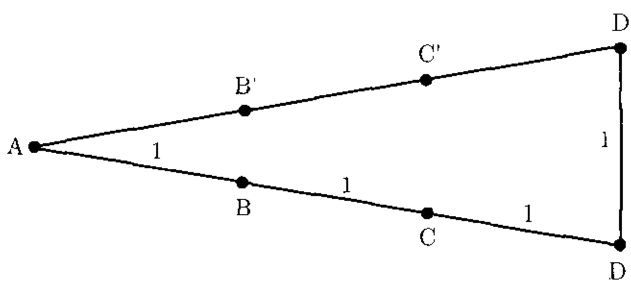
• Montrons que l'ensemble D est stable pour le produit.

Soient α, β deux réels dans D et $f \in F$. On peut supposer α et β non nuls. Soit h une homothétie de rapport α. Posons $g = h^{-1} \circ f \circ h$. Si A, B sont deux points distants de 1, $h(A)h(B) = \alpha$ et comme f conserve la distance α, $g(A)g(B) = 1$. Il en résulte que $g \in F$. Ainsi, g conserve la distance β et comme $f = h \circ g \circ h^{-1}$ on voit aisément que f conserve la distance $\alpha\beta$. Cela vaut pour tout f, donc $\alpha\beta \in D$. On voit tout l'intérêt qu'il y a à considérer l'ensemble F tout entier plutôt que seulement l'un de ses éléments.

• On va maintenant trouver divers éléments de D en dehors de 0 et 1. Montrons pour commencer que $\sqrt{3} \in D$.

Soit $f \in F$. Il apparaît que l'image d'un triangle équilatéral de côté 1 par f est un triangle équilatéral de côté 1. Soient A, B distants de $\sqrt{3}$ et C, D tels que (ACD) et (BCD) soient équilatéraux de côtés 1. En considérant les images par f de ces deux triangles, on voit que soit $f(A) = f(B)$, soit $f(A)f(B) = \sqrt{3}$. Notons Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$. Le résultat obtenu pour le couple (A, B) vaut pour tout couple (A, B') avec $B' \in \Gamma$. Si l'on choisit B' sur Γ tel que $BB' = 1$, on doit avoir $f(B)f(B') = 1$ et comme $f(A)f(B') \in \{0, \sqrt{3}\}$ on ne peut avoir $f(B) = f(A)$. Conclusion : f conserve la distance $\sqrt{3}$. Comme ceci vaut pour tout f, $\sqrt{3} \in D$. Il en résulte que $3 \in D$.

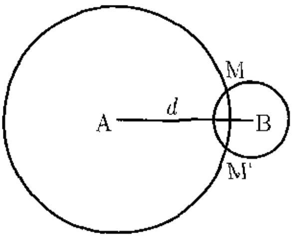
Montrons maintenant que $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont aussi dans D. Pour cela, on considère la figure suivante :



Comme f conserve les distances 1 et 3, cette figure est envoyée par f sur une figure isométrique. En particulier, $f(B)f(B') = BB' = \frac{1}{3}$ et $f(C)f(C') = CC' = \frac{2}{3}$ (par le théorème de Thalès).

On en déduit que l'ensemble $\mathrm{H} = \{2^n\sqrt{3}^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}\}$ est inclus dans D, grâce à la stabilité par produit. Par ailleurs, H est dense dans $\mathbb{R}_+$. En effet H est l'image par l'exponentielle de $\left\{n \ln 2 + \frac{p}{2} \ln 3,\ n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\right\}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$, car $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$ (attention toutefois, ce n'est pas un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$). L'exponentielle étant un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ le résultat suit.

• On peut enfin conclure que $\mathrm{D} = \mathbb{R}_+$. Soit $d > 0$ un réel quelconque, $f \in \mathrm{F}$ et A, B deux points de $\mathbb{R}^2$ distants de d. Soit $\varepsilon > 0$ dans D, $\varepsilon < \frac{d}{2}$. Par densité de D on peut trouver $d' \in \mathrm{D}$ tel que $d - \varepsilon < d' < d$. Le cercle de centre B et de rayon ε coupe le cercle de centre A et de rayon d' en deux points M, M'.



On a $f(\mathrm{A})f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{M'}) = d'$ et $f(\mathrm{B})f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{B})f(\mathrm{M'}) = \varepsilon$. Il en résulte que le cercle de centre $f(\mathrm{A})$ et de rayon d' coupe le cercle de centre $f(\mathrm{B})$ et de rayon ε en $f(\mathrm{M})$ et $f(\mathrm{M'})$. Pour cela il est nécessaire que $d' - \varepsilon \leqslant f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) \leqslant d' + \varepsilon$ et donc que $d - 2\varepsilon \leqslant f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) \leqslant d + \varepsilon$. Comme il y a dans D des éléments arbitrairement petits, on en déduit en faisant tendre ε vers 0 que $f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) = d$.

Conclusion. $\mathrm{D} = \mathbb{R}_+$ et toute application de $\mathbb{R}^2$ conservant la distance unité est une isométrie. ◁

Le résultat n'est pas vrai pour $\mathbb{R}$ *(prendre* f *qui fixe les points de* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *et qui envoie chaque entier* n *sur* $n + 1$*) mais se généralise à* $\mathbb{R}^n$ *pour* $n \geqslant 3$.

Si X *est une partie de* $\mathbb{R}^n$*, on peut s'intéresser au groupe des isométries de* X*. Deux approches sont possibles : on peut regarder le sous-groupe de* $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ *formé des bijections isométriques de* X *dans* X*, c'est-à-dire des bijections qui conservent la distance euclidienne. Mais on peut aussi regarder le sous-groupe des isométries* f *de* $\mathbb{R}^n$ *telles que* $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$*. La restriction de* f *à* X *est alors une permutation isométrique de* X*. En fait, il est facile de voir que dans le cas où* X *engendre affinement* $\mathbb{R}^n$*, le morphisme de restriction qu'on vient de définir est un isomorphisme. Par exemple si* ABC *est un triangle équilatéral de* $\mathbb{R}^2$*, le groupe des isométries contient* 6 *éléments : l'identité, les* 3 *transpositions (qui correspondent au* *symétries orthogonales selon les hauteurs-médianes-médiatrices), et les 3-cycles qui correspondent aux rotations de centre G et d'angle* $\pm \frac{2\pi}{3}$ *· Autrement dit, toutes les permutations des points* A, B, C *sont isométriques. Il n'en est plus de même pour un carré* ABCD *: la permutation qui échange* A *et* B *par exemple n'est pas isométrique. On montre que le groupe des isométries d'un polygone régulier à* n *côtés de* $\mathbb{R}^2$ *contient* $2n$ *éléments : ce groupe, noté* D_n *est le groupe diédral d'ordre* n*. L'exercice suivant complète l'exercice 1.20 avec l'étude du groupe des isométries du simplexe régulier. Le lecteur pourra trouver dans l'exercice 2.21 du tome Algèbre 1 un exemple montrant l'intérêt qu'il peut y avoir à réaliser un groupe comme le groupe des isométries d'un objet géométrique.*

4.43. Groupe des isométries du simplexe régulier

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on identifie le vecteur $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ à $(x_1, \dots, x_p, 0) \in \mathbb{R}^{p+1}$ ce qui permet d'identifier $\mathbb{R}^p$ à une partie de $\mathbb{R}^{p+1}$.

Pour $r > 0$, on définit un simplexe t_n de $\mathbb{R}^n$ par récurrence en posant $t_1 = (A_0, A_1)$, où $A_0 \in \mathbb{R}$, $A_1 \in \mathbb{R}$ et $d(A_0, A_1) = r$, $t_2 = (A_0, A_1, A_2)$, où $A_2 \in \mathbb{R}^2$ et $d(A_2, A_0) = d(A_1, A_0) = r, \dots$, $t_n = (A_0, \dots, A_n)$, où $A_n \in \mathbb{R}^n$ et $d(A_n, A_i) = r$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

1. Justifier l'existence d'un tel simplexe.

2. Montrer que la famille t_n est affinement libre.

3. Déterminer l'isobarycentre des points de t_n.

4. Montrer que l'ensemble des isométries directes de $\mathbb{R}^n$ laissant t_n globalement invariant est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_{n+1}$.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. On raisonne par récurrence : on montre qu'on peut construire t_n et qu'il vérifie de plus $A_n \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. L'existence de t_1 est évidente. Il s'agit de choisir deux réels quelconques, distants de r. Le simplexe t_{n-1} étant construit ($n \geqslant 1$), on cherche $A_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(A_n, A_i) = r$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. On pose $A_n = B_n + \lambda e_n$, où $B_n \in \mathbb{R}^{n-1}$. On a alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $d(A_n, A_i) = \sqrt{d(B_n, A_i)^2 + \lambda^2}$. On cherche $B_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que la distance $d(B_n, A_i)$ soit indépendante de $i \in [\![0, n-1]\!]$ et inférieure à r.

Montrons que le point Ω_{n-1}, isobarycentre de $(A_0, \dots, A_{n-1})$, convient. On a $\Omega_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k$. En posant $C_i = A_i - \Omega_{n-1}$, on obtient

$\sum_{k=0}^{n-1} C_k = 0$ et $\|C_i - C_j\| = r$, soit $r^2 = \|C_i\|^2 + \|C_j\|^2 - 2\langle C_i, C_j\rangle$ pour tout $i \neq j$. En sommant cette égalité sur j, il vient

$$\begin{aligned}(n-1)r^2 &= (n-1)\|C_i\|^2 + \sum_{j\neq i}\|C_j\|^2 - 2\langle C_i, \sum_{j\neq i} C_j\rangle \\ &= (n-1)\|C_i\|^2 + \sum_{j=0}^{n-1}\|C_j\|^2 - \|C_i\|^2 - 2\langle C_i, -C_i\rangle \\ &= n\|C_i\|^2 + \sum_{j=0}^{n-1}\|C_j\|^2.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\|C_i\|$ est indépendant de i, puis que $\|C_i\| = \sqrt{\dfrac{n-1}{2n}}\,r$. En prenant $B_n = \Omega_{n-1}$, on obtient $d(B_n, A_i) = \|C_i\|$, indépendant de i. Si $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{n+1}{2n}}\,r$, le point A_n et le simplexe t_n ont les propriétés voulues. Comme $\lambda \neq 0$, on a bien $A_n \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. Cela termine la démonstration par récurrence.

Remarquons que si B_n *est un point de* $\mathbb{R}^{n-1}$, *équidistant de tous les* A_i, *pour* $i \in [\![0, n-1]\!]$, *on a, pour tout* $i \neq j$, $\overrightarrow{\Omega_{n-1}B_n} \perp \overrightarrow{A_iA_j}$. *Ainsi* $\overrightarrow{\Omega_{n-1}B_n}$ *appartient à* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}})^{\perp}$. *Or la matrice de la famille* $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}})$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *est triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale car* $\overrightarrow{A_0A_i} \in \mathbb{R}^i \setminus \mathbb{R}^{i-1}$ *par hypothèse de récurrence. Ainsi* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}}) = \mathbb{R}^{n-1}$ *et* $\overrightarrow{\Omega_{n-1}B_n} = 0$, *donc* $B_n = \Omega_{n-1}$. *Donc* B_n *est unique et,* t_{n-1} *étant construit, on a deux points* A_n *possibles. Le point* A_0 *étant fixé, il y a donc* 2^n *simplexes* t_n *possibles.*

2. En reprenant la démonstration de la question précédente, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est libre. La famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est donc affinement libre.

3. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Ω_n l'isobarycentre de la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$, il résulte de la question 1 que $A_n = \Omega_{n-1} \pm \sqrt{\dfrac{n+1}{2n}}\,r e_n$, puis que

$$\begin{aligned}\Omega_n &= \frac{1}{n+1}(A_0 + \cdots + A_n) \\ &= \frac{1}{n+1}(n\Omega_{n-1} + A_n) = \frac{1}{n+1}\left((n+1)\Omega_{n-1} \pm \sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,r e_n\right) \\ &= \Omega_{n-1} \pm \frac{r}{\sqrt{2n(n+1)}}\,e_n.\end{aligned}$$

On obtient. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Omega_n = \mathrm{A}_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\pm r}{\sqrt{2k(k+1)}} e_k.$$

4. Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ laissant t_n invariant, elle induit une permutation de $\{\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$. Réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une permutation de $[\![0, n]\!]$. La famille $(\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots \mathrm{A}_n)$ étant une base affine, il existe une unique application affine f de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(\mathrm{A}_i) = \mathrm{A}_{\sigma(i)}$. Montrons que $\vec{f}$ est un endomorphisme orthogonal.

Soit $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$, distincts. On a $\|\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\|^2 = r^2$ et

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j}, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k} \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\|^2 + \|\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k\|^2 - \|\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k\|^2) = \frac{r^2}{2}.$$

On en déduit que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\langle \vec{f}(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i}), \vec{f}(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_j}) \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i}, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_j} \rangle.$$

L'application linéaire $\vec{f}$ conserve le produit scalaire sur les vecteurs de la base $(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n})$ de $\mathbb{R}^n$, donc c'est un endomorphisme orthogonal.

L'application F qui à σ associe f est une bijection de $\mathcal{S}_n$ sur l'ensemble $\mathcal{I}_n$ des isométries de $\mathbb{R}^n$ qui laissent invariant t_n. Il est clair que F est un isomorphisme de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ sur $(\mathcal{I}_n, \circ)$.

Si σ est la transposition $\tau_{i,j}$, qui échange i et j on obtient pour f la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur du segment $[\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_j]$ et dans ce cas $\det(\vec{f}) = -1$. Il en résulte que pour toute permutation σ le déterminant de $\overrightarrow{\mathrm{F}(\sigma)}$ est égal à la signature de σ. Ainsi, $\mathrm{F}(\sigma)$ est une isométrie positive si et et seulement si σ appartient au groupe alterné d'ordre $n+1$. L'application F réalise un isomorphisme de groupes de $\mathcal{A}_{n+1}$ sur l'ensemble des isométries positives qui laissent t_n invariant. $\triangleleft$

En particulier, l'ensemble des isométries positives de $\mathbb{R}^3$ laissant invariant un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathcal{A}_4$. Il comporte donc $\frac{4!}{2} = 12$ éléments.

Nous regroupons maintenant quelques exercices ayant pour dénominateur commun la notion de convexité. Les résultats de convexité sont souvent intuitifs mais difficiles et mêlent des considérations géométriques, topologiques et algébriques. Ils sont par conséquent difficiles à classer. Par choix nous avons placé la grande majorité des énoncés dans le tome 3 d'analyse et n'avons gardé ici que les exercices où les arguments topologiques sont réduits au minimum.

Le fait évident qu'une intersection de parties convexes est convexe permet de définir l'enveloppe convexe d'une partie X quelconque (plus petit convexe contenant X). Les points de cette enveloppe convexe sont exactement les barycentres à coefficients positifs des points de X. Le résultat de Carathéodory qui suit montre que si on est dans un espace de dimension n on peut se limiter aux barycentres des familles de n + 1 points pour obtenir l'enveloppe convexe d'une partie. La seconde question est l'application essentielle de ce résultat.

4.44. Théorème de Carathéodory (1907)

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et C(X) son enveloppe convexe.

1. Montrer que tout point de C(X) est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de X.

2. En déduire que si X est compacte, alors C(X) est compacte.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Soit $x \in \mathrm{C(X)}$. On sait que l'on peut écrire x comme barycentre à coefficients positifs de points de X : $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$ avec $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ et $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout k, les x_k étant des points de X. On va supposer que $p > n+1$ et montrer que l'on peut écrire x comme barycentre de $p-1$ points. Par itération, cela prouve bien le résultat demandé.

On va chercher d'autres combinaisons barycentriques de $x_1, \dots, x_p$ qui valent x et montrer que parmi elles, il y en a une où l'un des points x_k a un coefficient nul. Comme par hypothèse $p-1 > n$, la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$ est liée. Il existe donc des réels non tous nuls $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$ vérifiant $\sum_{i=2}^{p} \alpha_i (x_i - x_1) = 0$. Posons $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{p} \alpha_i$. On a alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$, d'où l'on déduit que pour tout réel t,

$$x = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i.$$

On va chercher à choisir t de manière à annuler l'un des coefficients (au moins) mais en gardant tous les autres positifs (la somme vaut toujours 1 car $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$). Comme les α_i ne sont pas tous nuls et de somme nulle, il existe nécessairement $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\alpha_i < 0$.

Soit $\tau = \min \left\{ -\dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}, \alpha_i < 0 \right\} > 0$. Posons $\mu_i = \lambda_i + \tau\alpha_i$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Par construction, les μ_i sont positifs ou nul, de somme égale à 1 et il existe (au moins) un indice j tel que $\mu_j = 0$ (tout indice qui correspond au maximum). On obtient $x = \sum_{i \neq j} \mu_i x_i$ et on a écrit x comme combinaison convexe de $p - 1$ points de X.

2. Posons $\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}, \ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \right\}$. Il s'agit clairement d'une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$. La question qui précède montre que C(X) est l'image de $\Lambda \times X^{n+1}$ par l'application f qui à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \Lambda \times X^{n+1}$ associe $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$. Cette application étant clairement continue, et l'ensemble source étant compact en tant que produit de compacts, C(X) est compact. ◁

On sera amené à utiliser le théorème de Carathéodory dans les deux dernières questions de l'exercice suivant. La première question est un exercice très classique et très souvent posé à l'oral de tous les concours.

4.45. Théorème de Jung (1901)

Soit K une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ euclidien.

1. Montrer qu'il existe une unique boule fermée $B(b_K, r_K)$ de rayon minimal contenant K.

2. Soit G le groupe formé par les isométries affines f de $\mathbb{R}^n$ telles que $f(K) = K$. Montrer qu'il existe un point de $\mathbb{E}^n$ fixe par tous les éléments de G.

3. Montrer que si K est compact, alors b_K est dans l'enveloppe convexe de $K \cap S(b_K, r_K)$, où $S(b_K, r_K)$ est la sphère de centre b_K et de rayon r_K.

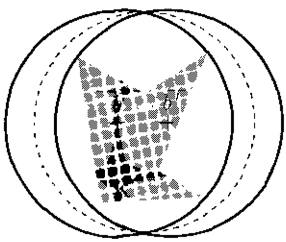
4. On prend $n = 2$. Montrer que $r_K \leqslant \dfrac{\delta(K)}{\sqrt{3}}$ où $\delta(K)$ désigne le diamètre de K.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

1. Posons $A = \{r \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in \mathbb{R}^n, K \subset B(x,r)\}$: c'est l'ensemble des rayons des boules fermées qui contiennent K. Comme K est supposée bornée, A n'est pas vide et comme il est minoré par 0, il admet une borne inférieure $r_K \geqslant 0$. Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ K \subset B(x, r_K)\}$. La question posée consiste à prouver que C est un singleton. Par définition de r_K, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ un point $x_k \in \mathbb{R}^n$ tel que $K \subset B\left(x_k, r_K + \dfrac{1}{k}\right)$. Montrons que la suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée. Soit $a \in K$. On a pour tout k, $\|x_k - a\| \leqslant r_K + \dfrac{1}{k}$ et donc $\|x_k\| \leqslant \|a\| + r_K + \dfrac{1}{k} \leqslant \|a\| + r_K + 1$. La suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée et on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(k)})_{k\geqslant 1}$ ($\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante), d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Notons b sa limite.

Pour tout $x \in K$, et tout $k \geqslant 1$, on a $\|x - x_{\varphi(k)}\| \leqslant r_K + \dfrac{1}{\varphi(k)}$ donc, en passant à la limite, on en déduit que $\|x - b\| \leqslant r_K$. On a donc montré que $K \subset B(b, r_K)$. Par conséquent $b \in C$ et C n'est pas vide. Il est assez clair géométriquement que C ne peut pas contenir deux points.



Supposons en effet que C contienne un autre point b' distinct de b. D'après l'égalité de la médiane, on a, pour tout $x \in K$,

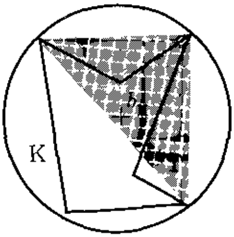
$$\begin{aligned}\left\|x - \frac{b+b'}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\|x-b\|^2 + \frac{1}{2}\|x-b'\|^2 - \frac{1}{4}\|b-b'\|^2 \\ &\leqslant r_K^2 - \frac{1}{4}\|b-b'\|^2 < r_K^2\end{aligned}$$

et K est inclus dans une boule fermée de centre $\dfrac{b+b'}{2}$ et de rayon strictement inférieur à r_K ; c'est contraire à la définition de r_K.

Conclusion. L'ensemble C est un singleton dont on notera b_K l'unique élément. On a bien démontré que K est inclus dans une unique boule fermée de rayon minimal.

2. Cette question offre une première application du résultat précédent. Soit f un élément de G. On a $K \subset B(b_K, r_K)$ et donc $f(K) \subset f(B(b_K, r_K))$. Par hypothèse, $f(K) = K$ et, f étant une isométrie affine, $f(B(b_K, r_K))$ est la boule de centre $f(b_K)$ et de rayon r_K. Par l'unicité établie dans la question précédente, on a $f(b_K) = b_K$. Le point b_K est donc invariant par tous les éléments de G.

3. Comme K est supposé compact, l'ensemble $K \cap S(b_K, r_K)$ est aussi compact. Il est clairement non vide, sans quoi on pourrait trouver une boule de centre b_K et de rayon strictement inférieur à r_K qui contienne toujours K (car la fonction continue $x \longmapsto \|x - b_K\|$ atteint son maximum sur le compact K). D'après, la seconde question de l'exercice 4.44, l'enveloppe convexe de $K \cap S(b_K, r_K)$, que l'on notera T est également compacte. Voici une figure dans le cas du plan (K est un polygone et T le triangle grisé).



Supposons par l'absurde que b_K n'appartient pas à T. Par compacité de T, il existe $y \in T$ tel que $\|b_K - y\| = d(b_K, T)$. Pour tout $t \in [0, 1]$ et $a \in T$, $ta + (1-t)y \in T$ par convexité de T. On a donc

$$\|b_K - (ta + (1-t)y)\| = \|b_K - y + t(y - a)\| \geqslant \|b_K - y\|,$$

c'est-à-dire, en élevant au carré et en développant,

$$t^2\|y - a\|^2 + 2t\langle b_K - y, y - a\rangle \geqslant 0.$$

En divisant par t puis en faisant tendre t vers 0, on obtient, pour tout $a \in T$, $\langle b_K - y, y - a\rangle \geqslant 0$.

Cette inégalité signifie que T *est inclus dans le demi-espace ne contenant pas* b_K, *limité par l'hyperplan* H *orthogonal à la droite* $(b_K y)$ *passant par* y. *On appelle* H *un hyperplan d'appui de* T *en* y.

Montrons que cette inégalité est contradictoire avec la définition de b_K. Posons $u = y - b_K \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la boule de centre $b_K + \dfrac{1}{n}u$ et de rayon r_K ne contient pas K. Il existe donc $a_n \in K$ tel que

$$d(b_K + \frac{1}{n}u, a_n) > r_K \geqslant d(b_K, a_n).$$

Cette inégalité s'écrit $\|b_K - a_n + \dfrac{1}{n}u\| \geqslant \|b_K - a_n\|$ et implique donc $2\langle b_K - a_n, u\rangle + \dfrac{1}{n}\|u\|^2 \geqslant 0$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ du compact K possède une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $a \in$ K. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} d(b_{\mathrm{K}} + \dfrac{1}{\varphi(n)} u, a_{\varphi(n)}) > r_{\mathrm{K}} \geqslant d(x, a_{\varphi(n)}) \\ 2\langle b_{\mathrm{K}} - a_{\varphi(n)}, u\rangle + \dfrac{1}{\varphi(n)} \|u\|^2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $d(b_{\mathrm{K}}, a) = r_{\mathrm{K}}$ et $\langle b_{\mathrm{K}} - a, u\rangle \geqslant 0$. Ainsi a appartient à $\mathrm{S}(x, r_{\mathrm{K}}) \cap \mathrm{K}$ et donc à T. Mais on a

$$\langle b_{\mathrm{K}} - y, y - a\rangle = \langle -u, u + b_{\mathrm{K}} - a\rangle = -\|u\|^2 - \langle u, b_{\mathrm{K}} - a\rangle < 0,$$

puisque $\|u\| = \|y - b_{\mathrm{K}}\| > 0$ et $\langle u, b_{\mathrm{K}} - a\rangle \geqslant 0$. Cela est contradictoire avec l'inégalité démontrée plus haut. On peut conclure : b_{K} appartient à l'enveloppe convexe de $\mathrm{S}(b_{\mathrm{K}}, r_{\mathrm{K}}) \cap \mathrm{K}$.

4. De la question précédente et du théorème de Carathéodory, il résulte qu'il existe $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{S}(b_{\mathrm{K}}, r_{\mathrm{K}}) \cap \mathrm{K}$ tel que b_{K} soit combinaison convexe de (x_1, x_2, x_3). Le point b_{K} est alors à l'intérieur du triangle $x_1x_2x_3$. La somme des trois angles géométriques $\widehat{x_1 b_{\mathrm{K}} x_2}$, $\widehat{x_2 b_{\mathrm{K}} x_3}$ et $\widehat{x_3 b_{\mathrm{K}} x_1}$ est donc égale à 2π et l'un de ces angles est donc supérieur à $\dfrac{2\pi}{3}\cdot$ Supposons par exemple que c'est $\widehat{x_1 b_{\mathrm{K}} x_2}$. On a alors

$$d(x_1, x_2) = 2r_{\mathrm{K}} \sin\left(\frac{\widehat{x_1 b_{\mathrm{K}} x_2}}{2}\right) \geqslant 2r_{\mathrm{K}} \sin\frac{\pi}{3} \geqslant r_{\mathrm{K}}\sqrt{3}.$$

Puisque x_1 et x_2 appartiennent à K, on a *a fortiori* $\delta(\mathrm{K}) \geqslant r_{\mathrm{K}}\sqrt{3}$.

Conclusion. On a la majoration $r_{\mathrm{K}} \leqslant \dfrac{\delta(\mathrm{K})}{\sqrt{3}}$.

Notons que la constante $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *est la meilleure possible car, si* K *est un triangle équilatéral de côté* a, *on a* $\delta(\mathrm{K}) = a$ *et* r_{K} *est le rayon du cercle circonscrit, à savoir* $r_{\mathrm{K}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\delta(\mathrm{K})}{\sqrt{3}}\cdot$ *Dans* $\mathbb{R}^n$, *on peut montrer que* $r_{\mathrm{K}} \leqslant \delta(\mathrm{K})\sqrt{\dfrac{n}{2(n+1)}}$, *l'égalité étant obtenue pour un simplexe régulier.*

4.46. Points extrémaux d'un ensemble convexe

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C une partie convexe non vide de E, on note Ext(C) l'ensemble des x de C tels que $\mathrm{C} \setminus \{x\}$ soit encore convexe (un tel point de C est dit *extrémal*). Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on écrit $x \geqslant 0$ si $x_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

On fixe $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\delta \in \mathbb{R}^m$.

1. Soient $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant 0 \text{ et } Ax = \delta\}$ qu'on suppose non vide, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in C$ et $J = \{j \in \{1, \ldots, n\},\ c_j \neq 0\}$. Si $1 \leqslant j \leqslant n$, on note A_j la j-ième colonne de A.

Montrer l'équivalence entre :

(i) $c \in \mathrm{Ext}(C)$;

(ii) la famille $(A_j)_{j \in J}$ est libre.

2. On considère $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x \geqslant 0 \text{ et } \delta - Ax \geqslant 0\}$ et $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } y + Ax = \delta\}$. Soit $x \in D_1$.

Montrer l'équivalence entre :

(i) $x \in \mathrm{Ext}(D_1)$;

(ii) il existe $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $(x, y) \in \mathrm{Ext}(D_2)$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Un point c de C n'est pas extrémal si, et seulement si, $C \setminus \{x\}$ n'est pas convexe, c'est-à-dire s'il existe $(y, z) \in C \setminus \{x\}$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $\lambda y + (1 - \lambda)z = x$. A contrario x est extrémal si, et seulement si, pour tout $(y, z) \in C^2$ et $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda y + (1 - \lambda)z = x$ implique $y = z = x$.

1. Notons que C est clairement convexe comme intersection de parties convexes. On remarque que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$.

• Supposons que $c \in \mathrm{Ext}(C)$. Montrons que la famille $(A_j)_{j \in J}$ est libre, en raisonnant par l'absurde. Soit $(\lambda_j)_{j \in J}$ une famille non nulle telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j A_j = 0$. Considérons $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ défini par $u_j = \lambda_j$ si $j \in J$ et $u_j = 0$ sinon. Par construction $Au = \sum_{j=1}^{n} u_j A_j = \sum_{j \in J} \lambda_j A_j = 0$. Pour $t > 0$, posons $x = c - tu$ et $y = c + tu$. Montrons que pour t assez petit, x et y appartiennent à C.

On sait que $Ax = Ac - tAu = Ac = \delta$ et de même $Ay = \delta$. Il suffit de vérifier que x et y sont positifs. Si $j \notin J$ alors $u_j = c_j = 0$ donc $x_j = y_j = 0$. Si $j \in J$, alors $c_j > 0$ et x_j et y_j sont positifs si $t|\lambda_j| \leqslant c_j$. Il suffit de prendre $t \max_{j \in J} |\lambda_j| \leqslant \min_{j \in J}(c_j)$. Par construction $\max_{j \in J} |\lambda_j| > 0$ et $\min_{j \in J}(c_j) > 0$, donc il suffit de prendre $0 < t < t_0$ où $t_0 = \dfrac{\min_{j \in J}(c_j)}{\max_{j \in J} |\lambda_j|}$. Pour un tel t, on a x et y dans $C \setminus \{c\}$, car $tu \neq 0$, et $c = \dfrac{1}{2}(x + y)$. Cela contredit le fait que c est extrémal. La famille $(A_j)_{j \in J}$ est donc libre.

• Supposons réciproquement que la famille $(A_j)_{j \in J}$ est libre. Considérons $\lambda \in]0, 1[$ et $(x, y) \in C^2$ tels que $c = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Pour tout $j \notin \mathrm{J}$, on a $c_j = 0 = \lambda x_j + (1-\lambda)y_j$. Comme $x_j \geqslant 0$ et $y_j \geqslant 0$, on en déduit $\lambda x_j = (1-\lambda)y_j = 0$ et donc $x_j = y_j = 0$. L'égalité $\mathrm{A}x = \mathrm{A}y = \delta$ implique donc $\sum_{j\in \mathrm{J}} x_j \mathrm{A}_j = \sum_{j\in \mathrm{J}} y_j \mathrm{A}_j$ et, puisque la famille $(\mathrm{A}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est libre, $x_j = y_j$ pour tout $j \in \mathrm{J}$. On a donc $x = y$ et $c = \lambda x + (1-\lambda)y = x = y$. Le point c est extrémal.

2. • Supposons que $x \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_1)$. S'il existe $y \in \mathbb{R}^m$ tel que l'on ait $(x,y) \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_2)$, alors nécessairement $y = \delta - \mathrm{A}x$. Comme $x \in \mathrm{D}_1$, $x \geqslant 0$ et $\mathrm{A}x \leqslant \delta$, donc $y \geqslant 0$ et $(x,y) \in \mathrm{D}_2$. Montrons que $(x,y) \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_2)$.

Soit (z,t) et (u,v) deux éléments de D_2 et $\lambda \in]0,1[$ tels que

$$(x,y) = \lambda(z,t) + (1-\lambda)(u,v) = (\lambda z + (1-\lambda)u, \lambda t + (1-\lambda)v).$$

Par hypothèse $z \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$, $\mathrm{A}z = \delta - t \leqslant \delta$ et $\mathrm{A}u = \delta - v \leqslant \delta$, donc z et u appartiennent à D_1. Puisque x est un point extrémal de D_1, de $\lambda \in]0,1[$ et $x = \lambda z + (1-\lambda)u$, on déduit $z = u = x$, puis $t = \delta - \mathrm{A}z = \delta - \mathrm{A}x = y$ et de même $v = y$. Ainsi, $(z,t) = (u,v) = (x,y)$ et $(x,y) \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_2)$.

• Supposons réciproquement qu'il existe $y \in \mathbb{R}^m$ tel que l'on ait $(x,y) \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_2)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_1)$. Par hypothèse $y = \delta - \mathrm{A}x$. Soit $(z,u) \in \mathrm{D}_1^2$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda z + (1-\lambda)u$. Posons $t = \delta - \mathrm{A}z$ et $v = \delta - \mathrm{A}u$. On a alors (z,t) et (u,v) dans D_2. Comme

$$\begin{aligned}\lambda t + (1-\lambda)v &= \lambda(\delta - \mathrm{A}z) + (1-\lambda)(\delta - \mathrm{A}u)\\ &= \delta - \mathrm{A}(\lambda z + (1-\lambda)v) = \delta - \mathrm{A}x = y,\end{aligned}$$

on a $(x,y) = \lambda(z,t) + (1-\lambda)(u,v)$ et comme (x,y) est un élément extrémal de D_2, on en déduit $(z,t) = (u,v) = (x,y)$ et donc $z = u = x$. Cela montre que $x \in \mathrm{Ext}(\mathrm{D}_1)$. $\lhd$

Un théorème de Krein-Milman affirme qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est toujours l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux. Un carré plein de $\mathbb{R}^2$ par exemple est l'enveloppe convexe de ses quatre sommets. Le lecteur trouvera ce résultat dans le tome 3 d'Analyse.

4.47. Rectangle circonscrit à un convexe compact

Soit K un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^2$, δ le diamètre de K.

1. Montrer qu'il existe un rectangle ABCD contenant K dont chaque côté contient au moins un point de K et tel que $\mathrm{AB} = \delta$. On pose $\mathrm{BC} = h$.

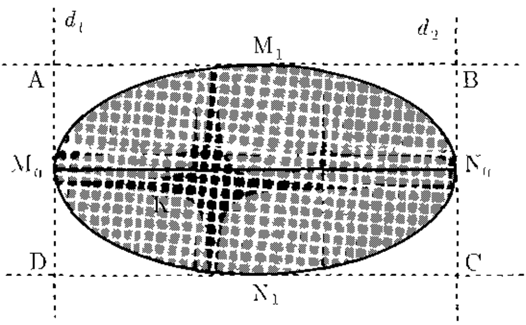
2. Montrer que l'aire de K est supérieure ou égale à $\dfrac{\delta h}{2}\cdot$

> **3.** Montrer que, pour tout point P de $\mathbb{R}^2$, la valeur moyenne de la distance de P aux points de K est supérieure ou égale à $\dfrac{\delta}{12}$.
>
> **(École normale supérieure)**

▷ **Solution.**

On supposera que $\delta > 0$, sinon K est réduit à un point et tous les résultats sont évidents.

1. L'application $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \longmapsto \mathrm{MN}$ est continue sur K^2 qui est compact, donc elle atteint son maximum : il existe $(\mathrm{M}_0, \mathrm{N}_0) \in \mathrm{K}^2$ tel que $\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0 = \delta$. Considérons la projection orthogonale p sur la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0)$. L'application p est continue donc l'image $p(\mathrm{K})$ est un compact de la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0)$; comme p est affine, c'est aussi un convexe. C'est donc un segment, qui contient $[\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0]$. Comme une projection orthogonale est de norme inférieure ou égale à 1, on a, pour tout $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathrm{K}^2$, $p(\mathrm{M})p(\mathrm{N}) \leqslant \mathrm{MN} \leqslant \delta \leqslant \mathrm{M}_0\mathrm{N}_0$. Ainsi, le segment $p(\mathrm{K})$ est de longueur inférieure ou égale à δ donc $p(\mathrm{K}) = [\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0]$. Notons d_1 et d_2 les droites passant par M_0 et N_0 respectivement et orthogonales à $(\mathrm{M}_0\mathrm{N}_0)$. L'ensemble K est contenu dans la partie du plan limitée par d_1 et d_2.



Si on note q la projection orthogonale sur d_1, on trouve comme précédemment que $q(\mathrm{K})$ est un segment que l'on note $[\mathrm{AD}]$. Notons B et C les projetés orthogonaux de A et D sur d_2. Par construction, K est contenu dans la partie du plan limitée par (AB) et (CD) donc est à l'intérieur du rectangle ABCD. Les côtés (AD) et (BC) contiennent respectivement les points M_0 et N_0 de K. Comme A et D appartiennent à $q(\mathrm{K})$, il existe M_1 et N_1 dans K tels que $\mathrm{A} = q(\mathrm{M}_1)$ et $\mathrm{D} = q(\mathrm{N}_1)$. Les points M_1 et N_1 appartiennent respectivement à (AB) et (CD). Les quatre côtés du rectangle contiennent donc chacun au moins un point de K. Enfin $\mathrm{AB} = \mathrm{M}_0\mathrm{N}_0 = \delta$.

2. Avec les notations de la première question, les points M_0, N_0, M_1 et N_1 appartiennent à K donc le quadrilatère convexe $M_0M_1N_0N_1$ est inclus dans K. En notant μ l'aire, on obtient

$$\begin{aligned}\mu(K) &\geqslant \mu(M_0M_1N_0N_1) \geqslant \mu(M_0M_1N_0) + \mu(M_0N_0N_1)\\ &\geqslant \frac{AM_0 \cdot M_0N_0}{2} + \frac{DM_0 \cdot M_0N_0}{2} \geqslant \frac{AD \cdot M_0N_0}{2} \geqslant \frac{\delta h}{2}.\end{aligned}$$

L'énoncé laisse supposer que l'aire de K *est définie, ce que nous avons admis. En toute rigueur, cela doit être démontré. On peut raisonner ainsi. On munit le plan d'un repère orthonormal d'origine* (M_0, i, j), *où* i *et* j *sont colinéaires et de même sens que* $\overrightarrow{M_0N_0}$ *et* $\overrightarrow{M_0A}$. *Pour tout* $x \in [0, \delta]$, *on considère la droite passant par le point* M *de coordonnées* $(x, 0)$ *et orthogonale à* (AB). *Elle coupe* K *selon un segment, ensemble des points d'abscisse* x *dont l'ordonnée varie entre* $f(x)$ *et* $g(x)$ $(f(x) \leqslant g(x))$. *On définit ainsi deux applications de* $[0, \delta]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $K = \{(x, y) \in [0, \delta] \times \mathbb{R},\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$. *Pour définir l'aire de* K, *il suffit de démontrer que les applications* f *et* g *sont continues, car alors* $\mu(\mathcal{C}) = \int_0^\delta (g(x) - f(x))\, dx$.

La fonction f *est convexe et la fonction* g *concave, car* K *étant convexe, pour* $(x, x') \in [0, \delta]^2$ *et* $\lambda \in [0, 1]$, *les points de coordonnées* $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x'))$ *et* $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda g(x) + (1-\lambda)g(x'))$ *appartiennent à* K *donc*

$$\begin{aligned}f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x') &\leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(x')\\ &\leqslant g(\lambda x + (1-\lambda)x').\end{aligned}$$

Les fonctions f *et* g *sont donc continues sur* $]0, \delta[$.

Notons que $f(0) = g(0) = 0$, *car sinon* [AD] *contiendrait un point* M *de* K *différent de* M_0 *et on aurait* $MN_0 > \delta$. *De même,* $f(\delta) = g(\delta) = 0$. *Soit* (x_n) *une suite de* $[0, \delta]$ *tendant vers* 0. *La suite* $(f(x_n))$ *est bornée. Si* y *est une valeur d'adhérence de cette suite,* $(0, y)$ *est une valeur d'adhérence de la suite* $((x_n, f(x_n))$ *donc* M *de coordonnées* $(0, y)$ *appartient à* K *car* K *est fermé, donc* $y = 0$. *La suite* $(f(x_n))$ *qui est bornée et possède une seule valeur d'adhérence* 0 *converge vers* 0. *Ainsi* f *est continue en* 0. *On montre de même que* g *est continue en* 0 *et que* f *et* g *sont continues en* δ.

3. La remarque qui terminait la question précédente justifie aussi l'existence de cette valeur moyenne $m(P)$. On a, pour tout point P du plan de coordonnées (x_0, y_0),

$$m(\mathrm{P}) = \frac{\iint_{\mathrm{K}} \mathrm{MP}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mu(\mathrm{K})} = \frac{\iint_{\mathrm{K}} \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mu(\mathrm{K})}$$
$$\geqslant \frac{\iint_{\mathrm{K}} |x-x_0|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mu(\mathrm{K})}.$$

Comme K est inclus dans le rectangle ABCD, on a $\mu(\mathrm{K}) \leqslant h\delta$. D'autre part, K contient l'intérieur $\mathcal{D}$ du quadrilatère $\mathrm{M_0M_1N_0N_1}$. On a donc $m(\mathrm{P}) \geqslant \frac{1}{h\delta} \iint_{\mathcal{D}} |x-x_0|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Notons h_1 l'ordonnée de A et h_2 celle de D. On a donc $h_1 - h_2 = h$. On fixe $y \in [h_2, h_1]$; les points de $\mathcal{D}$ d'ordonnée y ont une abscisse qui varie entre a et b. Il faut minorer $\int_a^b |x-x_0|\,\mathrm{d}x$. Par un changement de variable, on obtient $\int_a^b |x-x_0|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left|x - x_0 + \frac{a+b}{2}\right| \mathrm{d}x$. L'application $\varphi : z \longmapsto \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} |x-z|\,\mathrm{d}x$ est convexe et impaire sur $\mathbb{R}$. On a donc, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(z) = \frac{\varphi(z)+\varphi(-z)}{2} \geqslant \varphi(0)$. Comme $\varphi(0) = \frac{(b-a)^2}{4}$, on obtient $\int_a^b |x-x_0|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

Par le théorème de Thalès, on a pour y dans $[0, h_1]$, $\frac{b-a}{\delta} = \frac{h_1-y}{h_1}$ et donc $\frac{(b-a)^2}{4} = \frac{\delta^2(h_1-y)^2}{4h_1^2}$. On obtient de même, pour y dans $[h_2, 0]$, $\frac{(b-a)^2}{4} = \frac{\delta^2(h_2-y)^2}{4h_2^2}$. On en déduit que

$$\iint_{\mathcal{D}} |x-x_0|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \int_{h_2}^{0} \frac{\delta^2(h_2-y)^2}{4h_2^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{h_1} \frac{\delta^2(h_1-y)^2}{4h_1^2}\,\mathrm{d}y$$
$$\geqslant -\frac{\delta^2 h_2}{12} + \frac{\delta^2 h_1}{12} \geqslant \frac{\delta^2 h}{12}.$$

On a donc $\boxed{m(\mathrm{P}) \geqslant \frac{\delta}{12}}$. ◁

Les exercices suivants, assez divers, peuvent être rangés dans la catégorie géométrie discrète, mettant en jeu des points variant dans des ensembles discrets et en particuliers des points à coordonnées entières.

4.48. Théorème de Pick (1899)

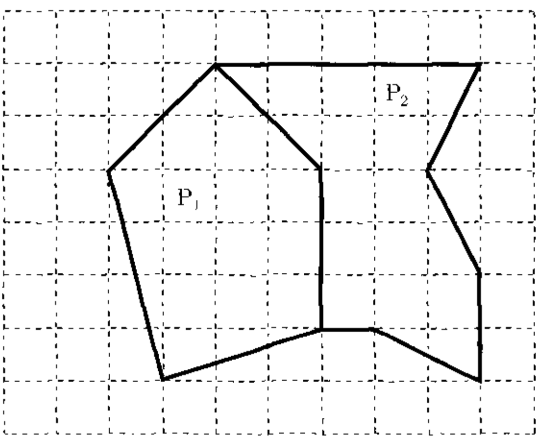
Soit P un polygone (plein) du plan dont les sommets sont à coordonnées entières. On note A l'aire de ce polygone, I le nombre de points à coordonnées entières qui sont strictement à l'intérieur de P et F le nombre de points à coordonnées entières qui sont sur la frontière de P. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{I} + \dfrac{\mathrm{F}}{2} - 1$.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Il est naturel de commencer par regarder quelques exemples simples pour se convaincre du résultat. Prenons pour P un carré horizontal de côté $n \geqslant 2$ dont les sommets sont $(0,0)$ $(n,0)$ $(0,n)$ et (n,n). On a $\mathrm{A} = n^2$, $\mathrm{F} = 4(n+1) - 4 = 4n$ (les sommets sont comptés deux fois) et $\mathrm{I} = (n-1)^2$. On vérifie effectivement que $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$.

Pour établir le résultat dans le cas général, l'idée consiste à découper le polygone P en polygones plus simples. On ne va pas prendre des carrés du type ci-dessus, mais des triangles. Il suffira alors d'établir la formule pour un triangle, car on observe que la formule est additive au sens suivant : supposons que P_1 et P_2 soient deux polygones ayant une ou plusieurs arêtes *consécutives* en commun mais dont les intérieurs sont disjoints.



On note P le polygone $\mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2$ et $\mathrm{A}_1, \mathrm{I}_1, \mathrm{F}_1$ (resp. $\mathrm{A}_2, \mathrm{I}_2, \mathrm{F}_2$) l'aire, le nombre de points intérieurs et sur la frontière de P_1 (resp. P_2). On a bien entendu $A = A_1 + A_2$. Notons x le nombre de points qui sont sur la frontière commune à P_1 et P_2 et dans l'intérieur de $P_1 \cup P_2$. On a clairement

$$I = I_1 + I_2 + x \quad \text{et} \quad F = F_1 + F_2 - 2x - 2$$

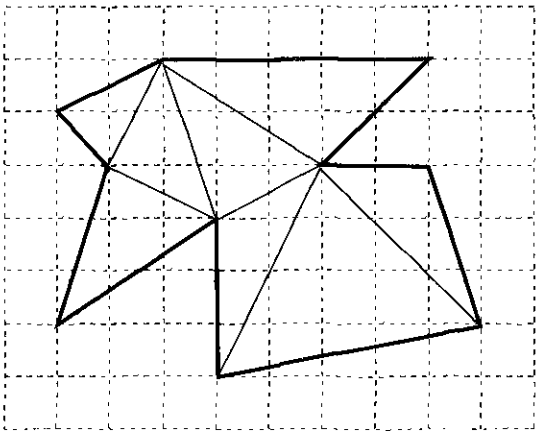
de sorte que

$$I + \frac{F}{2} - 1 = I_1 + I_2 + x + \frac{F_1 + F_2 - 2x - 2}{2} - 1 = I_1 + \frac{F_1}{2} - 1 + I_2 + \frac{F_2}{2} - 1.$$

Donc si la formule est vraie pour P_1 et P_2, elle est aussi vraie pour P.

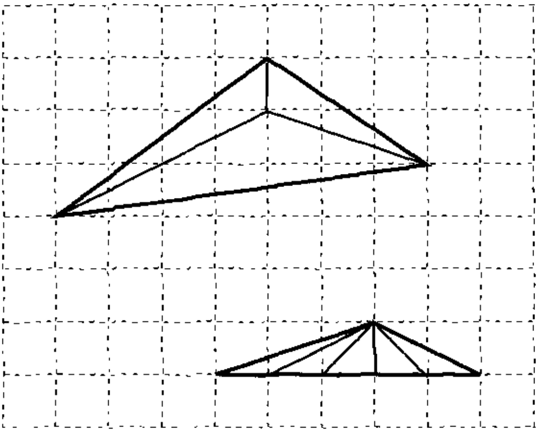
Montrons maintenant que tout polygone P peut être décomposé en triangles à sommets dans $\mathbb{Z}^2$, et même en triangles élémentaires, c'est-à-dire qui n'ont aucun point à coordonnées entières dans leur intérieur ou au bord hormis les sommets. Pour cela, on procède de la manière suivante.

On commence par trianguler le polygone P n'importe comment (il est aisé de montrer par récurrence sur le nombre de sommets que tout polygone admet une triangulation) :



Si un des triangles contient un point à coordonnées entières dans son intérieur, on le relie aux trois sommets. On continue cela tant qu'il reste des points intérieurs à coordonnées entières. Enfin, pour un triangle sans point intérieur à coordonnées entières, on regarde s'il y a des points à coordonnées entières sur un des bords en dehors des sommets. Si tel est le cas, on relie le sommet opposé à tous les points entiers du côté en question.

Bref, tout polygone P admet une triangulation en triangles élémentaires. Comme P est obtenu en assemblant ces triangles élémentaires avec 1 ou 2 arêtes en commun, il suffit, d'après l'additivité démontrée



ci-dessus, de vérifier que la formule est vraie pour un triangle élémentaire T. Comme pour un tel triangle on a $\mathrm{I} = 0$ et $\mathrm{F} = 3$, on est ramené à montrer que l'aire de T est égale à $\frac{1}{2}\cdot$ Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que l'un des sommets de T est l'origine $(0,0)$. Notons (a,b) et (c,d) les deux autres sommets. Le fait que T soit élémentaire implique que $u = (a,b)$ et $v = (c,d)$ forment une base du réseau $\mathbb{Z}^2$. En effet, si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, on peut écrire $(x,y) = \alpha u + \beta v$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ car (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$. On va voir que α et β sont entiers. On peut écrire $\alpha = \mathrm{E}(\alpha) + r$ et $\beta = \mathrm{E}(\beta) + s$ avec r, s dans $[0,1[$. Le point $(x,y) - \mathrm{E}(\alpha)u - \mathrm{E}(\beta)v = ru + vs$ est dans $\mathbb{Z}^2$ et se trouve dans le parallélogramme de base (u,v). Comme T est élémentaire, ce parallélogramme ne contient aucun point à coordonnées entières en dehors de ses sommets. Ainsi, $r = s = 0$. Il en résulte que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Son déterminant est donc égal à ± 1. Or ce déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme défini par u et v. L'aire de T est donc égale à $\frac{1}{2}\cdot$ ◁

La formule ne convient plus lorsque le polygone a des trous : au lieu de 1 il faut retrancher en fait la caractéristique d'Euler du polygone.

4.49. Droites à une distance strictement positive de $\mathbb{Z}^2$

Déterminer l'ensemble des droites affines D de $\mathbb{R}^2$ telles que l'ensemble des distances des points de $\mathbb{Z}^2$ à D admette une borne inférieure non nulle.

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Soit D une droite affine du plan $\mathbb{R}^2$.

• Si D a pour équation $x = x_0$, elle convient si et seulement si $x_0 \notin \mathbb{Z}$ et la borne inférieure de la distance des points de D à $\mathbb{Z}^2$ est la distance de x_0 à $\mathbb{Z}$. De même si D a pour équation $y = y_0$, il faut et il suffit que $y_0 \notin \mathbb{Z}$.

• Supposons dorénavant que D a pour équation $y = ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Nous savons que la distance d'un point (m, n) à D est égale à $\dfrac{|am + b - n|}{\sqrt{1 + a^2}}$. On cherche donc les couples (a, b) pour lesquels il existe $c > 0$ tel que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad (am + b - n)^2 \geqslant c(1 + a^2).$$

Nous savons que, α et β étant deux réels non nuls, $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\dfrac{\beta}{\alpha}$ est irrationnel.

Si $a \notin \mathbb{Q}$, alors $a\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $c > 0$, il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(b - (-am + n))^2 < c(1 + a^2)$. La droite D ne convient pas.

Si $a \in \mathbb{Q}$, on écrit $a = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et on a alors $a\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \dfrac{1}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}) = \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$. On veut donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\left(\dfrac{m}{q} + b\right)^2 \geqslant c(1 + a^2)$, *i.e.* $(m + bq)^2 \geqslant c(1 + a^2)q^2$. Le réel $c > 0$ existe si, et seulement si, bq n'appartient pas à $\mathbb{Z}$. Alors $|m + bq|$ est minoré par la distance de bq à $\mathbb{Z}$.

Conclusion. La distance de la droite affine D aux points de $\mathbb{Z}^2$ est minorée par une constante strictement positive si D possède une équation de la forme $x = x_0$ avec $x_0 \notin \mathbb{Z}$, $y = y_0$ avec $y_0 \notin \mathbb{Z}$ ou $y = ax + b$ avec $a \in \mathbb{Q}^*$, $a = \dfrac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) et $bq \notin \mathbb{Z}$. ◁

4.50. Polygone ayant trois sommets à coordonnées entières

> Soit P un polygone convexe régulier de $\mathbb{R}^2$. On suppose que deux sommets consécutifs de P et un troisième sont à coordonnées entières. Montrer que P est un carré.
>
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

On suppose que P est un polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 3$). On note $M_1, \ldots, M_n$ les sommets du polygone P et I son centre. Il existe $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$, avec ℓ distinct de k et $k+1$ tel que M_k, M_{k+1} et M_ℓ aient des coordonnées entières. Les coordonnées du milieu de $[M_k, M_{k+1}]$ et du vecteur $\overrightarrow{M_k M_{k+1}}$ sont rationnelles. La médiatrice de $[M_k, M_{k+1}]$ a donc une équation à coefficients rationnels. Il en est de même de la médiatrice de $[M_k, M_\ell]$. Le point I qui est l'intersection de ces deux droites a donc des coordonnées rationnelles. On en déduit que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IM_k}$ et $\overrightarrow{IM_{k+1}}$ sont rationnelles. Notons z_k et z_{k+1} les affixes de ces vecteurs. Leur partie réelle et leur partie imaginaire sont rationnelles. On sait que $z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k$. On en déduit que $e^{i\frac{2\pi}{n}} = \dfrac{z_{k+1}}{z_k} = \dfrac{z_{k+1}\overline{z}_k}{|z_k|^2}$. Cela montre que $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{n}$ sont des nombres rationnels.

On veut en déduire que $n = 4$, c'est-à-dire que $\cos\dfrac{2\pi}{n} = 0$. Il s'agit d'un exercice relativement classique dont une version plus générale consiste à chercher tous les rationnels r tels que $\cos r\pi$ soit rationnel. Il est clair que $n = 3$ ne convient pas car $\sin\dfrac{2\pi}{3} \notin \mathbb{Q}$. Supposons par l'absurde que $n \geqslant 5$ et posons $\cos\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{p}{q}$, où $p < q$ sont des entiers naturels premiers entre eux. L'idée est d'utiliser les polynômes de Tchebychev. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ nous savons qu'il existe un unique polynôme T_m de degré m, à coefficients entiers tel que $\cos m\theta = T_m(\cos\theta)$ pour tout réel θ ; de plus T_m a la parité de m. On a donc en particulier,

$$1 = \cos 2\pi = T_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) = T_n\left(\frac{p}{q}\right).$$

• Si n est impair, le polynôme T_n n'a pas de terme constant et la relation $q^n = q^n T_n\left(\dfrac{p}{q}\right)$ montre que p divise q^n. Comme p et q sont premiers entre eux, cela impose $p = 1$. On a donc $\cos\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{1}{q} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Mais alors $\sin\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\sqrt{q^2-1}}{q}$ ne peut appartenir à $\mathbb{Q}$ (si $\dfrac{\sqrt{q^2-1}}{q} = \dfrac{p'}{q'}$, avec p' et q' dans $\mathbb{N}^*$, premiers entre eux, on a $\dfrac{q^2-1}{q^2} = \dfrac{p'^2}{q'^2}$ et comme $(q^2-1)\wedge q^2 = 1$, on en déduit $q'^2 = q^2$ et $q^2 - 1 = p'^2$, c'est-à-dire $1 = (q-p')(q+p')$, ce qui impossible car $q + p' \geqslant 3$). On en déduit que n est pair et on pose dans la suite $n = 2n'$ (avec $n' \geqslant 3$).

• Si n' est impair, on écrit de même $-1 = \cos\pi = T_{n'}\left(\dfrac{p}{q}\right)$ et on en déduit comme dans le cas précédent que $p = 1$ et une impossibilité.

• Si n' est divisible par 4, on écrit $n' = 4k$ et l'égalité $\cos\dfrac{\pi}{4} = T_k\left(\dfrac{p}{q}\right)$ montre que $\cos\dfrac{\pi}{4}$ est rationnel, ce qui n'est pas vrai.

• Si enfin $n' = 2k$ avec k impair, $k \geqslant 3$, on a $\cos\dfrac{\pi}{k} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{n'} - 1 \in \mathbb{Q}$ et on est ramené à l'étude du cas n' impair ($2k$ remplace $2n'$).

Toutes les valeurs $n \geqslant 5$ conduisent à une impossibilité.

Conclusion. La seule valeur possible est $n = 4$ et le polygone P est un carré. $\triangleleft$

Le raisonnement précédent permet de montrer que les seuls rationnels $r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *(on peut se limiter à cet intervalle par symétries) tels que* $\cos r\pi \in \mathbb{Q}$ *sont* 0, $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{1}{2}$.

4.51. Recouvrement par des droites

> On note $C_n = ([1, n] \times [1, n]) \cap \mathbb{N}^2$. Pour tout partie finie S de C_n, on note D(S) l'ensemble des points de C_n qui sont sur une droite passant par deux points de S. Enfin, on note μ_n le plus petit cardinal d'une partie S telle que $D(S) = C_n$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\mu_n \geqslant \alpha n^{2/3}$.
>
> (**École normale supérieure**)

$\triangleright$ **Solution.**

• On a $\mu_2 = 4$, car pour $n = 2$ on voit que $D(S) = S$ pour toute partie S (une droite passant par deux points de $[\![1, 2]\!]^2$ ne contient pas d'autre point du carré en dehors des deux points qui la définissent).

• On a $\mu_3 \leqslant 4$, car si on prend les 4 sommets du carré pour S on a $D(S) = [\![1, 3]\!]^2$ (le centre est sur les diagonales). On ne peut pas y arriver avec S de cardinal 3 : en effet, une droite contient au plus trois points du carré. Donc les 3 droites qu'on peut tracer avec 3 points contiennent au maximum 6 points et il y en a 9 dans le carré... On a donc $\mu_3 = 4$.

• Passons à l'étude du cas général. On voit que pour obtenir une minoration de μ_n il faut estimer le nombre maximum de points de C_n qu'on peut avoir sur une droite donnée passant par deux points du carré C_n. Voyons ce que donne une première estimation grossière. Il est clair qu'une droite possède au plus n points. Si S est de cardinal s, on a au plus $C_s^2 = \frac{s(s-1)}{2}$ droites. Ainsi, si $D(S) = C_n$ alors $n^2 \leqslant n\frac{s(s-1)}{2}$. On en déduit que $2n \leqslant s(s-1) \leqslant s^2$ et cela donne $\sqrt{2n} \leqslant \mu_n$. C'est déjà pas mal mais l'énoncé demande mieux ! Pour cela il faut raffiner notre estimation du nombre de points sur une droite.

En fait, il n'y a pas tant de droites que cela qui contiennent n points, et certaines droites ont même seulement deux points (par exemple celle qui passe par $(1, 2)$ et $(2, 1)$). On va étudier cela en fonction de la pente. La pente d'une droite passant par deux points de C_n est soit nulle, soit infinie, soit de la forme $\pm\frac{a}{b}$ avec a, b entiers de $[\![1, n]\!]$. Dans les deux premiers cas la droite contient n points. Étudions ce qu'il en est pour une droite de pente $\pm\frac{a}{b}$. On suppose a, b premiers entre eux. L'équation d'une telle droite est de la forme $by = \pm ax + c$ avec c entier (puisque la droite contient deux points à coordonnées entières). On connaît la structure des solutions d'une telle équation diophantienne : si (x_0, y_0) est une solution particulière, les autres solutions sont $(x_0 + kb, y_0 \pm ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il résulte de cela que la droite contient forcément moins de $\min(\frac{n}{a}, \frac{n}{b})$ points du carré C_n.

Introduisons quelques notations. Si D est une droite comme ci-dessus, on note $p(\mathrm{D})$ l'entier $\max(a, b)$ (où $\frac{a}{b}$ est le représentant irréductible de la valeur absolue de la pente de la droite). On pose $p(\mathrm{D}) = 1$ si D est horizontale ou verticale (pente nulle ou infinie). On vient donc de montrer que pour toute droite D le nombre de points de $\mathrm{D} \cap \mathrm{C}_n$ est majoré par $\frac{n}{p(\mathrm{D})}$.

Soit S une partie finie de C_n. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on note s_k le nombre de droites D définies par deux points de S telles que $p(\mathrm{D}) = k$. Si $\mathrm{D(S)} = \mathrm{C}_n$, on a forcément $n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k \frac{n}{k}$ c'est-à-dire $n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k}$ (1).

Par ailleurs, on a $\sum_{k=1}^{n} s_k \leqslant \mathrm{C}_s^2 = \frac{s(s-1)}{2} \leqslant \frac{s^2}{2}$ (2). On va maintenant estimer s_k. Par un point donné de S, il y a au plus $4k$ droites D telles que $p(\mathrm{D}) = k$ qui passent par ce point (car la pente prend au plus $4k$ valeurs différentes) et cela est aussi valable pour $k = 1$. On a donc $s_k \leqslant 4ks$ (3) pour tout k.

On dispose alors de tous les éléments pour conclure. Imaginons que s_1 ne soit pas égal à la valeur maximale $4s$ autorisée par (3). On diminue alors s_2 (ou s_3,...) du nombre manquant et on rajoute cette quantité à s_1 : l'inégalité (2) reste vraie car la somme globale des s_i n'a pas changé et l'inégalité (1) aussi, car la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k}$ est augmentée par cette opération. On peut donc supposer que $s_1, s_2, \dots, s_t$ prennent la valeur maximale autorisée par (3), que s_{t+1} prend le « reste » et que $s_k = 0$ pour $k > t + 1$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{t} s_k = \sum_{k=1}^{t} 4ks = 4s\frac{t(t+1)}{2} \leqslant \frac{s^2}{2}$$

de sorte que $4t^2 \leqslant 4t(t+1) \leqslant s$ et donc $2t \leqslant \sqrt{s}$. Enfin,

$$n \leqslant \sum_{k=1}^{t+1} \frac{s_k}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{t+1} 4s = 4(t+1)s \leqslant 4(2t)s \leqslant 4s^{3/2}$$

Et on en déduit que $s \geqslant \alpha n^{2/3}$ avec $\alpha = 4^{-2/3}$. Cela vaut pour toute partie S telle que $\mathrm{D(S)} = \mathrm{C}_n$ et on a donc bien prouvé que $\mu_n \geqslant \alpha n^{2/3}$. $\lhd$

4.52. Rotations de $\mathbb{R}^3$ laissant un réseau invariant

Soit (u, v, w) une base de $\mathbb{R}^3$ et $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ le réseau qu'elle engendre. Que peut-on dire d'une rotation r de $\mathbb{R}^3$ telle que $r(\Lambda) = \Lambda$?

(École normale supérieure)

▷ **Solution.**

Soit M la matrice de la famille $(r(u), r(v), r(w))$ dans la base (u, v, w) c'est-à-dire la matrice de r dans la base (u, v, w).

Supposons $r(\Lambda) = \Lambda$, *i.e.* $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w = \mathbb{Z}r(u) + \mathbb{Z}r(v) + \mathbb{Z}r(w)$. Comme $(r(u),\ r(v),\ r(w))$ appartiennent à Λ, M appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Comme $r(\Lambda)$ contient les trois vecteurs de la base (u, v, w), la famille $(r(u), r(v), r(w))$ est génératrice, donc M est inversible. Comme $r^{-1}(\Lambda) = \Lambda$, le même raisonnement s'applique à M^{-1} qui appartient donc à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. La matrice M est donc inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

Si réciproquement $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, on a $r(\Lambda) \subset \Lambda$, puisque M est à coefficients entiers et de même $r^{-1}(\Lambda) \subset \Lambda$, car M^{-1} est également à coefficients entiers. Ainsi, il faut et il suffit que $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ pour que la rotation r laisse le réseau globalement invariant.

On rappelle que les éléments de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ sont les matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1. La matrice M est la matrice de r dans la base (u, v, w). Si on appelle A la matrice de r dans la base canonique et P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w), on a donc $\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

La matrice M est semblable à A. On en déduit

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 1 + 2\cos\theta,$$

où θ est une mesure de l'angle de la rotation r. Comme $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, sa trace est entière, donc $2\cos\theta \in \mathbb{Z} \cap [\![-2, 2]\!]$, *i.e.* $\cos\theta \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0\}$. On trouve $\theta \in \left\{0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}\right\}$. On en déduit que $6\theta \equiv 2\pi \pmod{2\pi}$ et donc $\mathrm{A}^6 = \mathrm{I}_3$ et $\mathrm{M}^6 = \mathrm{I}_3$.

On peut démontrer réciproquement que si $\theta \in \left\{0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}\right\}$, il existe un réseau Λ de $\mathbb{R}^3$ et une rotation d'angle θ qui laisse Λ invariant. On suppose que l'espace est orienté.

Une rotation d'angle nul laisse invariant tout réseau.

Considérons le réseau engendré par une base orthonormale directe (u, v, w). La rotation r d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme u en u, v en w et w en $-v$. Elle laisse clairement invariant le réseau Λ. Les rotations r^2 et r^3 ont pour angles π et $-\frac{\pi}{2}$ et laissent invariant Λ.

Considérons un réseau engendré par (u, v, w), où les trois vecteurs sont de norme 1, $u \in \mathrm{Vect}(v, w)^{\perp}$ et (v, w) ont un angle de $\frac{\pi}{3}$ (le plan $\mathrm{Vect}(v, w)$ étant orienté par u). Soit r la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a $r(u) = u$, $r(v) = w$ et $r(w) = w - v$. Avec les notations précédentes, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et son déterminant vaut 1 donc M appartient à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Ainsi r laisse invariant le réseau. Il en est de même des rotations r^{-1}, r^2, r^{-2} qui ont pour angles $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. ◁

4.53. Un problème de Pólya (1918)

1. *Lemme de Blichfeldt.* Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ d'aire strictement supérieure à 1. Montrer que X contient deux points distincts u et v tels que $v - u$ soit dans $\mathbb{Z}^2$.

2. *Théorème de Minkowski.* Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ symétrique par rapport à 0 et d'aire strictement supérieure à 4. Montrer que C contient un point de $\mathbb{Z}^2$ distinct de l'origine.

3. *Le problème de Pólya.* Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère une forêt obtenue en plantant un arbre circulaire de rayon $r > 0$ en chaque point à coordonnées entières hormis l'origine. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_{N} la borne supérieure de l'ensemble des rayons $r > 0$ tels que l'on puisse voir au moins un point situé à une distance supérieure ou égale à N. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{N}^2}} \leqslant \rho_{\mathrm{N}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$.

(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Supposons par l'absurde que pour tout couple (u, v) de points distincts de X, le vecteur $v - u$ n'appartienne pas à $\mathbb{Z}^2$. Dans ce cas, si a et b sont des points distincts de $\mathbb{Z}^2$, les parties $\mathrm{X} - a$ et $\mathrm{X} - b$ sont disjointes. Notons K le carré $[0, 1[\times[0, 1[$. En notant $\mu(\mathrm{A})$ l'aire de la partie A, on a

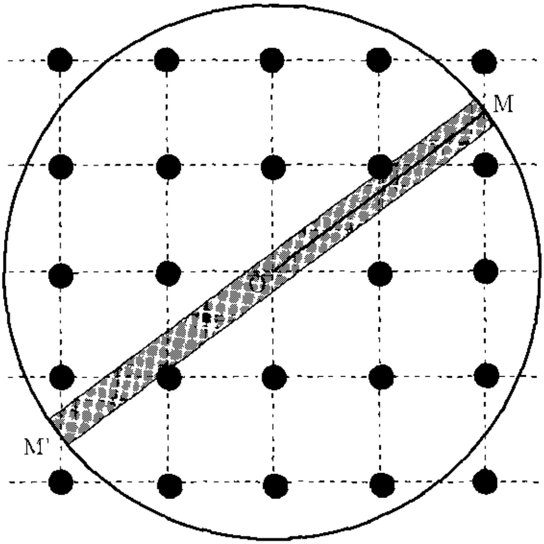
$$\mu(\mathrm{X}) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} \mu(\mathrm{X} \cap (a + \mathrm{K})) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} \mu((\mathrm{X} - a) \cap \mathrm{K}) \leqslant \mu(\mathrm{K}) = 1$$

car les translations conservent les aires et, comme on vient de le dire, les ensembles $\mathrm{X} - a$ sont deux à deux disjoints. Cela contredit l'hypothèse.

2. Notons C′ l'image de C par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. L'aire de C′ est strictement supérieure à 1. Par le lemme de Blichfeldt on peut trouver deux points distincts u, v de C′ tels que $v - u \in \mathbb{Z}^2$.

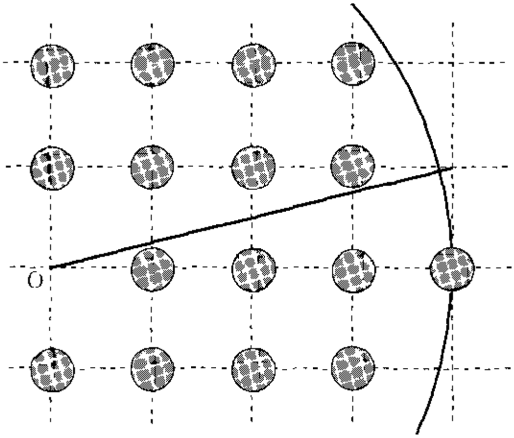
Par définition de C′, les points $2u$ et $2v$ sont dans C. Comme C est symétrique par rapport à l'origine, on a $-2v \in$ C. Enfin comme C est convexe, $u - v = \frac{1}{2}(2u - 2v)$ est dans C et dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. C'est le résultat demandé.

3. Soit $r > 0$ tel qu'il soit possible de voir au moins un point situé à une distance supérieure ou égale à N. En particulier, il existe un point M visible depuis l'origine et situé à une distance N. Le symétrique M′ de M par rapport à l'origine est également visible. Épaississons le segment [MM′] en un rectangle de largeur $2r$ et de longueur 2N comme le montre la figure ci-après.



Le fait que M est visible de O signifie que l'intérieur du rectangle ne contient aucun point de $\mathbb{Z}^2$ hormis $(0,0)$. Comme il s'agit d'un convexe symétrique par rapport à l'origine, la question précédente impose que son aire $4r$N soit inférieure ou égale à 4. Il en résulte que $r \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$. En passant à la borne supérieure on obtient donc la majoration $\rho_{\mathrm{N}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$.

Passons à la minoration. On va regarder quels sont les rayons r qui permettent de voir le point de coordonnées $(\mathrm{N}, 1)$ qui est à une distance $\sqrt{1+\mathrm{N}^2} > \mathrm{N}$.



Par symétrie, il suffit clairement que r soit inférieur à la distance du point $(1, 0)$ à la droite d'équation $y = \frac{x}{\mathrm{N}}$ · Cette distance vaut $\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{N}^2}}$, car la distance d'un point (x_0, y_0) à une droite d'équation $ax+by+c=0$ est $\frac{|ax_0+b_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ · D'où le résultat. $\triangleleft$

Le résultat de la question 2 de l'exercice précédent se généralise en dimension quelconque et c'est l'objet de l'exercice suivant. La démonstration est la même.

4.54. Théorème de Minkowski

Une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$ définit le réseau

$$\mathcal{R}(e_1, \ldots, e_p) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{Z}e_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i e_i,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On appelle maille du réseau l'ensemble $\mathcal{M}(e_1, \ldots, e_p)$ des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ tels que $x_i \in [0, 1[$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

1. Montrer que, pour tout réel $\rho > 0$, $\tau_\rho = \mathrm{B}(0, \rho) \cap \mathcal{R}(e_1, \ldots, e_p)$ est fini, où $\mathrm{B}(0, \rho)$ désigne la boule euclidienne de centre l'origine et de rayon ρ.

2. Montrer qu'il existe V_0 tel que tout convexe symétrique K de volume strictement supérieur à V_0 contienne un point du réseau autre que 0. On exprimera V_0 en fonction du volume de la maille.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

1. Le résultat est géométriquement évident : dans toute partie bornée de $\mathbb{R}^p$, il n'y a qu'un nombre fini de points du réseau. Mais justifions-le précisément. L'application $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \longmapsto \max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^p$. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes donc il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\max_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i| \leqslant \lambda\|x\|$. Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in \tau_\rho$. On a alors, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$|x_i| \leqslant \lambda\|x\| \leqslant \lambda\rho$$

et donc $x_i \in [\![-\mathrm{E}(\lambda\rho), \mathrm{E}(\lambda\rho)]\!]$, où E est la partie entière. Il y donc au plus $2\mathrm{E}(\lambda\rho) + 1$ valeurs de x_i et $(2\mathrm{E}(\lambda\rho) + 1)^p$ éléments dans τ_ρ.

2. On note μ le volume. Montrons que $\mathrm{V}_0 = 2^p\mu(\mathcal{M})$ convient, où $\mathcal{M}$ désigne la maille du réseau.

Soit K un convexe compact, symétrique de volume strictement supérieur à $2^p\mu(\mathcal{M})$. Notons K′ l'image de K par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{2}\cdot$ Le volume de K′ est strictement supérieur à $\mu(\mathcal{M})$. Montrons que K′ contient deux points distincts u et v, tels que $u - v \in \mathcal{R}$.

Les ensembles $\mathcal{M} + a$, où a décrit $\mathcal{R}$ forment une partition de $\mathbb{R}^p$. En effet, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \mathrm{E}(x_i))e_i + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}(x_i)e_i \in \mathcal{M} + a,$$

avec $a = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}(x_i)e_i \in \mathcal{R}$. Réciproquement, si $x \in \mathcal{M} + a$, où $a = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$ est élément de $\mathcal{R}$, on a, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $a_i = \mathrm{E}(x_i)$, ce qui montre l'unicité de a. On en déduit que

$$\mu(\mathrm{K}') = \sum_{a\in\mathcal{R}} \mu(\mathrm{K}' \cap (\mathcal{M} + a)) = \sum_{a\in\mathcal{R}} \mu((\mathrm{K}' - a) \cap \mathcal{M}),$$

car le volume est invariant par translation.

Supposons par l'absurde que pour tout couple (u, v) de points distincts de K′, le vecteur $u - v$ n'appartienne pas à $\mathcal{R}$. Dans ce cas, si a et b sont dans $\mathcal{R}$ et distincts, les parties $\mathrm{K}' - a$ et $\mathrm{K}' - b$ sont disjointes, puisque $\mathcal{R}$ est un groupe additif. On a alors

$$\mu(\mathrm{K}') = \mu\left(\left(\bigcup_{a\in\mathcal{R}} (\mathrm{K}' - a)\right) \cap \mathcal{M}\right) \leqslant \mu(\mathcal{M}),$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Si u et v sont deux éléments distincts de K′ tels que $u - v \in \mathcal{R}$, on écrit $u - v = \frac{1}{2}(2u - 2v)$. Alors $2u$ et $2v$ appartiennent à K par définition de K′, donc $-2v$ appartient à K, car K est symétrique et donc $u - v$ est dans K car K est convexe. Ainsi $u - v$ est un élément de $\mathcal{R}$ non nul et qui appartient à K ◁

4.55. Formule d'Euler

Soit P un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$. On note s le nombre de sommets, a le nombres d'arêtes et f le nombres de faces de P.

1. Montrer que l'on peut associer à P une figure plane comme suit : on choisit une face F de P et on représente à l'intérieur de F les arêtes et les sommets de P de façon à obtenir un pavage de F par des polygones convexes qui représentent les autres faces de P. Dans cette figure plane, deux arêtes ne se coupent pas et chaque sommet est commun à au moins trois arêtes. *Indication : utiliser une projection sur un plan à partir d'un point de l'espace bien choisi.*

2. Calculer de deux façons différentes la somme des angles de tous les polygones représentant les faces de P autres que F et en déduire la *formule d'Euler*

$$s - a + f = 2.$$

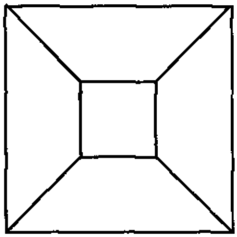
3. On suppose le polyèdre régulier ; chaque face possède α arêtes et chaque sommet est entouré de β faces. Montrer que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}.$$

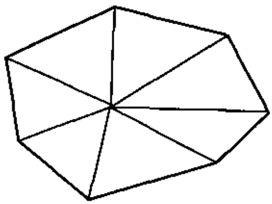
(**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

1. Le polyèdre P est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces $H_1, H_2, \ldots, H_f$ limités par les plans des faces, H_f étant limité par le plan Q contenant la face F. Considérons $P' = H_1 \cap \ldots \cap H_{f-1}$ et un point O appartenant à l'intérieur de $P' \setminus P$. Pour tout M de P, M et O sont de part et d'autre de Q. La droite (OM) coupe donc le plan Q en un unique point M′, qu'on note $p(M)$. Comme P′ est convexe, M′ appartient à P′. Puisque, de plus, M′ appartient à Q, M′ appartient à $P \cap Q = F$. L'application p réalise une bijection de $P \setminus \mathring{F}$ sur F. Les images des sommets de P sont des points. Les images des arêtes sont des segments. En effet l'image de l'arête [AB] est l'intersection du plan Q et de l'intérieur du triangle OAB. Chaque face est transformée en un polygone convexe. On obtient ainsi un pavage de F par des polygones convexes. Voici par exemple ce qu'on obtient dans le cas du cube :



2. La somme des angles d'un polygone convexe à $n \geqslant 3$ côtés est égale à $(n-2)\pi$, comme on le voit par exemple en triangulant le polygone en n triangles ayant tous un sommet commun.



La somme S de tous les angles des polygones pavant F est donc égale à $(a_1 - 2f_1)\pi$, où a_1 est le nombre total d'arêtes des polygones et f_1 le nombre de polygones. On a $f_1 = f - 1$, car chaque polygone correspond à une face de P distincte de F et $a_1 = 2a - a_2$, où a_2 est le nombre d'arêtes de F, car toute arête qui n'appartient pas à F appartient exactement à 2 polygones. On obtient $S = (2a - a_2 - 2f + 2)\pi$.

Pour calculer S, on peut aussi faire la somme des angles correspondant aux différents sommets des polygones. En appelant s_2 le nombre de sommets de F, on obtient $S = (s - s_2)2\pi + S_1$, où S_1 est la somme des angles de F et donc $S = (s - s_2)2\pi + (a_2 - 2)\pi = (2s - a_2 - 2)\pi$, puisque $s_2 = a_2$.

On en déduit $(2a - a_2 - 2f + 2)\pi = (2s - a_2 - 2)\pi$ et donc $s - a + f = 2$.

3. Chaque face possédant α arêtes, on obtient, en comptant le nombre total d'arêtes, $f\alpha = 2a$ car chaque arête appartient à deux faces. De même, chaque sommet est entouré de β faces. On en déduit que β arêtes aboutissent à chaque sommet, ce qui montre que $s\beta = 2a$, car chaque arête aboutit à deux sommets. En remplaçant dans la relation d'Euler, on obtient $\dfrac{2a}{\beta} - a + \dfrac{2a}{\alpha} = 2$, soit en divisant par $2a$, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2}$. ◁

Une face de P a au moins trois côtés donc $\alpha \geqslant 3$. De même en un sommet, on assemble au moins trois faces donc $\beta \geqslant 3$. On en déduit

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{6}$$

et donc $\alpha \leqslant 5$. On obtient ainsi $3 \leqslant \alpha \leqslant 5$ et de même $3 \leqslant \beta \leqslant 5$. L'un des deux entiers α, β doit être égal à 3, car sinon $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui est impossible car $a > 0$.

Chaque valeur du couple (α, β) vérifiant ces conditions correspond effectivement à un polyèdre régulier, qui est unique à une similitude près : le tétraèdre correspond à $(\alpha, \beta) = (3, 3)$, le cube à $(\alpha, \beta) = (4, 3)$, l'octaèdre à $(\alpha, \beta) = (3, 4)$, le dodécaèdre à $(\alpha, \beta) = (5, 3)$, l'icosaèdre à $(\alpha, \beta) = (3, 5)$.

Terminons par deux problèmes de pavage de rectangles. Le premier a été posé par De Bruijn en 1959 dans une revue hongroise.

4.56. Rectangles semi-entiers

> On dit qu'un rectangle est semi-entier si l'un au moins de ses côtés a pour longueur un nombre entier. Montrer que tout rectangle que l'on peut paver par des rectangles semi-entiers est semi-entier.
> (**École normale supérieure**)

▷ **Solution.**

Nous allons donner deux preuves, toutes les deux très jolies de ce résultat[2].

• Le plan est rapporté à un repère dont les axes sont parallèles aux côtés du grand rectangle. Il est sous-entendu que tous les rectangles du pavage ont leurs côtés parallèles aux axes. Étant donnés quatre réels a, b, c, d, considérons le rectangle R limité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = c$ et $y = d$. La solution tient en quelques lignes après la considération d'une intégrale double judicieuse. On a en effet, par la formule de Fubini,

$$\iint_{\mathrm{R}} e^{2\pi i(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b e^{2\pi i x} \mathrm{d}x \int_c^d e^{2\pi i y} \mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2} \left(e^{2\pi i b} - e^{2\pi i a}\right) \left(e^{2\pi i d} - e^{2\pi i c}\right)$$

et cette intégrale est nulle si, et seulement si, $b - a \in \mathbb{Z}$ ou $d - c \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire si, et seulement si, le rectangle R est semi-entier.

Par hypothèse, l'intégrale double de $e^{2\pi i(x+y)}$ sur chacun des rectangles du pavage est nulle. On en déduit que la somme de ces intégrales, qui est l'intégrale de $e^{2\pi i(x+y)}$ sur le grand rectangle, est nulle, donc que ce rectangle est semi-entier !

2. Il existe un grand nombre de preuves différentes mais il est toujours possible d'en trouver de nouvelles : voir par exemple celle publiée très récemment par François Xavier Vialard dans la RMS 116-3, p. 6-10.

• Voici une autre solution, complètement différente, et qui provient plutôt de la théorie des graphes même si on va éviter d'en parler. Elle illustre aussi la puissance des doubles sommations, mais dans une version discrète. On supposera sans perte de généralité que les sommets du rectangle sont $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ et (a,b). Le but est de prouver que a ou b est entier. Notons $\mathcal{R} = \{\mathrm{R}_1, \dots, \mathrm{R}_p\}$ l'ensemble des rectangles du pavage et $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de $\mathbb{Z}^2$ qui sont dans le rectangle $[0,a] \times [0,b]$. Pour $\mathrm{R}_i \in \mathcal{R}$ et $p = (x,y) \in \mathcal{S}$ on pose $\varepsilon(\mathrm{R}_i, p) = 1$ si p est un sommet de R_i et $\varepsilon(\mathrm{R}_i, p) = 0$ sinon. On s'intéresse à la somme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} \sum_{p \in \mathcal{S}} \varepsilon(\mathrm{R}_i, p) = \sum_{p \in \mathcal{S}} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon(\mathrm{R}_i, p).$$

Comme les rectangles R_i sont semi-entiers, la somme $\sum_{p \in \mathcal{S}} \varepsilon(\mathrm{R}_i, p)$ prend les valeurs 0, 2 ou 4, car elle compte le nombre de sommets à coordonnées entières de R_i. On en déduit que α est un entier pair. Regardons maintenant la seconde expression de α. Pour p fixé, $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon(\mathrm{R}_i, p)$ représente le nombre de rectangles du pavage dont p est un sommet. Ce nombre ne peut valoir que $0, 2$ ou 4 sauf si p est l'un des 4 sommets du grand rectangle, auquel cas il vaut 1. Comme α est pair, il y a un nombre pair de ces sommets qui sont dans $\mathbb{Z}^2$. Étant donné qu'il y a au moins le sommet $(0,0)$, on a un autre coin dans $\mathbb{Z}^2$ et cela prouve le résultat. ◁

Le résultat suivant a été prouvé pour la première fois par Dehn en 1903.

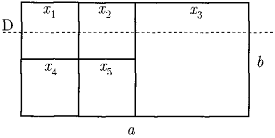
4.57. Pavage d'un rectangle par des carrés

Soit R un rectangle de côtés a et b. On suppose qu'on peut faire une partition de R en n carrés de côtés $x_1, \dots, x_n$. Montrer que les nombres $\frac{a}{b}$ et $\frac{x_i}{b}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ sont rationnels.

(**École polytechnique**)

▷ **Solution.**

Il est évidemment sous-entendu que les carrés du pavage ont leur côtés parallèles à ceux du rectangle R. On va traduire les hypothèses par un système linéaire à coefficients entiers vérifié par les x_i. Soit D une droite horizontale qui coupe R et telle que chaque carré du pavage traversé par D le soit dans son intérieur. Si $\mathrm{I_D}$ est l'ensemble des indices des carrés qui sont traversés par D on a l'équation $\sum_{i \in \mathrm{I_D}} x_i = a$. On considère le système linéaire (S_1) obtenu en prenant toutes les équations différentes ainsi obtenues lorsque la droite D varie. On procède de même avec des droites Δ verticales ce qui conduit à un second système d'équations de la forme $\sum_{i \in J_\Delta} x_i = b$ où J_Δ est une partie de $[\![1, n]\!]$. Notons (S) le système linéaire obtenu en juxtaposant (S_1) et (S_2) et en regardant $a = x_0$ et $b = x_{n+1}$ aussi comme des inconnues. Si X est le vecteur colonne de taille $n+2$ contenant $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ on a donc une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n+2}(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (et même dans $\{-1, 0, 1\}$) telle que $AX = 0$ (m est le nombre total d'équations obtenues). Voici un exemple très simple de pavage pour illustrer ce qui précède :



On obtient dans ce cas les équations suivantes :

$$(S) = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & a \\ x_4 + x_5 + x_3 & = & a \\ x_1 + x_4 & = & b \\ x_2 + x_5 & = & b \\ x_3 & = & b \end{array} \right.$$

et la matrice A est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'idéal serait d'obtenir une matrice de rang $n+1$. En effet, dans ce cas Ker A est une droite vectorielle et, comme A est à coefficients rationnels, on peut en trouver un vecteur directeur dans $\mathbb{Q}^{n+2}$. Comme X est colinéaire à ce vecteur on a le résultat : tous les quotients $\frac{x_i}{x_j}$ sont rationnels. Autrement dit, R est l'image par une homothétie d'un rectangle à côtés entiers pavé par des carrés à côtés entiers.

Cependant, notre petit exemple montre que ce n'est pas forcément vrai : notre matrice de taille $(5, 7)$ ne peut pas être de rang 6. En fait, on voit géométriquement qu'on a raté quelques équations importantes. On a ainsi forcément $x_1 = x_2$ et $x_4 = x_5$ en appliquant la même démarche qu'avant mais dans les sous-rectangles formés des carrés 1 et 2 d'une part et des carrés 4 et 5 d'autre part. On peut vérifier qu'en ajoutant ces équations (une seule suffirait) on a bien un système de rang 6.

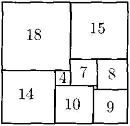
Dans le cas général, nous noterons désormais (S), non pas le système précédent, mais le système obtenu en écrivant toutes les égalités possibles entre deux sommes de x_i traduisant une égalité de distance entre deux segments verticaux ou horizontaux apparaissant dans le pavage. La solution particulière X vérifie la propriété suivante : $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ab = x_0 x_{n+1}$. Celle-ci traduit le fait que l'aire du rectangle est la somme des aires des carrés. Nous allons commencer par prouver qu'il en est de même pour toute autre solution $\mathrm{Y} = (y_0, \ldots, y_n)$ du système (S). Soit donc Y une telle solution. Pour tout réel t, le vecteur $\mathrm{X}' = \mathrm{X} + t\mathrm{Y}$ est encore solution du système. Nous choisissons t assez petit pour que les réels $x_i' = x_i + ty_i$ soient tous strictement positifs. Il est alors assez facile de se convaincre qu'il est possible de paver un rectangle de côté x_0' et x_{n+1}' à l'aide des n carrés de côtés $x_1', \ldots, x_n'$ en disposant ceux-ci de la même manière que dans le pavage d'origine de R. Cela provient de ce que les x_i' vérifient toutes les relations du système (S). On a donc, pour tout réel t assez petit,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2 = (x_0 + ty_0)(x_{n+1} + ty_{n+1}).$$

Cette égalité polynomiale valable sur un voisinage de 0 impose l'égalité des coefficients et en particulier le fait que $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y_0 y_{n+1}$. C'est ce que nous voulions prouver.

On en déduit que le système (S′) obtenu en ajoutant au système (S) : $\mathrm{AY} = 0$ l'équation $y_{n+1} = -y_0$ est de rang $n+2$ puisque l'égalité qu'on vient de démontrer prouve qu'une solution de (S′) est obligatoirement nulle. Il en résulte que (S) est au moins de rang $n+1$ et cela termine la preuve. $\lhd$

La réciproque est évidente : tout rectangle avec $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ peut être pavé par des carrés. En fait, comme dit plus haut dans la solution, on se ramène par homothétie à un rectangle à côtés entiers pour lequel c'est trivial. Il a alors été naturel de se demander si on pouvait trouver des pavages à l'aide de carrés de côtés deux à deux distincts (appelés pavages parfaits). Voici le premier exemple qui a été trouvé, par Moroń, en 1925. Il s'agit d'un rectangle 33×32 pavé par 9 carrés :



C'est le pavage parfait d'ordre minimal (l'ordre est le nombre de carrés utilisés, ici 9*). Depuis, de nombreux résultats ont été obtenus sur ce sujet. On sait ainsi que l'ordre minimal d'un carré parfait est* 21 *et qu'il est unique à symétrie près. Il a été trouvé avec l'aide d'un ordinateur par Duijvestijn en 1978. En fait, Sprague a montré en 1940 que tout rectangle de côtés* a, b *avec* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *admet un pavage parfait.*

Signalons pour conclure une autre approche du théorème de Dehn. Il est possible d'associer à un pavage un graphe planaire et le résultat découle alors assez rapidement du théorème de Kirchhoff sur les réseaux électriques[3]*.*

3. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article original dans lequel cette idée est apparue : R.L. BROOKS, C.A.B. SMITH, A.H. STONE, W.T TUTTE, The dissection of rectangles into squares. *Duke. Math. J.* 7 (1940).

Index

IMPRIMÉ EN GRANDE-BRETAGNE
PAR CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
DÉPÔT LÉGAL MARS 2008

Ce livre est le cinquième volume paru du recueil d'exercices résolus des oraux des Écoles normales supérieures et de l'École polytechnique, et le troisième et dernier tome d'algèbre.

Il est consacré à la théorie des espaces euclidiens et hermitiens, au groupe orthogonal, à la réduction des endomorphismes auto-adjoints, aux formes quadratiques, à la géométrie affine et à la géométrie euclidienne.

Il comporte 266 exercices, dont la solution est rédigée avec le soin et le souci d'exposer les idées et les démarches de raisonnement qui sont maintenant bien connus des lecteurs de la série. Comme dans les volumes précédents, la grande culture mathématique des auteurs leur permet de situer dans le contexte qui leur a donné naissance la plupart des énoncés, qui, à ce niveau sont presque toujours des résultats scientifiques dignes d'intérêt, et dont quelques-uns sont issus de recherches récentes.

Collection enseignement des mathématiques

ISBN 978-2-84225-092-8

Graphisme : Massin