m a t h
é
m
a
t
i
q
u
e
s

Bernard
Gostiaux

Exercices de mathématiques spéciales

Géométrie, géométrie différentielle

Tome 3

puf

Exercices de mathématiques spéciales

Tome 3

Géométrie, géométrie différentielle

COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

MP, MP*

nouveaux programmes

TOME 3

Géométrie, géométrie différentielle

BERNARD GOSTIAUX

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 048729 7
ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1re édition : 1997, septembre

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Avant-propos

C'est dans l'étude des questions de géométrie, différentielle ou non, que peut le mieux se développer le talent du mathématicien.

En effet, il lui faut analyser le problème posé, trouver la (ou les) meilleure approche, savoir faire intervenir de la topologie pour traiter des cas particuliers, de l'algèbre, (groupes de transformations par exemple), choisir un repère adapté, mobile le plus souvent, faire preuve d'imagination pour ne pas faire de calculs inutiles : en un mot mobiliser ses connaissances pour être le plus efficace possible, et maîtriser les données au lieu de les subir.

C'est ce que je me suis efforcé de faire ressortir au fil de ces exercices.

TABLE DES MATIÈRES

Tome 1. Algèbre

Tome 2. Topologie, Analyse

Tome 3. Géométrie, géométrie différentielle

Chapitre XII

Calcul différentiel

Il est bon de se rappeler qu'avoir f différentiable en x, élément d'un ouvert Ω de E, espace vectoriel normé, c'est trouver *u linéaire continue* de E dans l'espace vectoriel normé F où f prend ses valeurs, telle que :

$$f(x+h)-f(x)-u(h) = o(\|h\|).$$

On donne donc un accroissement h à la variable, on évalue l'accroissement de la fonction, et la partie linéaire en h de cet accroissement, que l'on supprime pour voir si ce qui reste est $o(\|h\|)$.

Voir en 12.9, 12.10, 12.14 ou 12.21, des exercices où ce point de vue global est payant.

Bien sûr, très souvent on considère des applications de Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et il faut alors se rappeler que :

pour f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de composantes $f_1, \ldots, f_p$, la différentiabilité équivaut à celle des f_j ;

et que pour f dépendant de n variables réelles, à valeurs réelles, on a :

1°) si f différentiable en a, chaque $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe ;

2°) mais l'existence des n dérivées partielles en a ne suffit pas. On conclut à la différentiabilité si de plus elles sont continues en a.

Voir en 12.5, 12.9, 12.15 ou 12.20 des exercices utilisant ces rappels.

Ne pas oublier non plus que, pour une fonction de plusieurs variables, la continuité partielle par rapport à chaque variable n'implique pas la continuité. Ceci conduit, pour une fonction de deux variables à passer en polaires en posant :

$$x = a + r\cos\theta \text{ et } y = b + r\sin\theta,$$

et à étudier la limite de $f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)-f(a,b)$, lorsque r tend vers 0, pour étudier la continuité de f en (a,b).

Pour trois variables, penser aux coordonnées sphériques.

Pour en revenir aux applications différentiables de Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on associe à $df(x)$ sa matrice jacobienne, matrice de $df(x)$ par rapport aux bases canoniques, qu'il faut savoir écrire. On a :

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} & & \\ & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \cdots\cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ & & \vdots & & \\ & & \frac{\partial f_p}{\partial x_j} & & \end{pmatrix} 2;$$

on dérive par rapport à la même variable en colonne ;

on dérive la même fonction composante en ligne. Voir 12.11, 12.12.

Un des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel est celui des *accroissements finis*, outil pour majorer en norme.

Certes, il a un caractère local, mais bien souvent, des raisonnements liés à la connexité, aux composantes connexes permettront de lui donner une envergure globale. Voir 12.6.

Ce théorème des accroissements finis conduit aussi aux formules (ou développements) de Taylor : essentiellement Taylor Young, un développement de Taylor Lagrange ne pouvant se formuler que si la fonction est à valeurs réelles.

Dans ce cas d'ailleurs on peut étudier les *problèmes d'extrema*. Si f est définie sur une partie A de $E \cong \mathbb{R}^n$:

1°) on recherche les points critiques dans l'intérieur de A ;

2°) on évalue la forme quadratique :

$$h \leadsto \phi(h) \text{ telle que } f(a+h) - f(a) = \phi(h) + o(\|h\|^2),$$

en a point critique, en sachant que :

- pour ϕ définie positive, il y a minimum local strict ;
- pour ϕ définie négative, il y a maximum local strict ;
- pour ϕ de signature (p, q) avec $pq \neq 0$: ni maximum, ni minimum ;
- pour ϕ positive non définie, il n'y a pas de maximum, mais on ne peut pas conclure de manière générale qu'il y a minimum, à cause du $o(\|h\|^2)$;
- pour ϕ négative non définie, il n'y a pas de minimum, mais là non plus, pas de conclusion générale quant à un éventuel maximum.

3°) Se rappeler que f peut aussi présenter un extremum en $a \in \mathring{A}$, point où $df(a)$ n'existe pas, ou en $a \in A \setminus \mathring{A}$. Il s'agit là de cas particuliers à examiner un à un.

Voir 12.3, 12.4, 12.18, 12.21, pour des exercices sur les extrema.

En ce qui concerne les questions *d'extrema liés*, ce qui revient bien souvent à étudier les extrema de la restriction de f à une partie K de l'espace, définie par une condition $g = 0$, on est conduit à examiner les points a où $df(a)$ et $dg(a)$ existent en étant proportionnelles, avec $dg(a)$ non nulle. Puis, on évalue la différence $f(a+h) - f(a)$, en utilisant l'égalité :

$$g(a+h) - g(a) = 0 = dg(a)(h) + \frac{d^2g(a)}{2}(h, h) + o(\|h\|^2),$$

traduisant l'appartenance de a et $a + h$ à K, pour évaluer un h_i en fonction des autres, et se ramener à l'étude d'une forme quadratique de $n - 1$ variables, (si $K \subset \mathbb{R}^n$).

Bien souvent, K étant compact, l'existence d'un maximum absolu atteint et d'un minimum absolu atteint évitent bien des calculs.

Enfin le flair, l'intuition, permettent parfois de concevoir sur K des trajets passant par a, tels que f présente un comportement différent lors d'une promenade suivant ces trajets, maximum dans un cas, minimum dans un autre, ce qui donne ni maximum, ni minimum en a.

Ne pas oublier non plus, les points de K où df, (ou dg) n'existe pas, ou bien ceux où $dg(a) = 0$.

En 12.2, 12.9, de tels exercices sont traités.

Pour conclure, il existe encore deux bijoux du calcul différentiel, qui sont les clés de l'étude des arcs paramétrés, des nappes et plus généralement des variétés : ce sont le théorème du *difféomorphisme local*, (voir exercices 12.1, 12.14) et celui des *fonctions implicites*, (voir 12.8, 12.13, 12.22).

Quelques remarques

Pour une fonction polynôme de plusieurs variables, à valeurs réelles, en développant $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n)$ et en ordonnant par rapport aux expressions homogènes en $h_1, \ldots, h_n$, on met en évidence le développement de Taylor en $x_1, \ldots, x_n$. Cela peut servir pour les extrema, voir 12.18.

Si le théorème des fonctions implicites ne donne pas explicitement les fonctions, on peut calculer les dérivées partielles, (voir 12.22).

Ne pas oublier l'*identité d'Euler* pour les fonctions homogènes f de degré r : on a $df(x)(x) = rf(x)$, cela peut toujours servir, (voir 12.23).

Les difféomorphismes θ, d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ sont des « *changements de variables* ». La recherche d'un tel difféomorphisme, adapté aux données, permet souvent de faciliter la résolution d'un problème, (voir 12.24).

Énoncés

12.1 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Montrer que f est un C^1 difféomorphisme.

12.2. Soit $\alpha > 0$, n dans $\mathbb{N}^*$, trouver la borne supérieure de l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$, avec $x_1 + \ldots + x_n = 1$, les x_i étant positifs ou nuls.

12.3. Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \mathbb{R}$, définie par :
$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz - y + z.$$

12.4. Extrema locaux et globaux de $f : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

12.5. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit f de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par $f(x, y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2 + y^2}$.

Condition pour que f admette un prolongement de classe C^0 à $\mathbb{R}^2$? De classe C^1 ?

12.6. Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est constante. On suppose que pour tout X de $\mathbb{R}^2$, la différentielle $df(X)$ est $\mathbb{C}$ linéaire, ($\mathbb{R}^2$ étant identifié à $\mathbb{C}$). Montrer que f est constante.

12.7. Quelles sont les applications de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$:
$$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) - f(x) \text{ ?}$$

12.8. La relation $xe^y + ye^x = 1$ définit-elle une fonction φ : $y = \varphi(x)$, au voisinage de 0, valant 1 en 0. Si oui, classe de φ, et développement de φ à l'ordre trois en 0.

12.9. On définit g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x, y) = \frac{(x^4 - y^2)^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } x^4 < y^2, \text{ et } g(x, y) = 0 \text{ sinon.}$$

Différentiabilité de g. Est-elle de classe C^1 ?

12.10. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach unitaire. Montrer que l'ensemble $\mathscr{U}$ des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ est un ouvert de $\mathscr{A}$ et que $f : a \rightsquigarrow a^{-1}$ est différentiable sur cet ouvert. Expression de la différentielle en a.

12.11. Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x, y) associe le couple $(f(x, y), 2xy)$.

Déterminer f de telle sorte que $d\varphi(x, y)$ soit une similitude.

12.12. Soit une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que l'application elle-même est une rotation.

12.13. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré n à coefficients complexes, ayant n racines distinctes, est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes complexes de degré n au plus.

12.14. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel normé. Étudier la différentiabilité de l'application $f : X \rightsquigarrow X^2 - I_n$.

En déduire que I_n et $-I_n$ sont isolés dans l'ensemble des symétries de $\mathbb{R}^n$.

12.15. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0, 0) = 0$ et :

$$\text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

a) Continuité et différentiabilité de f.

b) Pour (x_0, y_0) tel que f soit différentiable en (x_0, y_0), ou définit $L_{(x_0, y_0)}$, application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L_{(x_0, y_0)}(x, y) = \phi'(0), \text{ avec } \phi(t) = f(x_0 + tx, y_0 + ty), \ t \in \mathbb{R}.$$

Que dire de l'application $L_{(x_0, y_0)}$.

12.16. Soit $f : (x, y) \rightsquigarrow (x + a\sin y, y + b\sin x)$. Est-ce un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, ou de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

12.17. Soit a non nul et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, définie par :

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2ay, 2xy - 2ax).$$

a) Différentiabilité de f. Quel est le rang de $df(x, y)$, et éventuellement son noyau.

b) Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. A M_0 de C on associe la droite D_0, passant par M_0, de direction le noyau de $df(M_0)$. Quels sont les points de C tels que D_0 soit la tangente en M_0 à C.

12.18. Étude des extrema de $f : (x, y, z) \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

12.19. Extrema de la fonction $f : (x, y, z) \rightsquigarrow \cos x + \cos y + \cos z$ sur la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12.20. Étudier la différentiabilité de la norme, sur $\mathbb{R}^n$, successivement pour, (si $X = (x_1, \ldots, x_n)$) :

$$\|X\|_\infty = \sup\{|x_i| \ ; 1 \leqslant i \leqslant n\} \ ;$$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ ;$$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

12.21. Soit une matrice A symétrique réelle d'ordre n, définie positive. On l'écrit sous forme d'une matrice bloc :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & {}^t B \\ \hline B & M \end{array}\right),$$ avec a réel, B matrice colonne d'ordre $n-1$ et M matrice symétrique d'ordre $n-1$.

Pour X matrice colonne d'ordre $n-1$, considérée comme un élément de $\mathbb{R}^{n-1}$, on définit f par :

$$f(\mathrm{X}) = (1\,|\,{}^t\mathrm{X})\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\ \overline{\mathrm{X}}\end{pmatrix},$$

avec $\begin{pmatrix}1\\ \overline{\mathrm{X}}\end{pmatrix}$ matrice colonne d'ordre n.

Extrema de f.

12.22. À quelle condition le système :

$$\begin{cases} xu^2 + v = y^3, \\ 2yu - xv^3 = 4x, \end{cases}$$

définit-il deux applications u et v, fonctions de x et y ?

Calcul des dérivées partielles de ces fonctions.

12.23. Soit f fonction homogène de degré 2, de classe C^2 de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$x^2 f''_{x^2} + 2xy\, f''_{yx} + y^2 f''_{y^2}.$$

12.24. Trouver f, fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, avec $ab \neq 0$, on ait :

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Solutions

12.1. On doit d'abord justifier l'aspect bijectif de f. L'injectivité s'obtient facilement car $f(x) = f(y)$ donne $\|x-y\| \leqslant 0$ d'où $x = y$.

La surjectivité s'obtiendra sans doute localement par le difféomorphisme local, puis globalement par « connexité ».

Justifions l'emploi du difféomorphisme local en justifiant le côté bijectif de $df(x)$, linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, donc l'injectivité suffira.

Or, si $df(x)(u) = 0$, avec $u \neq 0$, la relation

$$\begin{aligned} f(x+tu)-f(x) &= df(x)(tu)+o(\|tu\|) \\ &= t\, df(x)(u)+o(\|tu\|) = o(\|tu\|) \end{aligned}$$

donne

$\|f(x+tu)-f(x)\| = o(\|tu\|)$, qui devrait être supérieur à $\|tu\|$: il est difficile, pour $t \neq 0$ d'avoir $\dfrac{\|f(x+tu)-f(x)\|}{\|tu\|}$ qui reste supérieur à 1, et qui tend vers 0 si t tend vers 0. Donc $df(x)(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Donc, en chaque x de $\mathbb{R}^n$, $df(x)$ est bijective : il existe un voisinage ouvert V de x et un W de $f(x)$ tel que f réalise un C^1 difféomorphisme de V sur W.

Soit alors $\Omega = f(\mathbb{R}^n)$: c'est une *partie non vide* de $\mathbb{R}^n$, *ouverte*, car si $y_0 \in \Omega$, avec x_0 tel que $f(x_0) = y_0$ et le difféomorphisme local en x_0, on a un voisinage W de y_0 contenu dans Ω.

Puis Ω *est un fermé* de $\mathbb{R}^n$, car si $\ell \in \overline{\Omega}$, et si $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers ℓ, d'éléments de Ω, cette suite est de Cauchy et l'inégalité $\|x_p - x_q\| \leqslant \|f(x_p)-f(x_q)\|$ montre que la suite des $x_p = f^{-1}(y_p)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ complet, donc convergente, vers a. Mais la continuité de f donne alors $f(a) = f(\lim\limits_{p \to +\infty} x_p) = \lim\limits_{p \to +\infty} f(x_p) = \ell$ donc $\ell \in \Omega$.

Mais dans $\mathbb{R}^n$ connexe, Ω ouvert, fermé non vide est égal à $\mathbb{R}^n$, d'où f *surjective.*

On a bien f bijective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, avec, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $df(x)$ inversible et $x \rightsquigarrow df(x)$ continue, alors, pour tout y de $\mathbb{R}^n$, $df^{-1}(y)$ existe, et $df^{-1}(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$ ce qui permet de décomposer df^{-1} en applications continues : on a un C^1 difféomorphisme.

12.2. D'abord $x_i^\alpha = e^{\alpha \ln x_i}$ n'est défini que pour $x_i > 0$, et tend vers 0 si x_i tend vers 0^+, $(\alpha > 0)$, on peut par continuité poser $0^\alpha = 0$.

L'ensemble $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \, ; \, \forall i, x_i \geqslant 0, x_1 + \ldots + x_n = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, (avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\theta_i : x \rightsquigarrow x_i$ et $d : x \rightsquigarrow x_1 + \ldots + x_n$ sont continues et $K = \left(\prod_{i=1}^{n} \theta_i^{-1}([0, +\infty[)\right) \cap s^{-1}(\{1\})$).

De plus K est borné, $(\forall i, 0 \leqslant x_i \leqslant 1)$, donc K est compact et sur ce compact, la fonction continue $f : x \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha$ est bornée et atteint ses bornes.

Posons $g(x) = x_1 + \ldots + x_n$. Les fonctions f et g sont C^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$, donc en un point où tous les x_i sont > 0, il ne peut y avoir extremum que si $df(x)$ et $dg(x)$ sont proportionnelles, donc que si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha x_i^{\alpha - 1}$ est constante en x_i, ce qui n'est possible que si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

Dans ce cas $f\left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right) = n^{1-\alpha}$.

Sur $K - \mathring{K}$, si un (et un seul) x_i est nul, et si l'on reste sur le bord, on peut supposer (symétrie des rôles) que $x_n = 0$, on est donc ramené au maximum de $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^\alpha$ avec $x_1 + \ldots + x_{n-1} = 1$, et on a un point critique avec $f\left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0\right) = (n-1)^{1-\alpha}$. Pour deux x_i nuls, ($x_{n-1} = x_{n-2} = 0$ par exemple), on obtiendra $(n-2)^{1-\alpha}$ atteint en $\left(\frac{1}{n-2}, \frac{1}{n-2}, \ldots, \frac{1}{n-2}, 0, 0\right)$ en particulier.

Conséquence. Pour $\alpha < 1$, le maximum est atteint en $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, et vaut $n^{1-\alpha}$, (et le minimum vaut 1, atteint en chaque point du type $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$).

Pour $\alpha = 1$, la fonction f est constante et vaut 1.

Pour $\alpha > 1$, le maximum vaut 1, il est atteint en chaque point du type $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, et le minimum, $n^{1-\alpha}$ avec $1-\alpha < 0$ ici, est atteint en $\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

12.3. Un tel exercice ne sert qu'à tester les connaissances. La fonction f est C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, donc des extrema locaux ne peuvent se présenter qu'en des points critiques.

On a $\frac{\partial f}{\partial x} = x + yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 1$.

Un point critique impose $x \neq 0$, d'où $y = -\frac{1}{x}$, $z = \frac{1}{x}$ et $x - \frac{1}{x^2} = 0$: seule solution réelle $x = 1$, d'où un seul point critique $a = (1, -1, 1)$.

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) = 1$, d'où, pour un accroissement $u = (h, k, l)$ de la variable, $f(a+u) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a)(u, u) + o(\|u\|^2)$, avec :

$$\begin{aligned} d^2f(a)(u,u) &= h^2+2hk-2hl+2kl \\ &= (h+k-l)^2-(k-l)^2+2kl \\ &= (h-k-l)^2-(k-2l)^2+3l^2 \end{aligned}$$

La signature de la forme quadratique étant $(2,1)$, il n'y a finalement aucun extremum local.

12.4. La fonction f étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, ses extrema ne peuvent être atteints qu'en des points critiques.

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-8(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3+8(x-y)$, d'où, (x,y) coordonnées d'un point critique si et seulement si :

$$\begin{cases} 4(x^3+y^3) = 0 \\ 4x^3-8(x-y) = 0, \end{cases}$$

ou encore, si avec $y = -x$, on a $\quad 4x^3-16x = 4x(x^2-4) = 0$.

Les points critiques sont donc $a : (0,0)$; $b : (2,-2)$ et $c : (-2,2)$.

On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2-8$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2-8$.

En notant r, s et t les valeurs prises par ces dérivées secondes en un point critique, la discussion porte sur la forme quadratique

$rh^2+2shk+tk^2$, (où (h,k) est un accroissement des variables).

En $a = (0,0)$, $rt-s^2 = 64-64 = 0$:

on ne peut pas conclure *a priori*, mais un examen direct montre que $f(0,0) = 0$, et que pour $x \neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > f(0,0)$; alors que $f(x,-x) = 2x^4-16x^2 = -16x^2\left(1-\dfrac{x^2}{8}\right)$, ce qui est localement négatif : dans tout voisinage de $(0,0)$ assez petit, f prend des valeurs supérieures et inférieures à $f(0,0)$: pas d'extrema.

En $b = (2,-2)$, on a $r = 40 = t$, $s = 8$ donc $rt-s^2 = 1\,536 > 0$, avec r et t positifs, la forme quadratique $\frac{1}{2}d^2f(b)(h,k)$ est définie positive, *il y a donc minimum local strict en* $(2, -2)$ *; mais aussi en* $(-2, 2)$ car $f(-x, -y) = f(x, y)$.

Il s'agit d'un minimum global, car, en passant en polaires, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a :

$$f(x, y) = \varphi(r, \theta) = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4r^2(\cos\theta - \sin\theta)^2$$
$$= r^4\left[(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - \frac{4}{r^2}(\cos\theta - \sin\theta)^2\right],$$

et l'expression $\cos^4\theta + \sin^4\theta$ étant minorée par une constante > 0 sur $[0, 2\pi]$, (continue, ne s'annule pas, sur un compact), on a $\lim\limits_{r \to +\infty} \varphi(r, \theta) = +\infty$, ceci uniformément en θ : il existe r_0 tel que $r \geqslant r_0 \Rightarrow \varphi(r, \theta) \geqslant 0$.

Comme $f(2, -2) = -32$, on a $r_0 > 2\sqrt{2}$, et, sur le compact $K = \left\{(x, y)\ ;\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant r_0\right\}$, la fonction continue f atteint un minimum absolu, (et un maximum absolu).

Comme sur le bord de K, on a $f(x, y) \geqslant 0$, et que $f(2, -2) < 0$, le minimum absolu de $f|_K$ est atteint dans l'intérieur de K, donc en un point critique de $f|_K$, donc de f : c'est en b ou c.

On a $f(c) = f(b) \leqslant f(m)$, pour tout m de K, mais aussi pour tout m hors de K puisqu'alors $f(m) \geqslant 0$. Finalement on a un minimum absolu atteint en b et en c.

12.5. La fonction f est de classe C^∞ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Pour son prolongement en $(0, 0)$, un passage en polaires s'impose, et avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$, on a :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^{p+q}}{r^2}(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q.$$

On a donc, si $p + q > 2$, (soit $p + q \geqslant 3$ car on a des entiers),

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

Si $p+q = 2$, $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\cos\theta)^p(\sin\theta)^q$ n'a pas de limite si r tend vers 0, cette expression n'étant pas constante en θ.

Enfin, pour $p+q<2$, $\lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{r^{p+q}}{r^2} = +\infty$, avec, pour θ dans $]0, \pi[$, une expression non nulle (et non constante si $p \neq 0$ et $q \neq 0$) de $(\cos\theta)^p\ (\sin\theta)^q$, donc pas de prolongement possible par continuité.

Finalement, f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ si et seulement si $p+q \geqslant 3$, avec $f(0, 0) = 0$.

Un prolongement de classe C^1 exige l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$ et leur continuité, mais *a fortiori* on aura $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\partial f(x, 0)}{\partial x}$ qui existera et qui sera $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, idem pour les dérivées en y), donc on est d'abord ramené à trouver p et q tels que les dérivées partielles soient prolongeables en $(0, 0)$.

On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^q}{(x^2+y^2)^2}(px^{p-1}(x^2+y^2) - 2x^{p+1})$$
$$= \frac{y^q x^{p-1}((p-2)x^2 + py^2)}{(x^2+y^2)^2}, \text{ et :}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^p y^{q-1}(qx^2 + (q-2)y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

et l'utilisation des coordonnées polaires, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{r^{p+q+1}}{r^4}\cos^p\theta\sin^{q-1}\theta(p - 2\cos^2\theta)$, et comme précédemment, on conclut à un prolongement par continuité, nul, si et seulement si $p+q+1 > 4$, soit si et seulement si $p+q \geqslant 4$.

Il en est de même pour la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, d'où f de classe C^1 si et seulement si $p+q \geqslant 4$.

12.6. Posons $f(x, y) = g(x, y) + ih(x, y)$, avec les fonctions g et h à valeurs réelles, et g étant constante.

L'identification de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée et (ou) au départ, permet d'écrire avec (u, v) élément de $\mathbb{R}^2$ identifié à $U = u + iv$:

$$df(x, y)(u, v) = g'_x u + g'_y v + i(h'_x u + h'_y v) = \theta(U),$$

et cette application θ est supposé linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Comme g est constante, $\theta(U) = i(h'_x u + h'_y v)$, donc θ est à valeurs imaginaires pures.

Comme la $\mathbb{C}$ linéarité donne $\theta(iU) = i\theta(U)$, le complexe $\theta(iU)$ doit être imaginaire pur, tout en étant réel : il est nul, et comme iU parcourt $\mathbb{C}$ si U parcourt $\mathbb{C}$, on obtient θ identiquement nulle, d'où $h'_x = h'_y = 0$ et finalement h, de $\mathbb{R}^2$ connexe, dans $\mathbb{R}$, ayant sa différentielle nulle, est constante. Je le rejustifie rapidement.

On considère $\Omega = \{(u, v) ; h(u, v) = h(a, b)\}$ avec (a, b) fixé, $\Omega = h^{-1}(\{h(a, b)\})$ est fermé de $\mathbb{R}^2$ car h est continue, puis si $(u_0, v_0) \in \Omega$, avec $r > 0$ quelconque ici, si $(u, v) \in \mathscr{B}_0((u_0, v_0), r)$, par accroissements finis avec $|||dh(u', v')||| = 0$ sur $\mathscr{B}_0((u_0, v_0), r)$, donc $|||dh(u', v')||| \leqslant \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ quelconque, on a :

$$\|h(u, v) - h(u_0, v_0)\| \leqslant \varepsilon \|(u, v) - (u_0, v_0)\|,$$

et comme ε est quelconque on a $\|h(u, v) - h(u_0, v_0)\| \leqslant 0$, donc nul : la fonction h est constante, égale à $h(u_0, v_0) = h(a, b)$ sur $\mathscr{B}_0((u_0, v_0), r)$.

La boule ouverte de centre (u_0, v_0) de rayon r étant dans Ω, cet ensemble est ouvert et fermé non vide dans $\mathbb{R}^2$ connexe : c'est $\mathbb{R}^2$.

La fonction f ayant ses parties réelles et imaginaires constantes est constante.

12.7. L'image d'un quotient doit être la différence des images : il n'y aurait rien d'étonnant à trouver des logarithmes !

On peut d'abord constater, $(x = y = 1)$ que $f(1) = f(1) - f(1) = 0$; puis, $(y = 1)$ que $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - f(x)$. On en déduit que :

$f(xy) = f\left(\frac{y}{1/x}\right) = f(y) - f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) + f(x)$, et on se retrouve en pays de connaissance.

En dérivant la relation $f(xy) = f(y) + f(x)$ par rapport à y, on obtient :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ xf'(x, y) = f'(y),$$

d'où, avec $y = 1$:

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x}.$$

Avec $k = f'(1) = 0$, on obtient $f(x) = \text{constante} = a$, mais, (on a dérivé : il faut vérifier), a doit vérifier $a = a - a$, donc la fonction nulle est solution.

Si $k \neq 0$, on obtient $f(x) = k\ln x + a$, et la relation de départ n'est alors vérifiée que pour $a = 0$. Les solutions sont donc les fonctions $x \leadsto k\ln x$, $k \in \mathbb{R}$.

12.8. Si on pose $f(x, y) = xe^y + ye^x - 1$, la fonction f est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et par le théorème des fonctions implicites, si $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \neq 0$, l'égalité $f(x, y) = 0$ sera localement équivalente à $y = \varphi(x)$ avec φ fonction de classe C^∞ vérifiant $\varphi(0) = 1$.

On a $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^x$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1$: le théorème s'applique.

Pour trouver le développement limité d'ordre trois de φ en 0, qui existe (à tout ordre en fait) car φ est C^∞, on peut :

soit poser $\varphi(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$, et, en remplaçant φ par cette expression dans l'identité :

① $\quad xe^{\varphi(x)} + \varphi(x)e^x - 1 = 0,$

obtenir a_1, a_2, a_3 en prenant le développement limité de ① ;

soit dériver ① trois fois pour calculer $\varphi'(0), \varphi''(0), \varphi'''(0)$.

Appliquons la deuxième méthode.

On a :

② $$e^{\varphi(x)} + x\varphi'(x)e^{\varphi(x)} + \varphi'(x)e^{x} + \varphi(x)e^{x} = 0,$$

d'où, avec $x = 0$ et $\varphi(0) = 1$:

$$e + \varphi'(0) + 1 = 0, \text{ d'où } \boxed{\varphi'(0) = -(1+e)}.$$

On dérive ②, en regroupant on obtient :

③ $2\varphi'e^{\varphi} + x\varphi''e^{\varphi} + x\varphi'^2e^{\varphi} + \varphi''e^{x} + 2\varphi'e^{x} + \varphi e^{x} = 0$, et , avec $x = 0$, il vient :

$$-2(1+e)e + \varphi''(0) - 2(1+e) + 1 = 0,$$

donc $\boxed{\varphi''(0) = 2e^2 + 4e + 1}$.

Une dernière dérivation donne :

④ $$3\varphi''e^{\varphi} + 3\varphi'^2e^{\varphi} + x\varphi'''e^{\varphi} + 3x\varphi'\varphi''e^{\varphi} + x\varphi'^3e^{\varphi} + \varphi'''e^{x} + 3\varphi''e^{x} + 3\varphi'e^{x} + \varphi e^{x} = 0,$$

d'où :

$$3\varphi''(0)e + 3e(\varphi'(0))^2 + \varphi'''(0) + 3\varphi''(0) + 3\varphi'(0) + \varphi(0) = 0$$

soit encore :

$$6e^3 + 12e^2 + 3e + 3e(1 + 2e + e^2) + \varphi'''(0) + 6e^2 + 12e + 3 - 3 - 3e + 1 = 0,$$

donc :

$$\varphi'''(0) = -9e^3 - 24e^2 - 15e - 1.$$

Le développement cherché (formule de Taylor Young) est donc, sauf erreur :

$$\varphi(x) = 1 - (1+e)x + \left(e^2 + 2e + \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{3}{2}e^3 + 4e^2 + \frac{5}{2}e + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3).$$

Je pense que l'autre méthode aurait été plus courte !

12.9. Sur les ouverts $\Omega = \{(x,y)\ ;\ x^4 < y^2\}$ et $\Omega' = \{(x,y)\ ;\ x^4 > y^2\}$, la fonction g est de classe C^∞, vu sa définition, $x^2 + y^2$ ne s'annulant pas sur Ω.

Il faut donc considérer ce qui se passe en un point de la frontière commune de Ω et Ω', donc en un point du type (a, a^2) ou $(a, -a^2)$. La parité de la fonction en y permet de se contenter du cas (a, a^2), et la parité en x permet de supposer de plus $a \geqslant 0$.

Existence de $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a^2)$.

On forme $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(a+h, a^2) - g(a, a^2)}{h}$, et, vu la définition de g, il faudra distinguer $h > 0$ et $h < 0$.

On suppose d'abord $a > 0$.

Pour $h > 0$, $a + h > a$ donc $(a+h)^4 > (a^2)^2$: on a $g(a+h, a^2) = 0$, et aussi $g(a, a^2) = 0$: le quotient est nul donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{g(a+h, a^2) - g(a, a^2)}{h} = 0.$$

Pour $-a < h < 0$, on aura $0 < a + h < a$, donc $(a+h)^4 < (a^2)^2$ et $g(a+h, a^2) = \frac{((a+h)^4 - a^4)^2}{(a+h)^2 + a^4}$.

Comme $g(a, a^2) = 0$, le rapport est équivalent à $\frac{(4ha^3)^2}{h(a^4 + a^2)}$, d'où

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{g(a+h, a^2) - g(a, a^2)}{h} = 0$: *on a existence (et nullité) de* $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a^2)$.

Pour $a = 0$, on a $g(0, 0) = 0$, et si $h \neq 0$, $h^4 > 0$, donc $g(h, 0) = 0$: le rapport $\frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h}$ étant nul *on a encore* $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Existence de $\frac{\partial g}{\partial y}(a, a^2)$.

On pose, pour $k \neq 0$, $u(k) = \frac{g(a, a^2 + k) - g(a, a^2)}{k}$.

Pour $a > 0$, si $k > 0$, alors $(a^2+k)^2 > a^4$, donc :

$$u(k) = \frac{1}{k} \cdot \frac{(a^4-(a^2+k)^2)^2}{a^2+(a^2+k)^2},$$

ce qui équivaut, si k tend vers 0^+, à $\frac{4a^4k}{a^2+a^4}$, donc $\lim\limits_{k \to 0^+} u(k) = 0$.

Toujours avec $a > 0$, si $k < 0$, (mais $k > -a^2$), on aura $0 < a^2+k < a^2$ donc $(a^2+k)^2 < a^4$ et dans ce cas $g(a, a^2+k) = 0$, $u(k)$ est nul et tend vers 0.

Donc $\frac{\partial g}{\partial y}(a, a^2) = 0$, *pour* $a > 0$.

Si $a = 0$, $g(0, k) = \frac{k^4}{k^2} = k^2$ et $u(k) = k$, ce qui tend vers 0, donc $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Finalement, en tout point $(a, \pm a^2)$ *de* $Fr(\Omega)$, *les dérivées partielles de g existent et sont nulles.*

Pour justifier la différentiabilité de g, il faut alors voir si :

$$g(a+h, a^2+k) - g(a, a^2) - 0 \cdot h - 0 \cdot k \text{ est } o(\|(h, k)\|).$$

Si $(a+h, a^2+k)$ est dans $\overline{\Omega}'$, le premier membre est nul : c'est vérifié. On suppose donc (h, k) tel que $(a+h)^4 < (a^2+k)^2$.

Le premier membre vaut alors :

$$v(h, k) = \frac{((a+h)^4-(a^2+k)^2)^2}{(a+h)^2+(a^2+k)^2}.$$

Pour a non nul, on a $v(h, k)$ équivaut à $\frac{(4a^3h-2a^2k+o((h, k)))^2}{a^2+a^4}$

C'est donc de l'ordre de grandeur de $\|(h, k)\|^2$, donc *a fortiori* $o(\|(h, k)\|)$.

Pour le « voir » mieux, on peut passer en polaires et poser $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$, d'où, avec la norme enclidienne, $\|(h, k)\| = r$, (supposé >0, et, par développement limité, si r tend vers 0, $v(r\cos\theta, r\sin\theta)$ qui se comporte comme :

$$\frac{r^2(4a^3\cos\theta - 2a^2\sin\theta)^2}{a^2+a^4},$$

lorsque r tend vers 0 : c'est bien $o(r)$.

Pour $a = 0$, et un couple (h, k) tel que $h^4 < k^2$, on a :

$g(h, k) - g(0, 0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k = v(h, k) = \dfrac{(h^4 - k^2)^2}{h^2+k^2}$, ce qui, en polaires, s'écrit : $\dfrac{r^4}{r^2}(r^2\cos^4\theta - \sin^2\theta)^2$, et c'est bien $o(r)$.

Finalement la fonction g est différentiable partout, de différentielle nulle sur la frontière de Ω, et sur Ω', donc sur $\overline{\Omega}'$.

<u>*Est-elle de classe* C^1 ?</u>

Sur l'ouvert Ω, les dérivées partielles contiennent $x^4 - y^2$ en facteur. Donc si (x, y) tend vers (a, a^2), (ou vers $(a, -a^2)$), avec $a \neq 0$, les dérivées partielles tendent vers 0, valeur commune de $g'_x(a, a^2)$ et $g'_y(a, a^2)$: il y a continuité des dérivées partielles, puisque sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$, $g'_x \equiv g'_y \equiv 0$.

Pour $a = 0$, comme x^2+y^2 tend vers 0, il faut y regarder de plus près.

On a, dans Ω, $g'_x = \dfrac{8x^3(x^4-y^2)}{x^2+y^2} - \dfrac{2x(x^4-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$, et, en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a :

$$g'_x = \frac{8r^5}{r^2}(r^2\cos^4\theta - \sin^2\theta) - \frac{2r^5}{r^4}(r^2\cos^4\theta - \sin^2\theta)^2 :$$

on a bien une limite nulle si r tend vers 0.

$$\text{De même } g'_y = \frac{-4y(x^4-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^4-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= -\frac{4r^3}{r^2}(r^2\cos^4\theta - \sin^2\theta) - \frac{2r^5}{r^4}(r^2\cos^4\theta - \sin^2\theta)^2,$$

expression qui montre bien que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} g'_y(x,y) = 0 = g'_y(0,0)$.

Finalement, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

12.10. Une algèbre est un espace vectoriel muni également d'une structure d'anneau supposé ici unitaire. Soit e l'élément neutre.

L'algèbre est dite de Banach si elle est d'abord normée, avec en plus $\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$, pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathscr{A}$, et si pour cette norme on a un espace vectoriel normé complet.

Si par exemple E est un espace vectoriel normé, de Banach, l'algèbre $\mathscr{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{E})$, pour la norme d'application linéaire continue, est une algèbre de Banach unitaire.

Venons en à l'exercice.

D'abord $\mathscr{U}$ est non vide : il contient l'élément unité, e. Puis, pour a inversible et h de norme petite, on veut prouver que $a + h$ est inversible, ou, ce qui revient au même, que $a(e + a^{-1}h)$ est inversible.

Mais là, un peu de culture permet de savoir que, si $\|u\| < 1$, la série des $(-1)^n u^n$ est absolument convergente, (car $\|(-u)\|^n \leqslant (\|u\|)^n$: la série réelle majorante, est géométrique convergente). Comme $\mathscr{A}$ est complet, cette convergence absolue implique la convergence : on note v la somme de cette série.

Enfin, l'identité $(e+u)\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(-u)^k\right) = e + (-1)^n u^{n+1}$, jointe à la continuité du produit, (bilinéaire et 1. Lipschitzien), donne à la limite l'égalité $(e+u)v = e$, car u^{n+1} tend vers 0 en tant que terme général d'une série convergente.

On aurait de même $v(e+u) = e$, donc l'inverse de $e+u$ existe bien et c'est $v = \sum_{k=0}^{+\infty} (-u)^k$.

Revenons alors à a inversible. Si h dans l'algèbre est tel que $\|h\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, *a fortiori* on a $\|a^{-1}h\| < 1$, donc $(e+a^{-1}h)$ est inversible, ainsi que $a(e+a^{-1}h) = a+h$, et on a :

$$\begin{aligned}(a+h)^{-1} &= (a(e+a^{-1}h))^{-1} = (e+a^{-1}h)^{-1}a^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-a^{-1}h)^k a^{-1}\end{aligned}$$

On a déjà $\mathscr{U}$ ouvert, car si $a \in \mathscr{U}$, la boule ouverte de centre a et de rayon $\dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$ est dans $\mathscr{U}$.

Posons alors $f(a) = a^{-1}$, et, pour h tel que $a+h \in \mathscr{U}$, on considère l'accroissement :

$$f(a+h)-f(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-a^{-1}h)^k a^{-1} - a^{-1},$$

pour chercher la partie linéaire en h dans cette expression.

Les deux premiers termes de la série sont a^{-1} et $-a^{-1}ha^{-1}$, on a donc :

$$f(a+h)-f(a) = -a^{-1}ha^{-1} + \sum_{k\geqslant 2} (-a^{-1}h)^k a^{-1}.$$

Or $$\begin{aligned}\|(-a^{-1}h)^k a^{-1}\| &\leqslant \|h\|^k \|a^{-1}\|^{k+1} \\ &\leqslant \|h\|^2 \|a^{-1}\|^3 \cdot (\|h\|\|a^{-1}\|)^{k-2}.\end{aligned}$$

On impose alors à h de vérifier $\|h\|\|a^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}$ par exemple, et en posant $df(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}$, ce qui dépend bien linéairement et continuement de h, (continuement car $\|df(a)(h)\| \leqslant \|a^{-1}\|^2 \cdot \|h\|$), on a :

$$\| f(a+h) - f(a) - df(a)(h) \| \leqslant \|h\|^2 \|a^{-1}\|^3 \cdot \sum_{k \geqslant 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$
$$\leqslant 2\|a^{-1}\|^3 \|h\|^2,$$

c'est que $f(a+h) - f(a) - df(a)(h)$ est bien $o(\|h\|)$: c'est gagné. L'application f est différentiable et $df(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}$.

12.11. La matrice jacobienne de φ est :

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

C'est une similitude de rapport $k(x, y)$ et d'angle $\theta(x, y)$, (donc la composée d'une homothétie et d'une rotation), si et seulement si elle est du type :

$$J_\varphi(x, y) = k(x, y)\begin{pmatrix} \cos\theta(x, y) & -\sin\theta(x, y) \\ \sin\theta(x, y) & \cos\theta(x, y) \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} f'_x = k(x, y)\cos\theta(x, y) = 2x\ ; \\ f'_y = -k(x, y)\sin\theta(x, y) = -2y. \end{cases}$$

On doit donc avoir $f(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda$, λ constante.

Comme alors on a :

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, on a :

$$J_\varphi(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix},$$ c'est bien la matrice d'une similitude de rapport $2\sqrt{x^2+y^2}$, et d'angle $\theta(x, y) = \text{Argument } (x + iy)$ en fait.

Si $x^2 + y^2 = 0$, $d\varphi(x, y)$ est l'application nulle, (peut-on parler alors de similitude de rapport nul ?).

12.12. Par hypothèse, la matrice jacobienne de f est une matrice rotation. Si on note u et v les deux fonctions composantes de f, cette matrice s'écrit :

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix},$$

et pour chaque (x, y) de $\mathbb{R}^2$, il existe un $\theta(x, y)$ défini modulo 2π, tel que :

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta(x, y) & -\sin\theta(x, y) \\ \sin\theta(x, y) & \cos\theta(x, y) \end{pmatrix}.$$

De plus, si $\theta(x_0, y_0) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, modulo 2π, comme les composantes de $J_f(x, y)$ sont continues, on a localement $\theta(x, y)$ du type $\theta(x, y) = \text{Arc}\ \sin(v'_x) + 2k\pi$, (ou d'ailleurs $\theta(x, y) = \text{Arc}\ \sin(-u'_y) + 2k\pi$.

Si on avait $\theta(x_0, y_0)$ dans $]0, \pi[$, (modulo 2π), on aurait une expression locale en $\theta(x, y) = \text{Arc}\cos(u'_x) + 2k\pi$; enfin $\theta(x_0, y_0)$ dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ (modulo 2π), ou dans $]-\pi, 0[$ (modulo 2π) conduit à des expressions locales en $\pi - \text{Arc}\ \sin(v'_x) + 2k\pi$ ou $-\text{Arc}\cos(u'_x) + 2k\pi$: dans tous les cas, la fonction $\theta(x, y)$ est de classe C^1, et vérifie les relations :

$$\begin{cases} u'_x = \cos\theta(x, y) = v'_y\ , \text{ et :} \\ v'_x = \sin\theta(x, y) = -u'_y\ . \end{cases}$$

Mais alors $u''_{x^2} = v''_{xy}$ et $u''_{y^2} = -v''_{yx}$, donc (Théorème de Schwarz), $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin\theta(x, y)) = 0, \text{ soit encore à :}$$

① $\quad - \theta'_x \sin\theta(x, y) - \theta'_y \cos\theta(x, y) = 0$.

L'égalité $u''_{xy} = u''_{yx}$, conduit elle à :

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\sin\theta(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}\cos\theta(x, y), \text{ soit encore à :}$$

② $\quad - \theta'_x \cos\theta(x, y) + \theta'_y \sin\theta(x, y) = 0$

Le système homogène de deux équations à deux inconnues, ici θ'_x et θ'_y, est de déterminant -1, donc a pour solution $\theta'_x = \theta'_y = 0$, d'où $\theta(x, y) =$ une constante θ_0, et l'application f est une application de classe C^2 de différentielle constante, r_0, rotation d'angle θ_0. Elle est affine, d'application linéaire associée r_0. Étant composée d'une rotation et d'une translation, c'est une rotation affine.

12.13. Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, un polynôme complexe de degré n, (donc $a_n \neq 0$), ayant n zéros distincts, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Soit $\lambda_k = s_k + it_k$ l'un de ces zéros. On considère par ailleurs chaque coefficient a_j donné par sa partie réelle et sa partie imaginaire : $a_j = \alpha_j + i\beta_j$, et, pour $z = x + iy$, on considère l'application de $2(n+1) + 2$ variables réelles, définie, (tenez vous bien), par :

$$\varphi(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n, x, y) = \sum_{j=0}^{n} (u_j + iv_j)(x + iy)^j,$$

(i étant le i complexe tel que $i^2 = -1$, et pas un indice).

Cette fonction est polynomiale par rapport aux $2n + 4$ variables, à valeurs dans $\mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{R}^2$: elle est de classe C^∞.

De plus $\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n, s_k, t_k) = 0$: c'est écrire que λ_k est zéro de P.

On voudrait grâce au Théorème des fonctions implicites, exprimer « localement en $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n)$ », un zéro d'un polynôme comme fonction continue des coefficients.

Pour cela, en notant f et g les parties réelles et imaginaires de φ, on va vérifier qu'en $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n, s_k, t_k) = \omega_k$, la matrice Jacobienne :

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix},$$

est régulière.

En fait on a : $f'_x + ig'_x = \varphi'_x = \sum_{j=0}^{n} j(u_j + iv_j)(x+iy)^{j-1}$, et :

$$f'_y + ig'_y = \varphi'_y = \sum_{j=0}^{n} ij(u_j + iv_j)(x+iy)^{j-1}.$$

Si on note donc $\mu + i\nu = \mathrm{P}'(\lambda_k) = \sum_{j=0}^{n} j(u_j + iv_j)(s_k + it_k)^{j-1}$, les dérivées partielles de f et g, calculées au point :

$\omega_k = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n, s_k, t_k)$, sont telles que :

$$\begin{cases} f'_x(\omega_k) + ig'_x(\omega_k) = \mathrm{P}'(\lambda_k) = \mu + i\nu, \text{ et} \\ f'_y(\omega_k) + ig'_y(\omega_k) = i\mathrm{P}'(\lambda_k) = -\nu + i\mu, \end{cases}$$

d'où une matrice jacobienne en (ω_k) :

$$\mathscr{M}(\omega_k) = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix},$$

de déterminant $\mu^2 + \nu^2 = |\mathrm{P}'(\lambda_k)|^2 > 0$, ici, puisque λ_k est zéro simple de P.

Mais alors il existe un voisinage V_k de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n, s_k, t_k)$ et un voisinage W_k de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n)$ et une application θ_k, de classe C^∞, de W_k dans $\mathbb{R}^2$, telle que :

$(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n, x, y) \in \mathrm{V}_k$ et $\varphi(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n, x, y) = 0$ équivaut à $(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n) \in \mathrm{W}_k$ et :

$(x, y) = \theta_k(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n)$.

En posant $z = x + iy$, et en revenant aux notations polynomiales, cela signifie que le polynôme $\sum_{j=0}^{n} (u_j + iv_j)z^j$, pour $(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n)$ dans W_k, s'annule en $z_k = x_k + iy_k$, si on note (x_k, y_k) le couple de $\mathbb{R}^2$,

$\theta_k(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n)$, avec en outre $(u_0, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n, x_k, y_k)$ dans V_k.

Donc, pour les $u_j + iv_j$ proches des $a_j = \alpha_j + i\beta_j$, le polynôme $\sum_{j=0}^{n} (u_j + iv_j)z^j$ s'annule en un $z_k = x_k + iy_k$, proche de $\lambda_k = s_k + it_k$, et fonction continue des $u_j + iv_j$.

En revenant sur $\mathbb{C}$, on en déduit un voisinage $\tilde{W}_k$ de $(a_0, \ldots, a_n)$, et un voisinage O_k de λ_k, tels que pour $(a'_0, \ldots, a'_n)$ dans $\tilde{W}_k$, le polynôme $\sum_{j=0}^{n} a'_j z^j$ s'annule en un z_k dans O_k, (et en un seul zéro dans O_k en fait), avec z_k qui tend vers λ_k si $(a'_0, \ldots, a'_n)$ tend vers $(a_0, \ldots, a_n)$.

Soit alors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les zéros distincts de P, on fait ce travail pour chaque λ_k, et les z_k étant fonctions continues des $a'_0, \ldots, a'_n$, quitte à restreindre les $\tilde{W}_k$, on peut avoir des O_k disjoints, (avec $r < \frac{1}{2}\{|\lambda_k - \lambda_l| \ ; \ k \neq l\}$, on remplace les O_k par leurs intersections avec les disques de centres λ_k, de rayon r), mais alors, pour $(a'_0, \ldots, a'_n)$ dans $\bigcap_{k=1}^{n} \tilde{W}_k$, on aura pour le polynôme $\sum_{j=0}^{n} a'_j z^j$, n zéros forcément distincts, chacun étant dans un O_k, et les O_k étant disjoints, en nombre n.

Vous pouvez comparer cette solution avec celle donnée en 6.32.

12.14. On donne à X un accroissement H, et, comme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on prend celle d'application linéaire continue, une norme de $\mathbb{R}^n$ étant fixée.

Alors $f(X + H) - f(X) = (X + H)^2 - X^2 = XH + HX + H^2$. En posant $df(X)(H) = XH + HX$, on a bien une application linéaire continue,

$df(\mathrm{X})$, telle que la différence : $f(\mathrm{X}+\mathrm{H})-f(\mathrm{X})-df(\mathrm{X})(\mathrm{H})$ soit $o(\|\mathrm{H}\|)$, puisqu'ici c'est H^2 et que, pour la norme choisie, on a $|||\mathrm{H}^2||| \leqslant |||\mathrm{H}|||^2$.

En particulier, $df(\mathrm{I}_n)(\mathrm{H}) = 2\mathrm{H}$, donc $df(\mathrm{I}_n)$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même : le Théorème du difféomorphisme local s'applique en I_n.

Donc il existe V voisinage de I_n, et W, voisinage de $f(\mathrm{I}_n) = 0$, telle que la restriction de f à V soit une bijection de V sur W.

En particulier, I_n est la seule matrice X de V telle que $f(\mathrm{V}) = \mathrm{V}^2 - \mathrm{I}_n = 0$, c'est donc qu'en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices des symétries de $\mathbb{R}_n$, (une base de E étant fixée), on a $\mathrm{V} \cap \mathscr{S} = \{\mathrm{I}_n\}$: on a bien I_n isolé dans $\mathscr{S}$.

On procéderait de même en $-\mathrm{I}_n$, $df(-\mathrm{I}_n)$ étant bijective. Vous pouvez comparer cette solution avec celle donnée en 6.34.

12.15. La fonction f est de classe C^∞ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme fraction rationnelle en (x, y), de dénominateur ne s'annulant pas.

Continuité de f en $(0, 0)$.

On passe en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$, alors on a :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r(\cos^3\theta - \sin^3\theta),$$

expression qui tend vers 0 si r tend vers 0 : f est continue en $(0, 0)$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}, = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1 \text{ ; et :}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1,$$

donc si f est différentiable en $(0, 0)$, on aura :

$$df(0,0)(h,k) = h-k,$$

et il reste à voir si :

$$f(h,k)-f(0,0)-df(0,0)(h,k) \text{ est } o(\|(h,k)\|),$$

donc si :

$$u(h,k) = \frac{h^3-k^3}{h^2+k^2}-(h-k) = \frac{h^3-k^3-h^3-hk^2+h^2k+k^3}{h^2+k^2},$$

$$= \frac{hk(h-k)}{h^2+k^2},$$

est $o(\|(h,k)\|)$.

Pour cela on passe en polaires : avec $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$, l'expression devient :

$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)$, et il faut voir si, divisée par $r \neq 0$, on a quelque chose qui tend vers 0 si r tend vers 0 : ce n'est pas le cas.

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$, bien que les dérivées partielles existent.

Soit alors $(x_0, y_0) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on considère l'application :

$$t \rightsquigarrow \varphi(t) = (x_0+tx, y_0+ty),$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, elle est de classe C^∞ en fait, et l'application $\phi = f \circ \varphi$ devient dérivable en 0 avec :

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= df(\varphi(0))(\varphi'(0)),\\ &= df(x_0,y_0)(x,y) :\end{aligned}$$

l'application $L_{(x_0,y_0)}$ n'est autre que la forme différentielle $df(x_0,y_0)$: c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

12.16. L'application f est de classe C^∞, ses fonctions composantes l'étant. La matrice jacobienne est :

$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & a\cos y \\ b\cos x & 1 \end{pmatrix},$$

de déterminant $1 - ab\cos x\cos y$.

Si f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$, f doit être bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$, de différentielle en chaque point un isomorphisme, ce qui donne la différentiabilité de f^{-1}, et $df^{-1}(f(m)) = (df(m))^{-1}$.

Si $|ab| \geqslant 1$, on peut trouver des couples (x, y) tels que $\cos x \cos y = \dfrac{1}{ab}$: il suffit d'écrire $\dfrac{1}{ab}$ sous forme $\alpha\beta$ avec $|\alpha| \leqslant 1$ et $\beta \leqslant 1$ puis de résoudre les équations $\cos x = \alpha$ et $\cos y = \beta$. Dans ce cas f n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

Par contre, si $|ab| < 1$, en tout point de $\mathbb{R}^2$ on a un jacobien différent de 0 : le Théorème du difféomorphisme local s'applique en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Il en résulte que $f(\mathbb{R}^2)$ est un *ouvert de* $\mathbb{R}^2$, car si un élément p de $\mathbb{R}^2$ est dans $f(\mathbb{R}^2)$, il existe m dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(m) = p$, et le Théorème du difféomorphisme local appliqué en m donne deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$, l'un contenant m, l'autre, (V), contenant p, tels que f réalise un difféomorphisme de U sur V : en particulier on a $\mathrm{V} = f(\mathrm{U})$ contenu dans l'image $f(\mathbb{R}^2)$, qui est donc voisinage de p. C'est vrai pour tout p de $f(\mathbb{R}^2)$ donc $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

De plus f est injective lorsque $|ab| < 1$, car :

$f(x, y) = f(x', y')$ équivaut à :

$$\begin{cases} x' - x = a(\sin y - \sin y') = a(y - y')\cos(\eta), \text{ et} \\ y' - y = b(\sin x - \sin x') = b(x - x')\cos(\xi), \end{cases}$$

avec η entre y et y', et ξ entre x et x', par accroissements finis, mais il en résulte que :

$$|x' - x| \leqslant |a||y - y'| \text{ et } |y - y'| \leqslant |b||x - x'|,$$

ce qui implique $|x' - x| \leqslant |ab||x - x'|$ et $|y - y'| \leqslant |ab||y - y'|$, avec un $|ab| < 1$, on a $(1 - |ab|)|x' - x| \leqslant 0$ et $(1 - |ab|)|y' - y| \leqslant 0$ d'où $|x' - x| = |y' - y| = 0$.

On a donc f bijective de $\mathbb{R}^2$ sur l'ouvert $f(\mathbb{R}^2)$, avec $df(m)$ inversible pour tout m de $\mathbb{R}^2$, *si et seulement si* $|ab| < 1$ *d'où un* C^∞ *difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $f(\mathbb{R}^2)$ *dans ce cas.*

Il reste à voir si $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ ou non, et pour cela, si on se donne (X, Y) dans $\mathbb{R}^2$, voir s'il existe x et y tels que :

$$\begin{cases} x + a\sin y = X, \\ y + b\sin x = Y, \end{cases}$$

ou encore tels que :

$$\begin{cases} x + a\sin y = X, \\ y + b\sin(X - a\sin y) = Y. \end{cases}$$

Si la deuxième équation, d'inconnue y, admet une solution, la première donnant x sans problème, le système aura une solution.

Or, la fonction $t \rightsquigarrow t + b\sin(X - a\sin t) - Y = \varphi(t)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$, et on a :

$$\varphi'(t) = 1 - ab\cos(X - a\sin t)\cos t,$$

avec $|ab| < 1$, on a $\varphi'(t) > 0$, donc φ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: elle s'annule une seule fois, d'où y et x. On a bien $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ et finalement f réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $|ab| < 1$.

12.17. a) La fonction f est de classe C^∞, ses fonctions composantes l'étant, et en $M(x, y)$, la matrice jacobienne est :

$$J(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -(2y + 2a) \\ 2y - 2a & 2x \end{pmatrix},$$

de déterminant $4(x^2 + y^2 - a^2) = 0$.

Sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus C$, avec C cercle d'équation $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, (fermé car image réciproque de $\{0\}$ par $(x, y) \rightsquigarrow x^2 + y^2 - a^2$, polynomiale donc continue), la différentielle $df(x, y)$ est de rang deux.

Sur le cercle C, comme on ne peut pas avoir à la fois $y = a$ et $y = -a$, la matrice jacobienne est de rang 1, et le noyau de $df(x_0, y_0)$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{V} : (y + a, x)$, si $y \neq -a$, (ou par $\vec{W} : (x, a - y)$ si $y = -a$).

b) On peut paramétrer C par $x = a\cos t, y = a\sin t$. Un vecteur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ sera donc dans le noyau de $df(x_0, y_0)$, avec t_0 valeur du paramètre associé, si on a :

$$\begin{cases} \alpha\cos t_0 - \beta(1+\sin t_0) = 0 \\ \alpha(\sin t_0 - 1) + \beta\cos t_0 = 0, \end{cases}$$

le système étant de rang 1, (mais pour $\sin t_0 = -1$ par exemple, la première équation donne $\alpha 0 - \beta 0 = 0$: il faut la deuxième qui s'écrit alors $-2\alpha = 0$).

On cherche alors t_0 de façon que la tangente à C en M_0, qui est perpendiculaire à OM_0, soit dirigée par un tel vecteur $\vec{u}$.

Les composantes de $\overrightarrow{OM_0}$ étant $(a\cos t_0, a\sin t_0)$, le vecteur $(-\sin t_0, \cos t_0)$ dirige la tangente, et on doit avoir :

$$-\sin t_0\cos t_0 - \cos t_0(1+\sin t_0) = 0, \text{ pour } \sin t_0 \neq -1, \text{ ou}$$
$$2\sin t_0 = 0 \text{ si } \sin t_0 = -1 \text{ : ce cas est exclu.}$$

Il reste l'équation $\cos t_0(1+2\sin t_0) = 0$, d'où $\cos t_0 = 0$ ou $\sin t_0 = -\frac{1}{2}$, et les points M_0 du cercle correspondants qui sont les points de coordonnées $(0, a)$; $\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-a}{2}\right)$ et $\left(-a\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2}\right)$.

12.18. On a $\begin{cases} f'_x = 2(x-yz), \\ f'_y = 2(y-xz), \\ f'_z = 2(z-xy), \end{cases}$

donc les points critiques sont les points communs aux paraboloïdes hyperboliques d'équations : $x = yz$, $y = xz$, $z = xy$.

En de tels points, on a $xyz = (xyz)^2$, d'où $xyz = 0$ ou $xyz = 1$.

<u>*Premier cas.*</u> $xyz = 0$

On suppose $x = 0$, alors $y = 0z = 0$ et $z = 0y = 0$, donc $(0, 0, 0)$ est point critique, (et $y = 0$ ou $z = 0$ conduisent au même point).

Deuxième cas. Si $xyz = 1$, aucune coordonnée n'est nulle, et on a $yz = \frac{1}{x}$, or $yz = x$, d'où $x^2 = 1$ et $x = 1$ ou -1. Il en est de même pour y et z, (symétrie des rôles joués), mais on ne peut pas prendre les $2^3 = 8$ points obtenus en choisissant de manière quelconque 1 ou -1.

Si $x = 1$, y et z sont de même signe : on vérifie que $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, -1)$ sont solutions.

Si $x = -1$, y et z doivent être de signes contraires d'où $(-1, 1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$ comme solutions.

Nature des points critiques.

En $(0, 0, 0)$, l'expression polynomiale de f donne d'emblée la formule de Taylor à l'ordre 3 : on a $f(0, 0, 0) = 0$, et :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, \text{ c'est :}$$
$$= f(0, 0, 0) + df(0, 0, 0)(x, y, z) + \frac{1}{2}d^2f(0, 0)(x, y, z) + o(\|(x, y, z)\|^2)$$

avec ici $f(0, 0, 0) = 0$, $df(0, 0, 0) \equiv 0$ et donc :

$\frac{1}{2}d^2f(0, 0)(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$: forme quadratique définie positive, on a un *minimum local strict en* $(0, 0, 0)$.

Étude en $(1, 1, 1)$.

En posant $x = 1 + u$, $y = 1 + v$, $z = 1 + w$ et en développant le polynôme en u, v, w, le terme constant sera $f(1, 1, 1) = 1$, les termes de degré 1 disparaissent, ($df(1, 1, 1) = 0$ oblige : on contrôle les calculs), et la partie homogène de degré 2 correspond à $\frac{1}{2}d^2f(1, 1, 1)(u, v, w)$, forme quadratique à étudier. On a :

$$f(1 + u, 1 + v, 1 + w)$$
$$= 3 + 2u + 2v + 2w + u^2 + v^2 + w^2 - 2(1 + u + v + uv)(1 + w)$$
$$= 1 + u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw - 2uvw,$$

donc on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d^2f(1,1,1)(u,v,w) &= u^2 - 2u(v+w) + v^2 + w^2 - 2vw \\ &= (u-v-w)^2 - (v+w)^2 + v^2 + w^2 - 2vw \\ &= (u-v-w)^2 - 4vw \\ &= (u-v-w)^2 + (v-w)^2 - (v+w)^2 :\end{aligned}$$

forme quadratique de signature $(2, 1)$: il y a des signes + et – donc ni maximum, ni minimum.

Pour les trois autres points, on n'en étudie qu'un, (par permutation en (x, y, z) on aura le même résultat. On a :

$$\begin{aligned}&f(1+u, -1+v, -1+w) \\ &= (1+u)^2 + (-1+v)^2 + (-1+w)^2 - 2(-1-u+v+uv)(-1+w) \\ &= 1 + 2u - 2v - 2w - 2u + 2v + 2w + u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2uw \\ &\quad - 2vw - 2uvw,\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d^2f(1,-1,-1)(u,v,w) &= u^2 + 2u(v+w) + v^2 + w^2 - 2vw \\ &= (u+v+w)^2 - 4vw \\ &= (u+v+w)^2 + (v-w)^2 - (v+w)^2 :\end{aligned}$$

on a la même conclusion.

Finalement on a un minimum local strict en $(0, 0, 0)$ et c'est tout.

12.19. La sphère S étant un compact de $\mathbb{R}^3$, et f étant continue à valeurs réelles, elle admet un maximum et un minimum atteints sur S. Par ailleurs le problème est symétrique en (x, y, z), « pair » en x, y et z.

En posant $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, si f présente un extremum en $m(\alpha, \beta, \gamma)$ de S, on a proportionnalité des différentielles de f et de g en m, d'où les conditions :

(1) $$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin z}{z},$$

(avec les conventions usuelles : $x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ ..., x, y et z n'étant pas nuls tous les trois ensemble sur S).

<u>*Si $xyz \neq 0$*</u>, on étudie $t \rightsquigarrow \varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[0, 1]$, (parité de φ, et $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$ sur S).

On a $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2}(t\cos t - \sin t) = \dfrac{\cos t}{t^2}(t - \tan t)$, quantité négative sur $[0, 1]$, d'où φ strictement monotone sur $[0, 1]$, donc injective, et dans ce cas (1) implique $|x| = |y| = |z| = a$ avec $3a^2 = 1$, (on est sur S), donc $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

On a 8 points de coordonnées $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{3}}, \dfrac{\varepsilon_3}{\sqrt{3}}\right)$, avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ valant 1 ou -1. En ces 8 points la fonction f prend la même valeur, $3\cos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et sa restriction à S a le même comportement, (parité en x, y, z) : il suffira d'étudier ce comportement en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

<u>*Si $xyz = 0$*</u>, on peut avoir :

une seule coordonnée nulle, par exemple $z = 0$, et $|x| = |y|$ avec $x^2 + y^2 = 1$, donc $|x| = |y| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et en fait 12 points du type $\left(0, \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{\varepsilon_3}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{\varepsilon_3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}, 0\right)$, où f vaut $1 + 2\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

deux coordonnées nulles, la troisième valant 1 ou -1, d'où 6 points : $(0, 0, \varepsilon_3)$; $(0, \varepsilon_2, 0)$ et $(\varepsilon_1, 0, 0)$, avec f qui vaut $2 + \cos 1$.

Numériquement, on trouve :

$3\cos\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cong 2{,}514$; $1 + 2\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cong 2{,}520$; $2 + \cos 1 \cong 2{,}540$: il y a donc maximum absolu atteint aux 6 points du type $(0, 0, \varepsilon_3)$, $(0, \varepsilon_2, 0)$ et $(\varepsilon_1, 0, 0)$; et minimum absolu aux 8 points $\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{\varepsilon_2}{\sqrt{3}}, \dfrac{\varepsilon_3}{\sqrt{3}}\right)$.

Il reste les 12 points correspondant à une coordonnée nulle. On étudie en $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, le résultat étant le même aux autres points, (parité et symétrie en x, y, z).

En fait on va étudier le comportement de f, quand on se rapproche de a sur la sphère, suivant deux courbes :

1°) le cercle C, dans le plan $z = 0$,

2°) le cercle Γ, dans le plan $x = y$.

Le cercle C se paramètre en $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$, et a correspond à $t = \frac{\pi}{4}$. On a, le long de C :

$$\begin{aligned}
f(m) &= 1 + \cos(\cos t) + \cos(\sin t) = \varphi(t), \text{ et} \\
\varphi'(t) &= \sin(\cos t) \cdot \sin t - \sin(\sin t) \cdot \cos t, \\
\varphi''(t) &= \cos t \cdot \sin(\cos t) + \sin t \cdot \sin(\sin t) \\
&\qquad - \sin^2 t \cdot \cos(\cos t) - \cos^2 t \cdot \cos(\sin t),
\end{aligned}$$

donc $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$, et

$$\varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}158 :$$

la fonction φ présente en $\frac{\pi}{4}$ une tangente horizontale avec une concavité « vers le haut », on a minimum en a si on se promène le long de C.

Allons du côté de Γ qui peut se paramétrer, (coordonnées sphériques) par :

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \text{ et } z = \sin t,\ t \text{ voisin de } 0.$$

La fonction $f(x, y, z) = \psi(t)$ devient :

$$\psi(t) = 2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) + \cos(\sin t), \text{ d'où :}$$

$$\psi'(t) = \sqrt{2}\sin t \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) - \cos t \cdot \sin(\sin t),$$

$$\begin{aligned}
\psi''(t) &= \sqrt{2}\cos t \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) - \sin^2 t \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) \\
&\qquad + \sin t \cdot \sin(\sin t) - \cos^2 t \cdot \cos(\sin t),
\end{aligned}$$

donc $\psi'(0) = 0$ et $\psi''(0) = \sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \cong - 0{,}08$: la fonction ψ a une tangente horizontale avec une concavité « vers le bas » : la fonction ψ présente un maximum en $t = 0$.

En a sur la sphère, suivant le trajet, on a un maximum ou un minimum, donc il n'y a pas d'extremum en ce point.

12.20. D'abord, (penser à $|x|$ sur $\mathbb{R}$, en $x = 0$), une norme n'est jamais différentiable en $\vec{x} = \vec{0}$, vecteur nul de E, espace vectoriel normé. Sinon, en prenant un vecteur $\vec{a}$ non nul de E, l'application φ :

$\varphi : t \rightsquigarrow t\vec{a}$, de $\mathbb{R}$ dans E,

étant dérivable, on aurait $f \circ \varphi$ dérivable en 0, avec :

$$(f \circ \varphi)'(0) = df(\varphi(0))(\varphi'(0)) = df(\vec{0})(\vec{a}),$$

f désignant ici la norme.

Or, $f \circ \varphi(t) = \|\varphi(t)\| = \|t\vec{a}\| = |t|\,\|\vec{a}\|$, et pour $t > 0$ c'est $t\|\vec{a}\|$, pour $t < 0$ c'est $-\,t\|\vec{a}\|$, donc $f \circ \varphi$ n'est pas dérivable en 0, (dérivées à droite et à gauche distinctes).

Considérons maintenant la norme $\|\ \|_\infty$.

En $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $\|X\|_\infty$ peut être obtenu pour une seule coordonnée, ou pour au moins deux.

Si $\|X\|_\infty = \sup\{|x_i|\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est atteint en un seul indice, i_0, c'est que $\alpha = |x_{i_0}| - \sup\{|x_i|\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq i_0\}$ est strictement positif, et si on impose au n-uplet $h = (h_1, \ldots, h_n)$ d'être tel que $\|h\|_\infty < \frac{\alpha}{2}$, on aura :

$$|x_{i_0} + h_{i_0}| \geqslant |x_{i_0}| - |h_{i_0}| \geqslant |x_{i_0}| - \|h\|_\infty > |x_{i_0}| - \frac{\alpha}{2}\ ;\ \text{et,}$$

$$\forall j \neq i_0,\ |x_j + h_j| \leqslant |x_j| + |h_j| \leqslant |x_{i_0}| - \alpha + \|h\|_\infty < |x_{i_0}| - \alpha + \frac{\alpha}{2} = |x_{i_0}| - \frac{\alpha}{2},$$

d'où, $\forall j \neq i_0$, $|x_j + h_j| < |x_{i_0} + h_{i_0}|$: sur la boule ouverte $\mathscr{B}_0\left(X, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\|X'\|_\infty$ reste défini par $|x'_{i_0}|$.

De plus on suppose au départ $X \neq \vec{0}$, (non différentiabilité en $\vec{0}$), et sur cette boule x'_{i_0} reste du signe de x_{i_0}, c'est donc que localement $\|X'\|_\infty = \varepsilon x'_{i_0}$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1.

Mais alors $\dfrac{\partial\| \ \|_\infty}{\partial x_{i_0}} = \varepsilon$ et, $\forall j \neq i_0$, $\dfrac{\partial\| \ \|_\infty}{\partial x_j} = 0$: l'application $X \leadsto \|X\|_\infty$, de E dans $\mathbb{R}$ admet n dérivées partielles continues sur $\mathscr{B}_0\left(X, \dfrac{\alpha}{2}\right)$, et même de classe C^∞, donc $\| \ \|_\infty$ est déjà de classe C^∞ sur $\mathscr{B}_0\left(X, \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Si on suppose maintenant $\|X\|_\infty$ atteinte pour au moins deux indices, là encore avec $X \neq 0$.

Alors $f = \| \ \|_\infty$ n'est pas différentiable en X.

En effet, supposons, avec $i \neq j$, que $\|X\|_\infty = |x_i| = |x_j|$, avec par exemple $x_i > 0$ et $x_j < 0$, (donc $x_j = -x_i$).

Étudions l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$. Pour un $h = (0, \dots, h_i, 0, \dots, 0)$, avec $h_i > 0$, on aura :

$$\begin{cases} |x_i + h_i| = x_i + h_i > \|X\|_\infty, \\ |x_j + h_j| = |x_j| = \|X\|_\infty, \\ \text{et, si } k \neq i, k \neq j, |x_k + h_k| = |x_k| \leqslant \|X\|_\infty, \end{cases}$$

finalement, $f(X+h) = \|X+h\|_\infty = x_i + h_i$, et :

$$\frac{f(X+h) - f(X)}{h_i} = \frac{h_i}{h_i}, \text{ tend vers 1 si } h_i \text{ tend vers } 0^+.$$

Pour $h_i < 0$ cette fois, on aura, avec en outre $|h_i| < \|X\|_\infty$:

$$\begin{cases} |x_i + h_i| = x_i + h_i < x_i = \|X\|_\infty, \\ |x_j + h_j| = |x_j| = \|X\|_\infty, \\ \text{et, si } k \neq i, k \neq j, |x_k + h_k| = |x_k| \leqslant \|X\|_\infty, \end{cases}$$

dans ce cas $f(X+h) = \|X+h\|_\infty = \|X\|_\infty = f(X)$, et

$$\frac{f(X+h) - f(X)}{h_i} = 0, \text{ tend vers 0 si } h_i \text{ tend vers } 0^-.$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ n'existe pas, $f = \| \ \|_\infty$ n'est pas différentiable. *Finalement $\| \ \|_\infty$ est différentiable sur l'ouvert Ω formé des $X = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $\|X\|_\infty$ n'est atteinte que pour un indice.*

<u>*Cas de $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.*</u>

Sur l'ouvert U tel que, $\forall i$, $x_i \neq 0$, en posant $\varepsilon_i = \text{signe}\,(x_i)$, ε_i reste localement constant, (si $\alpha = \inf\{|x_i| \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, il est clair qu'avec $||X - Y|| < \alpha$, chaque y_i reste du signe de x_i), donc, localement $\|Y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i$, et cette fonction admet n dérivées partielles, $\dfrac{\partial f}{\partial y_i} = \varepsilon_i$, continues localement, et même de classe C^∞, d'où là encore $f = \| \ \|_1$ de classe C^∞ sur U.

Par contre, si en $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une coordonnée est nulle, la i^e par exemple, pour $h_i > 0$ on aura, avec $h = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$: $\|A + h\|_1 - \|A\|_1 = h_i$, et pour $h_i < 0$: $\|A + h\|_1 - \|A\|_1 = -h_i$, d'où $\lim\limits_{h_i \to 0^+} \dfrac{\|A + h\|_1 - \|A\|_1}{h_i} = 1$, alors que si h_i tend vers 0^- la limite serait -1. Il y a non différentiabilité en A de $\| \ \|_1$ puisque la i^e dérivée partielle n'existe pas.

Donc $\| \ \|_1$ est de classe C^∞ sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}^*)^n$.

<u>*Cas de la norme euclidienne*</u> : elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, car composée de :

$\phi : X \rightsquigarrow \langle X, X \rangle = \varphi(X, X)$,

bilinéaire continue, donc différentiable, avec $d\phi(X)(H) = 2 \langle X, H \rangle$,

et de :

$t \rightsquigarrow \sqrt{t}$, de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞.

Par composition, $X \rightsquigarrow \sqrt{\phi(X)}$ est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

12.21. On posera ${}^t\mathrm{X} = (x_2, \dots, x_n)$, ${}^t\mathrm{B} = (b_2, \dots, b_n)$ et $\mathrm{M} = (m_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$.

On a, (calcul par blocs) :

(1) : $f(\mathrm{X}) = a + {}^t\mathrm{BX} + {}^t\mathrm{XB} = {}^t\mathrm{XMX}$,

ou, sous forme développée :

$$f(x_2, \dots, x_n) = a + 2\sum_{i=2}^{n} b_i x_i + \sum_{i=2}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_{ij} x_i x_j .$$

La recherche des points critiques conduit à résoudre le système des $n-1$ équations obtenues pour $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$f'_{x_k}(x_2, \dots, x_n) = 0 = 2\left(b_k + m_{kk}x_k + \sum_{\substack{j \neq k \\ j=2}}^{n} m_{kj}x_j \right),$$

(n'oublions pas la symétrie de M), ce qui revient à chercher une matrice colonne X d'ordre $n-1$, telle que :

$\mathrm{MX} + \mathrm{B} = 0$.

Comme A est définie positive, il en est de même de M qui est la matrice de la restriction à $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$, de la forme quadratique ϕ de matrice A dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Donc M est inversible, et on a un et un seul point critique pour f, c'est $\mathrm{X} = -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{B}$.

On donne alors un accroissement H à la variable X, (matrice colonne de $n-1$ termes, ne l'oublions pas). On aura, en utilisant l'expression (1) de f :

$$\begin{aligned} &f(\mathrm{X}+\mathrm{H}) \\ &= a + {}^t\mathrm{BX} + {}^t\mathrm{BH} + {}^t\mathrm{XB} + {}^t\mathrm{HB} + {}^t\mathrm{XMX} + {}^t\mathrm{HMX} + {}^t\mathrm{XMH} + {}^t\mathrm{HMH} \\ &= (a + {}^t\mathrm{BX} + {}^t\mathrm{XB} + {}^t\mathrm{XMX}) + ({}^t\mathrm{B} + {}^t\mathrm{XM})\mathrm{H} + {}^t\mathrm{H}(\mathrm{B} + \mathrm{MX}) + {}^t\mathrm{HMH} \\ &= f(\mathrm{X}) + {}^t(\mathrm{MX} + \mathrm{B})\mathrm{H} + {}^t\mathrm{H}(\mathrm{B} + \mathrm{MX}) + {}^t\mathrm{HMH}, \end{aligned}$$

car n'oublions pas que M est symétrique.

Or le point critique M est tel que $\mathrm{B} + \mathrm{MX} = 0$, d'où ${}^t(\mathrm{B} + \mathrm{MX}) = 0$ aussi, et il reste :

$$f(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - f(\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{HMH} = \psi(\mathrm{H}),$$

avec ψ forme quadratique définie positive. Il en résulte qu'en $X = -M^{-1}B$, la fonction f présente un minimum strict, qui est minimum absolu en fait.

12.22. Il s'agit d'une simple application du théorème des fonctions implicites. On définit une application F de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$F((x, y), (u, v)) = (f((x, y), (u, v)), g((x, y), (u, v))) \text{, avec :}$$

$$\begin{cases} f((x, y), (u, v)) = xu^2 + v - y^3, \\ g((x, y), (u, v)) = 2yu - xv^3 - 4x. \end{cases}$$

On sait qu'en tout point où la différentielle partielle par rapport à (u, v) est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on aura localement :

$(F((x, y), (u, v)) = 0) \Leftrightarrow u$ et v sont fonctions, ici de classe C^∞, de x et de y.

Or la matrice jacobienne de cette différentielle partielle est :

$$M = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xu & 1 \\ 2y & -3xv^2 \end{pmatrix},$$

de déterminant $-(6x^2uv^2 + 2y)$.

En tout point de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^4$ tel que $6x^2uv^2 + 2y \neq 0$, le système donné définit u et v fonctions de x et y.

En dérivant par rapport à x les deux composantes de F, on a alors :

$$\begin{cases} u^2 + 2uxu'_x + v'_x = 0 \\ 2yu'_x - v^3 - 3xv^2v'_x - 4 = 0, \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} 2uxu'_x + v'_x = -u^2 \\ 2yu'_x - 3xv^2v'_x = 4 + v^3 \end{cases} ; \left| \begin{matrix} 3xv^2 \\ 1 \end{matrix} \right. ; \left| \begin{matrix} y \\ -ux \end{matrix} \right. ,$$

système qui, compte tenu de la condition $6x^2uv^2 + 2y \neq 0$, conduit à :

$$u'_x = \frac{-3xu^2v^2 + 4 + v^3}{6x^2uv^2 + 2y}, \quad v'_x = \frac{-yu^2 - 4ux - uv^3x}{y + 3x^2uv^2}.$$

On procède de même pour les dérivées en y :

$$\begin{cases} 2uxu'_x + v'_y = 3y^2 \\ 2yu'_y - 3xv^2v'_y = -2u \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} 3xv^2 \\ 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} y \\ -ux \end{vmatrix},$$

d'où :

$$u'_y = \frac{9xy^2v^2 - 2u}{6x^2uv^2 + 2y}, \quad v'_y = \frac{3y^3 + 2u^2x}{y + 3x^2uv^2}.$$

12.23. Par l'identité d'Euler, on sait que sur le cône ouvert positif $(\mathbb{R}_+^*)^2$ on a :

$$x f'_x + y f'_y = 2f(x, y).$$

On dérive cette relation par rapport à x, puis par rapport à y. Il vient :

$$\begin{cases} f'_x + x f''_{x^2} + yf''_{yx} = 2 f'_x \\ x f''_{xy} + f'_y + yf''_{y^2} = 2 f'_y, \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x f''_{x^2} + yf''_{yx} = f'_x \\ x f''_{xy} + yf''_{y^2} = f'_y. \end{cases}$$

En multipliant par x la première relation, par y la seconde, et en ajoutant, compte tenu du théorème de Schwarz, $(f''_{yx} = f''_{xy})$, il vient :

$$x^2f''_{x^2} + 2xy\, f''_{yx} + y^2 f''_{y^2} = x f'_x + y f'_y = 2f(x, y).$$

12.24. On peut chercher un changement de variable qui permette de remplacer cette expression par une du genre « $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ » $= \ldots$, c'est-à-dire en somme, factoriser.

Essayons $\begin{cases} u = bx + ay \\ v = bx - ay, \end{cases}$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2b} \\ y = \dfrac{u-v}{2a}. \end{cases}$$

On établit ainsi un C^∞ difféomorphisme $\theta : (u, v) \rightsquigarrow (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et, en posant $g(u, v) = f(\theta(u, v))$, on aura :

$f(x, y) = g(\theta^{-1}(x, y)) = g(bx + ay, bx - ay)$, d'où :

$f'_x = bg'_u + bg'_v$; $f'_y = ag'_u - ag'_v$; puis :

$f''_{x^2} = b^2 g''_{u^2} + 2b^2 g''_{uv} + b^2 g''_{v^2}$ et,

$f''_{y^2} = a^2 g''_{u^2} - 2a^2 g''_{uv} + a^2 g''_{v^2}$,

donc f est solution si et seulement si g vérifie l'équation :

$$a^2(b^2 g''_{u^2} + 2b^2 g''_{uv} + b^2 g''_{v^2}) - b^2(a^2 g''_{u^2} - 2a^2 g''_{uv} + a^2 g''_{v^2}) = 0,$$

soit encore $4a^2b^2 g''_{uv} = 0$.

Donc g'_u est une constante par rapport à v, notons la $g'_u = \varphi(u)$, on aura $g(u, v) = \int \varphi(u)$ du + constante en u.

Finalement $g(u, v)$ est du type $A(u) + B(v)$, avec A et B fonctions de classe C^2, et f du type :

$f(x, y) = A(bx + ay) + B(bx - ay)$, A et B étant deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

CHAPITRE XIII

Équations différentielles

Le fondement de ce chapitre est le *Théorème de Cauchy Lipschitz*, qui donne l'existence et l'unicité d'une solution locale de donnée initiale fixée, et même, sur l'ouvert où il s'applique, d'une solution maximale.

La démarche consiste donc en :

1°) mise sous forme résoluble de l'équation donnée, avec recours éventuel au **Théorème des fonctions implicites**, (voir 13.2, 13.4), ceci peut fournir plusieurs équations ;

2°) pour chaque équation sous forme résoluble, chercher l'ouvert Ω sur lequel Cauchy-Lipschitz s'applique ;

3°) résoudre alors l'équation suivant son type : on peut trouver des courbes intégrales en équation cartésienne, y fonction de x ou x fonction de y ; en implicites ; ou en paramétriques : localement ces trois modes de représentation sont équivalents si les arcs sont réguliers ;

4°) une étude rapide des arcs doit permettre de comprendre ce qui se produit sur la frontière de Ω, qui peut être traversée ou non, avec points ramifiés ou non...

En ce qui concerne ce dernier point, ne pas oublier d'utiliser les calculs faits pour construire les arcs : en général on dispose de l'essentiel des résultats et les dérivations sont inutiles car on peut retrouver les dérivées, (voir 13.4).

Équations factorisées.

Il s'agit d'équations différentielles se présentant sous la forme :

(1) $\quad f_1(x,y,y')\,f_2(x,y,y') = 0$, avec f_1, f_2 continues.

On détermine successivement les courbes intégrales, C_1, de l'équation $f_1 = 0$, et C_2 de l'équation $f_2 = 0$.

Puis on considère C courbe intégrale de (1) et un point m_0 de C tel qu'en ce point $f_1(m_0) \neq 0$.

Alors, localement c'est-à-dire pour m sur $C \cap V(m_0)$, avec $V(m_0)$ voisinage de m_0, $f_1(m)$ reste non nul, donc localement $f_2(m) = 0$ c'est-à-dire que $C \cap V(m_0)$ est un morceau d'une courbe C_2, et on reste sur cette courbe C_2 tant que $f_1(m) \neq 0$: comme on connaît x, y et y' sur C_2 on peut étudier cette condition.

On suppose ensuite que $f_2(m_0) \neq 0$, d'où localement m est sur une C_1 et il y reste tant que, x, y, y' étant tels qu'on soit sur C_1, on garde la relation $f_2(x, y, y') = f_2(m) \neq 0$.

Les raccords possibles sont donc en des points m_0, de donnée x_0, y_0, y'_0 telle que $f_1(x_0, y_0, y'_0) = f_2(x_0, y_0, y'_0) = 0$, et l'étude graphique des courbes C_1 et C_2 permet le plus souvent de préciser ces raccords. Voir 13.1.

Les équations différentielles linéaires sont le plus souvent faciles à traiter, à condition de connaître son cours, et de ne pas dédaigner le **Wronskien** qui a son rôle à jouer.

Pour les équations scalaires d'ordre n, ne pas oublier de se placer sur un intervalle où le coefficient de $y^{(n)}$ ne s'annule pas, (sur une composante connexe de l'ouvert où il ne s'annule pas : la topologie, cela sert), d'où des problèmes de traversée des bornes de ces composantes connexes, (voir 13.5).

Un mot de l'entrelacement des solutions.

Cela concerne l'étude conjointe de deux équations du type $y'' + p(x)y = 0$ et $z'' + q(x)z = 0$, avec une inégalité entre p et q, par exemple $p(x) \leqslant q(x)$ sur l'intervalle d'étude.

Si on considère la fonction $w = yz' - y'z$, on a :

$$w' = yz'' - y''z = -\,yzq(x) + yzp(x) = yz(p(x) - q(x)),$$

et c'est cette relation, avec $p - q$ de signe constant, que l'on exploite, compte tenu de la question posée, en étudiant en général les variations de w, sur des intervalles où l'une des fonctions y ou z est de signe constant.

Quelques remarques.

Une solution particulière d'une équation différentielle linéaire peut parfois être cherchée sous forme d'une série entière. Avec du flair, on peut même en deviner d'autres, voir 13.5.

L'emploi du Théorème de Cauchy Lipschitz est souvent justifié par le recours au **Théorème des accroissements finis** : une dérivée partielle continue est localement bornée d'où du k. Lipschitzien.

Pensez aux changements de variable, (ou de fonction) simplifiant les calculs ! (13.10, 13.13).

En particulier, si une équation linéaire non homogène a un second membre du type $u(x)e^{\alpha x}$, (α constante), en posant $y = ze^{\alpha x}$, on obtient une équation simplifiée du $e^{\alpha x}$, souvent plus simple. Cela ne coûte rien d'essayer. (Voit 13.12).

De même, si le second membre est combinaison linéaire de plusieurs fonctions, on peut fractionner en plusieurs équations.

Pour les équations linéaires à coefficients constants, vectorielles, donc du type :

$$X'(t) = AX(t),$$

avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

1°) si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, avec $\{V_1, \ldots, V_n\}$ base de vecteurs propres pour les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, une base de l'espace vectoriel des solutions est formée des fonctions du type :

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t} V_j \;;$$

2°) si A admet des valeurs propres multiples en n'étant pas diagonalisable, si λ_j est une valeur propre multiple d'ordre m_j, et si pour $1 \leqslant p \leqslant m_j$, les vecteurs $V_{p,j}$ forment une base du sous-espace caractéristique $C_j = \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$, les m_j fonctions obtenues pour p variant de 1 à m_j, du type :

$$X_{p,j}(t) = \left(\sum_{q=0}^{m_j - 1} \frac{t^q}{q!} e^{\lambda_j t} (A - \lambda_j I_n)^q\right)(V_{p,j}),$$

sont des solutions indépendantes, et si on les prend pour j variant on a une base de solutions, (voir 13.27) ; mais parfois un examen du système permet d'éviter cette artillerie lourde (13.26) ;

3°) si on peut diagonaliser sur $\mathbb{C}$, ou prendre les sous-espaces caractéristiques sur $\mathbb{C}$, en séparant parties réelles et imaginaires des solutions complexes, on trouve les solutions réelles indépendantes, (voir 13.27, 13.25).

Pensez à faire des *changements de variable*, pour simplifier une résolution, (voir 13.28).

Les équations différentielles avec des *valeurs absolues* se traitent en intégrant les différentes formes prises par l'équation, puis en étudiant soigneusement les raccords, (13.29).

Vous pouvez rencontrer des *équations fonctionnelles* qui vous conduirons à dériver : mais le problème ainsi obtenu **n'étant pas équivalent** au problème donné, il ne faudra pas oublier de vérifier quelles solutions garder, (13.14. 13.15, 13.22, 13.23).

Énoncés

13.1. Résoudre l'équation différentielle $xy'^2 - y'^3 = 0$.

13.2. Résoudre l'équation différentielle $xy'^2 + x - y'^3 = 0$.

13.3. Soit $a > 0$. Trouver les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $f'(x) = f(a^2/x)$.

13.4. Résoudre l'équation différentielle $y^3 + y'^3 - 3yy' = 0$.

13.5. Intégrer l'équation différentielle :

$x^2y'' - 2nxy' + n(n+1)(x^2+1)y = 0$, où n est un entier fixé.

13.6. Soit A une matrice carrée d'ordre 3, nilpotente. Résoudre l'équation différentielle $X'(t) = A \cdot X(t)$, avec $X(t)$ matrice colonne d'ordre trois. Nature des trajectoires.

13.7. Soit un espace euclidien E, u une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $SO(E)$.

Montrer que :

$$(\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, u(t+s) = u(t)u(s))$$
$$\Leftrightarrow (\exists a \in L(E), a + {}^t a = 0 \text{ et } u(t) = \exp(ta)).$$

13.8. a) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, additif, différent de $\{0\}$. On pose $\lambda = \inf(G \cap]0, +\infty[)$. Déterminer la forme de G suivant λ.

b) Soient α et β deux réels non nuls. Discuter la nature du sous-groupe additif qu'ils engendrent.

c) Soit f une application continue et non constante de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrer que l'équation différentielle $y'' - y = f$ admet au plus une solution périodique.

13.9. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Trouver les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL(E), o)$.

13.10. Intégrer l'équation différentielle :

(E) : $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

Solutions sur $\mathbb{R}$.

13.11. Résoudre l'équation différentielle $(x^2-1)y''-6y = 0$.

13.12. Résoudre : $(x-1)y''+(4x-5)y'+(4x-6)y = xe^{-2x}$.

13.13. Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2y''+4xy'+2y = \ln(1-x).$$

13.14. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que, pour tout x réel, $f''(x)+f(-x) = x+\cos x$.

13.15. Trouver les fonctions $f :]0,+\infty[\mapsto\mathbb{R}$, dérivables et telles que, pour tout $x>0$, on ait $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

13.16. Soit une application f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)+f''(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Montrer que $f(x)+f(x+\pi)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

13.17. Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\lim_{x\to+\infty}(f''(x)+2f'(x)+f(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

13.18. Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, majorée et telle qu'il existe $\alpha>0$ vérifiant :

$$\forall x \geqslant 0,\ f''(x) \geqslant \alpha f(x).$$

a) Montrer que f' croît et que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0, f(x) \leqslant f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}}$.

13.19. Soient f et g continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $(a<b)$, f étant à valeurs négatives. Montrer que l'équation différentielle :

$$y''+f(x)y = g(x),$$

admet une et une seule solution sur $[a, b]$, vérifiant $y(a) = y(b) = 0$.

13.20. Montrer que l'équation différentielle :

$$x^2y'+x(2-x)y = e^x-1+x,$$

admet une et une seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

13.21. Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec, pour tout $n > 0$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}.$$

Existence et calcul de la limite de la suite des $\dfrac{a_n}{n^2}$.

13.22. Trouver f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et telle que, pour tout x réel, $f'(x) = xf(-x)$.

13.23. Déterminer f continue de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout x de $]0, 1[$, $\displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(x)$.

13.24. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + e^x y = 0,$$

sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

13.25. Résoudre le système :

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{X}(t),$$

où $\mathrm{X}(t)$ est une matrice colonne à trois lignes.

13.26. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = 7x + y + 4z, \\ y' = -x - 7y - 4z, \\ z' = -6x + 6y. \end{cases}$$

13.27. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = 3x + z, \\ y' = 2x + y + (1 - a^2)z, \\ z' = -x + y + z, \end{cases}$$

avec a constante réelle.

13.28. On considère l'équation différentielle :

(E) : $(1+x^2)y''+xy'-\alpha^2 y = 0$, avec $\alpha > 0$.

a) Trouver un changement de variable qui ramène cette équation à une équation à coefficients constants.

b) L'équation (E) admet-elle des solutions polynomiales ? Développables en série entière ?

c) Donner le développement en série entière de la fonction :

$f : x \leadsto \mathrm{ch}(\alpha \operatorname{Arg\,sh} x)$.

13.29. On considère l'équation différentielle :

(E) : $xy'+|y| = 2(x^2-4)$.

Chercher une solution maximale telle que $y(1) = 1$. Unicité ?

Solutions

13.1. L'équation se factorise en $y'^2(x-y') = 0$.

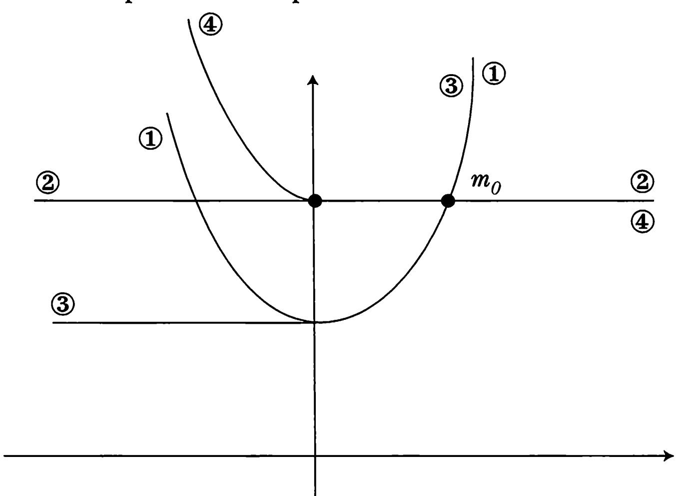
Soit (E_1) l'équation différentielle $y' = 0$ et $E_2 : x-y' = 0$, (E) désignant l'équation différentielle de départ.

Les courbes intégrales de E_1 sont les droites $D_k : y = \text{cte} = k$; les courbes intégrales de E_2 sont les paraboles P_a d'équations $y = \frac{x^2}{2}+a$.

Soit $m_0(x_0, y_0)$ un point situé sur une courbe intégrale, C, avec $y'_0 \neq 0$, la condition $y' \neq 0$ reste localement vraie, donc, sur un voisinage $V(m_0)$, $V(m_0) \cap C$ est une courbe intégrale de E_2, donc du type parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}+y_0-\frac{x_0^2}{2}$ en fait.

Or, sur cette parabole, on a $y' \neq 0$ pour tout $x \neq 0$: on y reste tant que l'on ne traverse pas l'axe des ordonnées, (ce qui supposait $x_0 \neq 0$).

Si en $m_0(x_0, y_0)$, *avec* $x_0 \neq 0$, on a $y'_0 = 0$, on n'est pas sur une parabole, (sinon $y'_0 = x_0 \neq 0$), donc $y'_0 - x_0 \neq 0$, et cette condition reste localement vraie : il existe $W(m_0)$ voisinage de m_0 tel que $W(m_0) \cap C$ soit la droite d'équation $y = y_0$, mais alors $y'-x = -x$ restera $\neq 0$ tant que x ne s'annulera pas, donc la partie de C située dans le demi-plan



signe (x) = signe (x_0) est courbe intégrale de E_1, c'est-à-dire la demi-droite $y = y_0$. Sur l'axe des ordonnées, tout arc de parabole qui y parvient peut se raccorder avec une demi-droite.

Les solution maximales passant par $m_0(x_0, y_0)$, avec $x_0 \neq 0$ sont donc

① : la parabole d'équation $y - y_0 = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$,

② : la droite $y = y_0$,

③ : la courbe obtenue en raccordant l'arc de parabole passant par m_0 avec la demi-droite $y = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$ située dans le demi-plan limité par Oy, ne contenant pas m_0,

④ : la courbe, raccord de la demi-droite $y = y_0$ avec la demi-parabole $y = \frac{x^2}{2} + y_0$, (situées de part et d'autre de Oy), voir schéma.

On a également quatre solutions maximales du même type si $x_0 = 0$.

13.2. Pour mettre l'équation sous forme résoluble, il faut « calculer » y', donc résoudre une équation du troisième degré, et commencer pour cela par en connaître le nombre de racines.

Posons $f(x, t) = -t^3 + xt^2 + x$.

Pour en connaître le nombre de zéros, pour $x \neq 0$, $t = 0$ n'étant pas solution, en posant $s = \frac{1}{t}$ et en divisant par x on a une équation qui s'écrit $s^3 + s - \frac{1}{x} = 0$, avec $p = 1$ et $q = -\frac{1}{x}$ on a $4p^3 + 27q^2 = 4 + \frac{27}{x^2} > 0$: il y a une seule racine simple.

Pour $x_0 \neq 0$, (donc en un point $m_0 : (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \Omega$), l'équation $f(x_0, y') = -y'^3 + x_0 y'^2 + x_0 = 0$ admet une seule racine simple, α, et comme $\frac{\partial f}{\partial y'}(x_0, \alpha) \neq 0$, (zéro simple), le Théorème des fonctions implicites s'applique, donc dans un voisinage V de m_0, l'équation $f(x, y') = 0$

est équivalente à une expression du type $y' = \varphi(x, y)$, (y n'intervient pas ici), avec φ de classe C^1, donc le Théorème de Cauchy Lipschitz s'applique. Finalement, par tout point de l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ il passe une et une seule courbe maximale, solution de $f(x, y')$, *restant dans* Ω.

<u>*Résolution.*</u> L'équation est incomplète : on en cherche des solutions en arc paramétré, en posant $y' = \dfrac{dy}{dx} = t$.

On a $x = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, ($\neq 0$ pour $t \neq 0$: n'oublions pas qu'on travaille sur Ω).

$$\text{Donc } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = t\left(\frac{3t^2}{1+t^2} - \frac{2t^4}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$= t\left[\frac{3(1+t^2)-3}{1+t^2} - \frac{2[(t^2+1)-1]^2}{(t^2+1)^2}\right]$$

$$= t\left(3 - \frac{3}{1+t^2} - 2 + \frac{4}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$= t\left(1 + \frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2}\right),$$

donc $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + \dfrac{1}{1+t^2}$ + constante.

Les courbes intégrales sont donc paramétrées par :

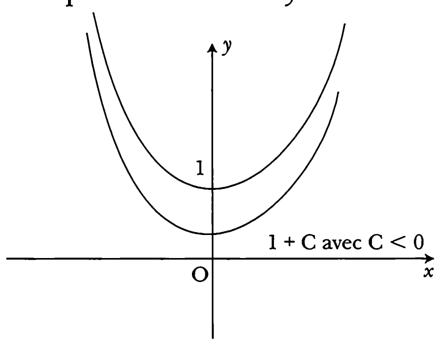
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}, \text{ fonction impaire en } t, \text{ et ,} \\[2ex] y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + C, \text{ fonction paire en } t. \end{cases}$$

De plus $x'(t) = \dfrac{(t^4+3t^2)}{(1+t^2)^2} = \dfrac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$,

et $y'(t) = \dfrac{t^3(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$, d'où le tableau de variations, (pour $t > 0$ et $C = 0$, les autres courbes s'en déduisant par symétrie par rapport à Oy, et translation de vecteur parallèle à Oy).

t	0	$\nearrow$	$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	1	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\dfrac{dy}{dx} = t$, pour $t = 0$ la tangente est parallèle à Ox, et si t tend vers $+\infty$, $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t$, $y(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ donc $\dfrac{y}{x}$ tend vers $+\infty$: on a une branche parabolique de direction Oy.



Les autres courbes intégrales se déduisent de celle-ci par translation, il y a un seul « raccord » possible pour $x = 0$.

13.3. Comme f est dérivable, $x \rightsquigarrow f\left(\dfrac{a^2}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et si f vérifie l'équation fonctionnelle :

(E) : $f'(x) = f\left(\dfrac{a^2}{x}\right)$,

ceci implique l'existence de f'' et la relation :

$$f''(x) = -\frac{a^2}{x^2} f'\left(\frac{a^2}{x}\right) = -\frac{a^2}{x^2} f\left(\frac{a^2}{\frac{a^2}{x}}\right) = -\frac{a^2}{x^2} f(x),$$

soit encore :

(F) : $x^2 f''(x) + a^2 f(x) = 0$: les fonctions f sont à chercher parmi les solutions de (F), (peut-être pas toutes car on a dérivé).

Comme $x \in]0, +\infty[$, on peut poser $x = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, et introduire la fonction $g : t \leadsto g(t) = f(e^t)$.

On a $g'(t) = e^t f'(e^t)$, et :

$$\begin{aligned} g''(t) &= (e^t)^2 f''(e^t) + e^t f'(e^t) \\ &= (e^t)^2 f''(e^t) + g'(t). \end{aligned}$$

Si f vérifie (F), la fonction g est telle que $(e^t)^2 f''(e^t) = -a^2 f(e^t)$, et finalement g vérifie l'équation différentielle.

(G) : $g''(t) = -a^2 g(t) + g'(t)$,

linéaire à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - r + a^2 = 0$, de racines, réelles ou complexes $\dfrac{1 \pm (1 - 4a^2)^{1/2}}{2}$.

Poursuivons pour $|a| < \dfrac{1}{2}$, donc en fait pour $0 < a < \dfrac{1}{2}$.

On a une expression du type $g(t) = \mathrm{A}e^{r_1 t} + \mathrm{B}e^{r_2 t}$ avec $r_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2}$, soit comme $g(t) = f(e^t)$, une expression $f(x) = \mathrm{A}x^{r_1} + \mathrm{B}x^{r_2}$. Mais alors f vérifie l'équation (E) de départ, si et seulement si $r_1 \mathrm{A}x^{r_1 - 1} + r_2 \mathrm{B}x^{r_2 - 1} = \mathrm{A}a^{2r_1}x^{-r_1} + \mathrm{B}a^{2r_2}x^{-r_2}$.

Or $r_1 - 1 = -r_2$ et $r_2 - 1 = -r_1$, (somme des racines = 1 dans l'équation caractéristique), et vu l'indépendance, pour $r_1 \neq r_2$, des fonctions $x \rightsquigarrow x^{-r_1}$ et $x \rightsquigarrow x^{-r_2}$, cette identité équivaut à A et B vérifiant le système homogène :

$$\begin{cases} \mathrm{A}r_1 - \mathrm{B}a^{2r_2} = 0 \\ \mathrm{A}a^{2r_1} - r_2\mathrm{B} = 0, \end{cases}$$

système de rang 1, ($a \neq 0$ et déterminant $-r_1r_2 + a^{2(r_1+r_2)}$, avec $r_1r_2 = a^2$ et $r_1 + r_2 = 1$, donc de déterminant $-a^2 + a^2 = 0$).

On peut prendre A quelconque et $\mathrm{B} = \mathrm{A}r_1a^{-2r_2}$, *d'où les solutions* $f(x) = \mathrm{A}(x^{r_1} + r_1a^{-2r_2}x^{r_2})$, pour $0 < a < \frac{1}{2}$.

On peut reprendre la détermination des solutions de E, à partir de $f(x)$ du type $(\mathrm{A}\ln x + \mathrm{B})\sqrt{x}$, si $a = \frac{1}{2}$, (racine double de l'équation caractéristique), et de $\sqrt{x}(\mathrm{A}\cos(\omega\ln x) + \mathrm{B}\sin(\omega\ln x))$, avec $\omega = \sqrt{4a^2 - 1}$, si $a > \frac{1}{2}$. Moi, cela ne me dit rien. Cette nuit il a neigé, tout est blanc, je vais aller me promener dans les bois.

13.4 L'équation est incomplète : en paramétrant la cubique Γ d'équation $u^3 + v^3 - 3uv = 0$, on se tirera d'affaire. Commençons par mettre sous forme résoluble, c'est-à-dire par calculer y'.

On a une équation du troisième degré en y' : $y'^3 - 3yy' + y^3 = 0$, et $4p^3 + 27q^2 = -\ 4 \cdot 27y^3 + 27y^6 = 27y^3(y^3 - 4)$, expression qui s'annule en changeant de signe en 0 et $2^{2/3}$.

Pour $y < 0$ ou $y > 2^{2/3}$, $4p^3 + 27q^2 > 0$: on a une seule racine y'_1, et pour $0 < y < 2^{2/3}$ on a trois racines distinctes, y'_1, y'_2, y'_3.

De plus, en notant $\varphi(x, y, y') = y'^3 - 3yy' + y^3$, au voisinage d'un point x_0, y_0, y'_i, on aura $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}$, non nul, (racines simples) donc mise sous forme résoluble de l'équation, avec application du Théorème de Cauchy Lipschitz, puisque localement le Théorème des fonctions implicites s'applique.

Finalement, en chaque point $m_0 : (x_0, y_0)$ de la bande $0 < y < 2^{2/3}$, on aura trois courbes intégrales qui passeront, (localement, et même globalement si on reste dans cette bande), alors que pour $y_0 < 0$ ou $y_0 > 2^{2/3}$ il n'y en aura qu'une.

Il faudra étudier les possibilités de raccord pour $y = 0$ ou $y = 2^{2/3}$.

On peut également remarquer que les courbes intégrales doivent être stables par translation parallèle à Ox, (non présence de x).

Résolution. On coupe la cubique à point double $u^3 + v^3 - 3uv = 0$ par la droite $v = tu$, d'où pour $u \neq 0$, $u(1 + t^3) - 3t = 0$, et, pour $t \neq -1$, $u = \dfrac{3t}{1 + t^3}$ et $v = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$, ce qui conduit à poser :

$$y = \frac{3t}{1 + t^3}, \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

On a alors $\mathrm{d}y = \dfrac{3(1 + t^3) - 9t^3}{(1 + t^3)^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{3t^2}{(1 + t^3)}\mathrm{d}x,$

d'où l'on tire $\mathrm{d}x = \dfrac{1 - 2t^3}{t^2(1 + t^3)}\mathrm{d}t.$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1 - 2t^3}{t^2(1 + t^3)} = \frac{1 + t^3 - 3t^3}{t^2(1 + t^3)} = \frac{1}{t^2} - \frac{3t}{1 + t^3}$$

$$= \frac{1}{t^2} - \frac{3t}{(1 + t)(t^2 - t + 1)}$$

$$= \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1 + t} - \frac{t + 1}{t^2 - t + 1}$$

$$= \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{(2t-1)}{t^2-t+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

d'où l'on tire :

$$x(t) = -\frac{1}{t} + \ln\frac{|1+t|}{\sqrt{t^2-t+1}} - \sqrt{3}\operatorname{Arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c,$$

à joindre à :

$$y(t) = \frac{3t}{1+t^3},$$

pour obtenir une paramétrisation des courbes intégrales.

La présence de la constante d'intégration c redonne l'aspect invariance par translation parallèle à Ox des courbes intégrales.

Construction des courbes intégrales.

On construit la courbe C_0 obtenue pour $c = 0$.

On sait que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{(1-2t^3)}{t^2(1+t^3)}$, change de signe en $2^{-1/3}$ et -1.

Puis $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3t^2}{1+t^3}\cdot\dfrac{(1-2t^3)}{t^2(1+t^3)} = \dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, change de signe en $2^{-1/3}$ d'où le tableau de variations.

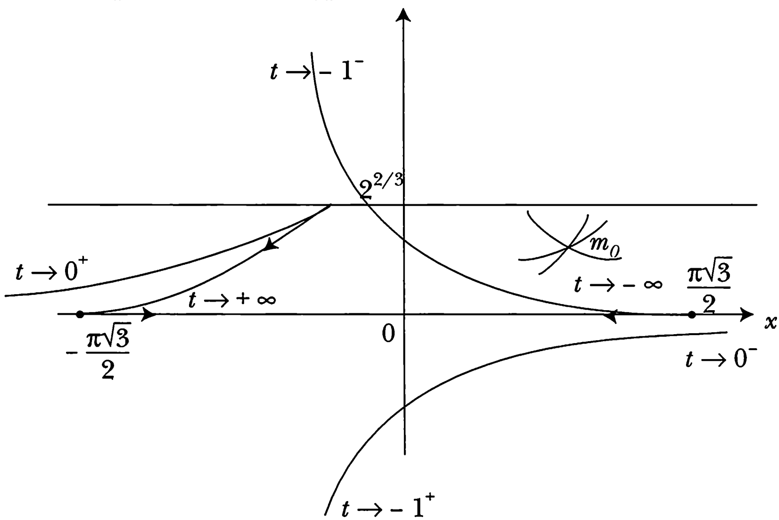
t	$-\infty$		-1		0		$2^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
x'		$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
x	$\sqrt{3}\,\frac{\pi}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	m	↘	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$2^{2/3}$	↘	0
y'		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	

Pour $t = 2^{-1/3}$, on a un point singulier, d'ordonnée $y = 2^{2/3}$, tiens tiens ! Comme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, les demi-tangentes en ce point ont pour pente $2^{1/3}$, sauf erreur.

Pour t tendant vers + ou − l'infini, on a un point d'arrêt, avec une demi-tangente de pente nulle, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

Étude de la branche infinie : si t tend vers -1, x est équivalent à $\ln|1+t|$ et y à $-\dfrac{2}{3(1+t)}$ donc $\left|\dfrac{y}{x}\right|$ tend vers l'infini : on a une branche parabolique de direction $\mathrm{O}y$.

On peut passer au tracé approximatif de C_0.



Par translation parallèlement à $\mathrm{O}x$ de C_0, on comprend bien que par chaque m_0 de la bande $0 < y < 2^{2/3}$, il passera trois courbes intégrales, mais une seule pour $y < 0$ ou $y > 2^{2/3}$. Enfin la droite $y = 0$ est courbe intégrale particulière, (cela se voit sur l'équation), mais pour un point de la droite $y = 2^{2/3}$, il ne passe qu'une courbe intégrale : la branche associée à $t \in]-\infty, -1[$ de C_0, ou d'une translatée de C_0.

13.5. Sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ on a un espace de solutions de dimension 2, sur $\mathbb{R}^*$, il est de dimension 4, et sur $\mathbb{R}$, on ne le saura qu'après résolution.

On cherche une solution sous forme de la somme d'une série entière.

En posant $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, on doit avoir :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k - 2n \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k + n(n+1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+2} + n(n+1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0.$$

Les termes de degré 0 et 1 sont à part et donnent : $n(n+1)\ a_0 = 0$; $-2na_1 + n(n+1)\ a_0 = 0$. Comme on travaille sans doute pour $n(n+1) \neq 0$, (sinon, résolution facile), on a $a_0 = a_1 = 0$.

Pour le terme de degré k, avec $k \geqslant 2$, on a la relation :

$(k(k-1) - 2nk + n(n+1))a_k + n(n+1)a_{k-2} = 0$, ou encore comme $k^2 - k - 2nk + n^2 + n$ est nul si $k = n$, cela se factorise en $(k-n)(k-(n+1))a_k = -n(n+1)a_{k-2}$.

Pour $k = n$, il en résulte que a_{n-2} est nul, et pour $k = n+1$, que a_{n-1} est nul, d'où par une récurrence descendante, les a_p sont nuls pour $p < n$.

Puis on a :

$$2 \cdot 1 \cdot a_{n+2} = -n(n+1)a_n,$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}$$

$$(2p)(2p-1)a_{n+2p} = (-n(n+1)a_{n+2p-2}),$$

d'où l'on tire $$a_{n+2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_n (n(n+1))^p,$$

et on aurait de même $$a_{n+2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_{n+1} (n(n+1))^p.$$

Comme les deux séries entières $a_n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(n(n+1))^p x^{n+2p}}{(2p)!}$ et $a_{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(n(n+1))^p x^{n+2p+1}}{(2p+1)!}$ ont un rayon de convergence infini, on obtient la solution générale de l'équation différentielle sous la forme :

$$y = a_n x^n \cos(\sqrt{n(n+1)}x) + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} x^n \sin(\sqrt{n(n+1)}x).$$

On dispose donc d'un espace de solutions de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

13.6. La relation $X'(t) = A \cdot X(t)$ se dérivant, donne $X'' = AX' = A^2X$ et $X^{(3)} = AX^{(2)} = A^3X = 0$ car A nilpotente, carrée d'ordre trois est telle que $A^3 = 0$.

On a donc $X(t)$ du type $t^2V_1 + tV_2 + V_3$, avec V_1, V_2, V_3 trois matrices colonnes constantes, (ou trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$), mais on a dérivé, donc toutes ces solutions ne conviennent peut-être pas.

D'abord $X'(0) = A \cdot X(0)$, avec $X'(t) = 2tV_1 + V_2$, conduit à $V_2 = A \cdot V_3$;

puis $X''(0) = A^2X(0)$, avec $X''(t) = 2V_1$, donne $2V_1 = A^2 \cdot V_3$, donc $X(t) = \left(\frac{t^2}{2}A^2 + tA + I_3\right)(V_3)$, et cette valeur de X vérifie l'équation de départ.

En prenant pour V_3 les trois vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$, on obtient trois solutions valant ces trois valeurs de V_3 si $t = 0$, elles sont donc indépendantes et on a toutes les solutions de l'équation différentielle, puisqu'elles forment un espace vectoriel de dimension trois.

Nature des trajectoires.

Soit $\mathbb{R}^3$ affine, O une origine, on pose $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{X(t)}$, et $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{X(0)}$, on aura $\overrightarrow{M_0M(t)} = \frac{t^2}{2}A^2(\overrightarrow{V_3}) + tA(\overrightarrow{V_3})$.

Si $\left\{A^2(\overrightarrow{V_3}), A(\overrightarrow{V_3})\right\}$ est liée on a une trajectoire rectiligne ; et si cette famille est libre, $M(t)$ décrit une parabole dans le plan affine passant par M_0, de direction $F = \text{Vect}\,(A^2(\overrightarrow{V_3}), A(\overrightarrow{V_3}))$, puisque dans le repère $(M_0\ ;\ A^2(\overrightarrow{V_3}), A(\overrightarrow{V_3}))$ de ce plan affine, les coordonnées de $M(t)$ sont $x = \dfrac{t^2}{2}$ et $y = t$, d'où l'équation $2x - y^2 = 0$ de cette trajectoire.

13.7. La relation $u(t+s) = u(t)u(s)$, supposée vérifiée, prouve que $u(t)$ et $u(s)$ commutent. De plus, $(t = s = 0)$ on a $u(0) = (u(0))^2$, donc, $u(0)$ étant un isomorphisme, on a $u(0) = \text{id}_E$.

On dérive l'égalité en t, on a $u'(t+s) = u'(t)u(s)$, donc, avec $t = 0$, on obtient l'équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre, $u'(s) = a \cdot u(s)$, avec $a = u'(0)$.

Cette équation linéaire a pour solution valant $u(0) = \text{id}_E$ pour $s = 0$, la fonction $s \rightsquigarrow e^{sa}$.

Comme on a procédé par implications, (on dérive), il nous faut d'abord trouver a pour que $u(s) \in SO(E)$ et que l'égalité de départ soit vérifiée.

Or, avoir $u(s)$ orthogonal, c'est avoir $u(s)\,{}^t(u(s)) = \text{id}_E$, soit, la transposition étant continue, (linéaire en dimension finie) :

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{s^p}{p!}a^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{s^q}{q!}({}^t a)^q\right) = \text{id}_E.$$

Attention à ne pas écrire $e^{sa}e^{s({}^t a)} = e^{s(a + {}^t a)}$ car on ne sait pas si a et ${}^t a$ commutent.

Il s'agit de séries absolument convergentes, le « terme en s » du premier membre est $s(a + {}^t a)$ qui doit être nul pour tout s, d'où la condition ${}^t a = -a$, et cette fois, l'égalité $u(s)\,{}^t(u(s)) = e^{sa}e^{-sa} = e^0 = \text{id}_E$, car a et $-a$ commutent.

Il reste à calculer le déterminant de e^{sa}, il est égal à 1 ou à -1 puisque e^{sa} est orthogonal. Or $s \rightsquigarrow \det(e^{sa})$ est une application continue, l'image de $\mathbb{R}$ par cette application est un connexe contenant 1, image de 0, c'est donc $[1, 1]$ et on a bien $u(s) = e^{sa} \in \mathrm{SO(E)}$ si $a + {}^t a = 0$.

On a, à la fois achevé la justification de la première implication et vérifié la réciproque, puisque $u(t) = \exp(ta)$ vérifie l'égalité $u(t)u(s) = u(t+s)$.

13.8 a) Comme $G \neq \{0\}$, il existe g non nul dans G, et si $g < 0$, on a $-g > 0$ dans G, donc $G \cap]0, +\infty[$, non vide, admet une borne inférieure, λ qui est dans l'adhérence, $\overline{G}$ de G.

On constate d'abord que $\overline{G}$ est sous-groupe, (non vide car $G \subset \overline{G}$, et si x et y sont dans $\overline{G}$, avec $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suites d'éléments de G qui convergent vers x et y respectivement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = x - y$, d'où $x - y \in \overline{G}$).

Si $\lambda > 0$, on a $\lambda\mathbb{Z} \subset \overline{G}$, et si $a \in \overline{G}$, il existe p dans $\mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant r < \lambda$, tels que $a = p\lambda + r$, (division euclidienne), mais alors $r = a - p \cdot \lambda \in \overline{G}$. L'hypothèse $r > 0$, avec $0 < r < \lambda$ impliquerait l'existence d'éléments g de G tels que $r \leqslant g < \lambda$, (r adhérent à G), ce qui contredit la définition de λ. Donc $r = 0$ et $a = p \cdot \lambda \in \lambda\mathbb{Z}$.

On a donc $\overline{G} = \lambda\mathbb{Z}$, partie discrète de $\mathbb{R}$; mais comme λ est adhérent à G, $]\lambda - \frac{\lambda}{2}, \lambda + \frac{\lambda}{2}[\cap G$ est non vide, or on a :

$$\left( ]\lambda - \frac{\lambda}{2}, \lambda + \frac{\lambda}{2}[\cap G \right) \subset \left( ]\lambda - \frac{\lambda}{2}, \lambda + \frac{\lambda}{2}[\cap \overline{G} \right) = \{\lambda\} \text{ d'où :}$$

$$]\lambda - \frac{\lambda}{2}, \lambda + \frac{\lambda}{2}[\cap G = \{\lambda\} \text{ et } \lambda \in G \Rightarrow G = \lambda\mathbb{Z}.$$

Si $\lambda = 0$, on a G partout dense dans $\mathbb{R}$, car il existe une suite d'éléments g_n de G, positifs strictement, et qui convergent vers 0. Puis, pour tout x de $\mathbb{R}$, et tout $\varepsilon > 0$, avec n_0 tel que $0 < g_{n_0} < \varepsilon$, il existe un p dans $\mathbb{Z}$ tel que $pg_{n_0} \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, d'où un $pg_{n_0} \in G$ avec $|x - pg_{n_0}| < \varepsilon$: $x \in \overline{G}$.

Finalement G *est partout dense si et seulement si* $\lambda = 0$;

G *est du type* $\lambda\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $\lambda > 0$;

ceci pour G non réduit à $\{0\}$, et $\{0\} = 0\mathbb{Z}$ en fait.

b) Soient α et β réels non nuls et $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ le sous-groupe additif non réduit à 0, qu'ils engendrent.

Si G est du type $\lambda\mathbb{Z}$, il existe p non nul dans $\mathbb{Z}$ tel que α, (non nul), s'écrive $\alpha = p\lambda$, et de même on a q non nul dans $\mathbb{Z}$ tel que β de G s'écrive $\beta = q\lambda$, d'où $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, en écrivant $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$, sous forme irréductible, avec $q > 0$, on a $\alpha = \beta\frac{p}{q}$, donc :

$$\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \beta\left(\frac{p}{q}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = \frac{\beta}{q}(p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}).$$

Mais, p et q étant premiers entre eux, il existe u et v de $\mathbb{Z}$ tels que $up + vq = 1 \in p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$, (Bézout, jamais loin), d'où $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \frac{\beta}{q} \cdot \mathbb{Z}$.

Donc $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est du type $\lambda\mathbb{Z}$ si et seulement si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

c) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble G de ses périodes, $G = \{t \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)\}$, est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, éventuellement réduit à $\{0\}$, (vérification facile).

De plus, si f est continue, G est fermé, car, pour x fixé, $\varphi_x : t \rightsquigarrow f(x+t) - f(x)$ est continue, et G est l'intersection des fermés $\varphi_x^{-1}(\{0\})$, lorsque x parcourt $\mathbb{R}$; donc soit $G = \mathbb{R}$, soit G est du type $\lambda\mathbb{Z}$, avec λ éventuellement nul.

Si f n'est pas constante, $G = \mathbb{R}$ est exclu, (sinon, tout réel x étant période, on aurait $f(x) = f(0+x) = f(0)$), donc G est du type $\lambda\mathbb{Z}$.

Si on suppose que l'équation différentielle $y'' - y = f$ admet deux solutions périodiques, y_1 et y_2, de plus petites périodes respectives T_1 et T_2, d'abord, $y''_1 - y_1 = f$ étant périodique de période T_1, on a $T_1 \in G$, donc $\lambda \neq 0$ et il existe p_1 dans $\mathbb{Z}$ tel que $T_1 = p_1\lambda$, et de même il existe p_2 dans $\mathbb{Z}$ tel que $T_2 = p_2\lambda$. Mais alors $p_2T_1 = p_2p_1\lambda = p_1T_2$ est période de y_1 et de y_2, donc de $y_1 - y_2$, solution de l'équation homogène $y'' - y = 0$.

Comme $y'' - y = 0$ a pour solution générale les fonctions du type $y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$, non périodiques, (voir leur comportement en $\pm\infty$ par exemple, des fonctions continues périodiques sont bornées sur $\mathbb{R}$), sauf si $\alpha = \beta = 0$, c'est que $y_1 - y_2 = 0$.

Finalement $y'' - y = f$ admet au plus une solution périodique.

13.9. Soit f un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, (une base de $\mathrm{E} \cong \mathbb{C}^n$ étant fixée, on identifie $\mathrm{GL(E)}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, une matrice A régulière étant considérée comme un automorphisme de $\mathbb{C}^n$).

Pour tout t et t' de $\mathbb{R}$ on a $f(t+t') = f(t)f(t')$, et en particulier, si $t' = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t)f(0)$, avec $f(t)$ régulière, donc $f(0) = \mathrm{I}_n$.

Pour s'inspirer des morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, du type $t \rightsquigarrow e^{at}$, ce qui peut se justifier à partir d'une équation différentielle, on va d'abord justifier la dérivabilité de f.

On intègre, en t, la relation :

① $f(t+t') = f(t')f(t)$, il vient, pour s réel

$$\int_0^s f(t+t')\,\mathrm{d}t = f(t')\int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t,$$

(il s'agit d'intégrales prises dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, « composante par composante », vu les règles de calcul matriciel et la linéarité de l'intégrale).

Le changement de variable $u = t + t'$, conduit à :

② $f(t')\int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t'}^{t'+s} f(u)\,\mathrm{d}u$, et, le second membre étant dérivable en t', (car f est continue), si on pouvait inverser la matrice $\mathrm{B}(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est une constante par rapport à t', on obtiendrait une expression dérivable de $f(t')$.

Mais l'application $s \rightsquigarrow \mathrm{B}(s)$ est dérivable, de dérivée $\mathrm{B}' = f$, en particulier $\mathrm{B}'(0) = f(0) = \mathrm{I}_n = \lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} \dfrac{\mathrm{B}(s) - \mathrm{B}(0)}{s} = \lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}$, puisque $\mathrm{B}(0) = 0$.

On a alors $\lim\limits_{s \to 0} \left(\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}\right) = 0$, donc, pour la norme d'application linéaire continue, il existe $s_0 > 0$ tel que $0 < |s| < s_0$ implique $\left|\left|\left|\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}\right|\right|\right| < 1$, et alors l'application $\mathrm{I}_n - \left(\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}\right) = \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}$ est inversible, (d'inverse $\mathrm{C}(s) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}\right)^k$, mais c'est sans intérêt), et on a également $\mathrm{B}(s) = s \cdot \dfrac{\mathrm{B}(s)}{s}$ inversible, d'inverse $\dfrac{1}{s}\mathrm{C}(s) = \mathrm{D}(s)$.

La relation ② s'écrit alors, pour s fixé avec $0 < |s| < s_0$,

$f(t') = \left(\int_{t'}^{t'+s} f(u)\mathrm{d}u\right) \mathrm{D}(s)$, et sous cette forme on voit que *f est dérivable par rapport à t'*.

Sachant maintenant que le morphisme f est dérivable, (peu importe le nom de la variable), on dérive la relation ① en t', donc $f'(t')f(t) = f'(t+t')$, d'où, avec $t' = 0$, l'équation différentielle linéaire :

③ $\quad f'(t) = f'(0) \cdot f(t)$.

En notant $\mathrm{A} = f'(0)$, matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la solution de ③ valant $f(0)$ si $t = 0$ est tout simplement définie par :

$$f(t) = e^{t\mathrm{A}} \circ f(0) = e^{t\mathrm{A}} \text{ car } f(0) = \mathrm{I}_n \; ;$$

donc si f est un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il est de ce type ; puis il est facile de vérifier qu'une telle application est un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, car, pour t et t' réels, comme $t\mathrm{A}$ et $t'\mathrm{A}$ sont des matrices qui commutent, on a :

$$f(t+t') = e^{(t+t')\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{A}+t'\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{A}} \circ e^{t'\mathrm{A}} = f(t) \circ f(t').$$

13.10. Sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, on a un espace affine de solutions de dimension 2, et il semble indiqué de poser $z = x^2 y$ pour simplifier l'équation (E), changement de fonction licite pour $x \neq 0$.

On a $z' = x^2y' + 2xy$ et $z'' = x^2y'' + 4xy' + 2y$, d'où, comme (E) s'écrit : $x^2y'' + 4xy' + 2y - x^2y = 1$, on a y solution de (E) si et seulement si z vérifie $z'' - z = 1$.

Cette nouvelle équation admet -1 pour solution particulière, l'intégrale générale de l'équation sans second membre étant $z(x) = a\operatorname{ch}x + b\operatorname{sh}x$, d'où $y = \dfrac{a\operatorname{ch}x + b\operatorname{sh}x - 1}{x^2}$, intégrale générale sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, de E.

Si on veut des solutions définies sur $\mathbb{R}$, $y(0), y'(0)$ et $y''(0)$ doivent exister, ce qui impose $a = 1$ et $b = 0$, donc $y = \dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{x^2}$ est la seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

13.11. Le coefficient, $x^2 - 1$, de y'', s'annulant en 1 et -1, les solutions de l'équation différentielle linéaire forment un espace vectoriel de dimension 2 sur $]-\infty, -1[$ ou sur $]-1, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$.

Recherche d'une solution développable en série entière sur un voisinage de 0.

On pose $y = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$, ce sera solution si on a un rayon de convergence $R > 0$, et si :

$$\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n \geqslant 0} 6a_n x^n = 0,$$

d'où, (terme constant et de degré 1 à part) :

$$-2a_2 - 6a_0 = 0,$$

$$-6a_3 - 6a_1 = 0,$$

et pour $k \geqslant 2$: $k(k-1)a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2} - 6a_k = 0$,

d'où $a_2 = -3a_0$; $a_3 = -a_1$, et, pour $k \geqslant 2$,

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} = (k^2 - k - 6)a_k = (k+2)(k-3)a_k,$$

soit
$$a_{k+2} = \frac{k-3}{k+1}a_k.$$

Mais ceci conduit à $a_5 = 0$, puis $a_7 = \dfrac{2}{6}a_5 = 0$, et par récurrence, $a_{2k+1} = 0$ pour $k \geqslant 2$.

Avec $a_0 = 0$, on a $a_{2k} = 0$, a_1 quelconque, $a_3 = -a_1$, et $y(x) = a_1(x - x^3)$ est solution, sur $\mathbb{R}$ en fait, de l'équation.

Avec $a_1 = 0$, a_0 quelconque, on obtient les a_{2k+1} nuls,

puis $a_2 = -3a_0$, $a_4 = -\dfrac{a_2}{3} = a_0$ et on vérifierait que

$a_{2p} = \dfrac{3}{(2p-3)(2p-1)}a_0$, ce qui conduit une série entière de rayon de convergence 1.

On peut, en décomposant cette fraction rationnelle en p, en éléments simples, retrouver une expression de la somme de cette série, mais il semble préférable d'employer la méthode de variation des constantes à partir de la solution $y = \lambda(x - x^3)$, valable sur chacun des trois intervalles d'étude.

On a $y' = \lambda'(x - x^3) + \lambda(1 - 3x^2)$, d'où :

$$y'' = \lambda''(x - x^3) + 2\lambda'(1 - 3x^2) - 6x\lambda,$$

donc $(x^2 - 1)y'' - 6y = (x^2 - 1)(x - x^3)\cancel{\lambda''} + 2\lambda'(x^2 - 1)(1 - 3x^2)$, et, pour $x \neq 1$ ou $x \neq -1$, sur chacun des trois intervalles, on a :

$$(x - x^3)\lambda'' + 2\lambda'(1 - 3x^2) = 0,$$

équation qui s'intègre, en coupant $]-1, 1[$ en $]-1, 0[\, \cup\,]0, 1[$.

On a $\ln|\lambda'(x)| = -2\displaystyle\int \frac{(1 - 3x^2)}{x - x^3}\mathrm{d}x = -2\ln|x - x^3| + \text{constante},$

d'où $\lambda'(x) = \dfrac{A}{(x - x^3)^2}$.

On décompose $\dfrac{1}{x^2(1-x)^2(1+x)^2}$, fonction paire en fait, en éléments simples, sous la forme :

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} + \frac{c}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x^2, et si $x = 0$, on trouve $a = 1$; en multipliant par $(1-x)^2$, et si $x = 1$, on trouve $c = \dfrac{1}{4}$; pour $x = \dfrac{1}{2}$, on a

$\dfrac{1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}} = \dfrac{64}{9} = 4 + 2b + \dfrac{2b}{3} + \dfrac{1}{9} + 1$, d'où $b = \dfrac{3}{4}$. On a donc :

$$\lambda'(x) = A\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right)\right),$$

donc

$$\lambda(x) = A\left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1-x)}\right) + B,$$

d'où, en multipliant par $x(1-x^2)$, une expression de :

$$\begin{aligned} y(x) &= A\left(x^2 - 1 + \frac{3}{4}(x - x^3)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{x}{4}(1 + x - 1 + x)\right) + B(x - x^3) \\ &= A\left(\frac{3x^2}{2} - 1 + \frac{3}{4}(x - x^3)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + B(x - x^3). \end{aligned}$$

Sous cette forme, on a la solution générale sur $]-\infty, -1[$ ou sur $]-1, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$, et, pour $B = 0$, sur $]-1, 1[$ on retrouve la solution développable en série entière.

Solutions prolongeables en 1 et (ou) -1. Pour $A \neq 0$, la présence de $\frac{3}{4}x(1-x)(1+x)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, donnera, dans la dérivée, un terme en $\frac{3}{4}x(1+x)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ qui aura bien du mal à se prolonger en 1, alors que les autres termes se prolongent : en fait on ne peut pas définir $y'(1)$, (ni $y'(-1)$), alors, pensez donc pour $y''(1)$, comment faire !

Seule la solution polynomiale $B(x - x^3)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

13.12. Les solutions de l'équation différentielle forment un espace affine de dimension 2, sur $]-\infty, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$, et, il nous faudrait une solution particulière de l'équation homogène, que l'on peut, sur un voisinage de 0, chercher sous forme d'une série entière.

La présence de e^{-2x} en facteur dans le second membre, fonction qui est de classe C^∞, son inverse aussi, (e^{2x}), peut inciter à poser $y = ze^{-2x}$, d'où $y' = -2ze^{-2x} + z'e^{-2x}$ et $y'' = 4ze^{-2x} - 4z'e^{-2x} + z''e^{-2x}$ et y est solution de (E) si et seulement si z vérifie l'équation (F), (on simplifie par e^{-2x}) :

$$\text{(F)}: \quad (x-1)(z''-4z'+4z)+(4x-5)(-2z+z')+(4x-6)z = x, \text{ ou :}$$
$$(x-1)z''+z'(-4x+4+4x-5)+z(4x-4-8x+10+4x-6) = x.$$

Il ne reste que :

$$\text{(F)}: \quad (x-1)z''-z' = x,$$

équation linéaire du premier ordre en z' : il n'y a même pas de série entière à aller chercher.

L'équation homogène du premier ordre en z' donne : $z' = \mu(x-1)$, et la méthode de variation des constantes conduit à :

$$\mu'(x-1)^2 = x, \text{ pour l'équation avec second membre, d'où :}$$

$$\mu' = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}, \text{ qui donne :}$$

$$\mu(x) = \ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c, \text{ et :}$$

$$z'(x) = c(x-1)-1+(x-1)\ln|x-1|, \text{ qui s'intègre en ;}$$

$$z(x) = \frac{c(x-1)^2}{2}-x+\mathrm{D}+\int(x-1)\ln|x-1|\,\mathrm{d}x.$$

On intègre par parties : $\mathrm{d}u = (x-1)\mathrm{d}x$, $v = \ln|x-1|$,

d'où $u = \dfrac{(x-1)^2}{2}$ et $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x-1}$. On a :

$$\int(x-1)\ln|x-1|\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^2}{2}\ln|x-1|-\int\frac{1}{2}(x-1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln|x-1|-\frac{(x-1)^2}{4}.$$

Le terme en $\dfrac{(x-1)^2}{4}$ se regroupe avec $\dfrac{c}{2}(x-1)^2$, et, quitte à modifier la constante c, on obtient une expression des solutions de l'équation (E) initiale en :

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}(x-1)^2\ln|x-1|+\gamma(x-1)^2-x+\delta\right).$$

Sur cette forme, on constate que $y'(1)$ existe, mais pas $y''(1)$, donc il n'existe pas de solution définie sur $\mathbb{R}$.

13.13. La fonction $x \rightsquigarrow \ln(1-x)$, impose la condition $x < 1$, et la présence de x^2 en facteur de y'' incite à travailler sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, 1[$, intervalles sur lesquels on aura un espace affine de solutions, de dimension 2.

La curiosité me pousse à me demander ce que vaut $(x^2 y)''$.

On a $(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$, donc :

$$(x^2 y)'' = 2y + 4xy' + x^2 y'',$$

et, l'équation à intégrer se ramène à $(x^2 y)'' = \ln(1-x)$.

Comme on impose la condition $x \neq 0$, il n'est pas gênant de résoudre $z'' = \ln(1-x)$ et de diviser ensuite par x^2.

On a $z' = \int \ln(1-x)\mathrm{d}x = (x-1)\ln(1-x) - x + a$, d'où :

$$z = \int (x-1)\ln(1-x)\mathrm{d}x + ax - \frac{x^2}{2} + b.$$

En posant $u = \ln(1-x)$, $\mathrm{d}v = (x-1)\mathrm{d}x$, on aura $\mathrm{d}u = \frac{-\mathrm{d}x}{1-x}$ et $v = \frac{(x-1)^2}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x) - \int \frac{x-1}{2}\mathrm{d}x + ax - \frac{x^2}{2} + b, \\ &= \frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x) - \frac{3x^2}{4} + \alpha x + \beta, \end{aligned}$$

ce qui conduit à des solutions de l'équation initiale du type :

$$y(x) = -\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{(x-1)^2}{2x^2}\ln(1-x).$$

Les solutions définies en 0 sont associées à $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, (prendre un développement en série entière de $\ln(1-x)$), on a donc une seule solution définie sur $]-\infty, 1[$. Il faut évidemment vérifier qu'avec $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, la fonction y est 2 fois dérivable en 0, et que l'équation est vérifiée en 0.

13.14. Si f vérifie (E) : $f''(x)+f(-x) = x+\cos x$, on a f'' deux fois dérivable, d'où f quatre fois dérivable, mais $f''(x) = -f(-x)+x+\cos x$, donc f'' est quatre fois dérivable : en fait f est C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

En dérivant deux fois (E), si f vérifie (E) on aura :

$$f^{(4)}(x)+(-1)^2 f''(-x) = -\cos x,$$

soit encore, comme $f''(-x) = -f(x)-x+\cos(-x)$:

(F) $\quad f^{(4)}(x)-f(x) = x-2\cos x.$

Mais attention, on a dérivé, donc toutes les solutions de F ne conviennent peut-être pas : il y a de la vérification dans l'air !

<u>*Étude de (F).*</u> L'équation homogène a pour solution générale :

$$f(x) = a\cos x+b\sin x+c\,\mathrm{ch}x+d\,\mathrm{sh}x,$$

(combinaisons des $e^{\lambda x}$ avec $\lambda^4 = 1$, d'où $\lambda = \pm 1$ et $\pm i$).

Pour l'équation avec second membre, on traite séparément :

$y^{(4)}-y = x$, de solution $-x$, et :

$y^{(4)}-y = -2\cos x$, dont une solution particulière sera en $y = ax\cos x+bx\sin x$, puisque i et $-i$ sont solutions simples de l'équation caractéristique $\lambda^4-1 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} y' &= -ax\sin x+bx\cos x+a\cos x+b\sin x, \\ y'' &= -ax\cos x-bx\sin x-2a\sin x+2b\cos x, \\ y^{(3)} &= ax\sin x-bx\cos x-3a\cos x-3b\sin x, \\ y^{(4)} &= ax\cos x+bx\sin x+4a\sin x-4b\cos x, \end{aligned}$$

d'où :

$y^{(4)}-y = 4a\sin x-4b\cos x$, ce qui sera égal à $-2\cos x$ si $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$, d'où $y = \frac{x}{2}\sin x$.

L'intégrale générale de (F) devient donc :

$$f(x) = a\cos x+b\sin x+c\,\mathrm{ch}x+d\,\mathrm{sh}x-x+\frac{x}{2}\sin x,$$

et il reste à voir s'il y a des conditions sur a, b, c et d, pour que f vérifie (E).

On a :

$$f''(x) = -a\cos x-b\sin x+c\,\mathrm{ch}x+d\,\mathrm{sh}x-\frac{x}{2}\sin x+\cos x,$$

$$f(-x) = a\cos x-b\sin x+c\,\mathrm{ch}x-d\,\mathrm{sh}x+x+\frac{x}{2}\sin x,$$

donc :

$$f''(x)+f(-x) = -2b\sin x + 2c\operatorname{ch} x + x + \cos x,$$

et ce sera égal à : $x+\cos x$, si et seulement si $b = c = 0$.

Finalement les solutions de (E) sont les fonctions f définies par $f(x) = a\cos x + d\operatorname{sh} x - x + \frac{x}{2}\sin x$: elles forment un espace affine de dimension deux.

13.15. Comme $x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$ et f sont dérivables, si f vérifie :

① $\quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout $x > 0$,

on a f' dérivable, avec $f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où à son tour f'' dérivable, et par récurrence, f est C^∞ sur $]0, +\infty[$.

En dérivant ①, (ne pas oublier la vérification finale !), et comme $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ d'après ①, on obtient l'équation :

② $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}f(x)$, ou encore $x^2 f''(x) + f(x) = 0$, que doit vérifier f solution de ①.

Le changement de variable $t = \ln x$, joint à l'introduction de la fonction $F(t) = f(e^t) = f(x)$, conduit à :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = F'(t)\cdot\frac{1}{x}, \text{ puis à :}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}F'(t) + \frac{1}{x}\,\frac{\mathrm{d}F'}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}F'(t) + \frac{1}{x^2}F''(t),$$

et l'expression $x^2 f''(x) + f(x)$ devient $F''(t) - F'(t) + F(t)$, donc f solution de ① $\Rightarrow$ F solution de ③ :

③ $\quad F'' - F' + F = 0$.

L'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ a pour racines :

$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, d'où $F(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(a\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + b\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ pour solution de ③.

Il reste à chercher pour quels couples a et b de réels, la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right),$$

vérifie la relation ①.

On a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$+ \sqrt{x}\left(-\ a\frac{\sqrt{3}}{2x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \frac{b\sqrt{3}}{2x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(a + b\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \frac{1}{2\sqrt{x}}(b - a\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x.$$

Comme $-\ \ln x = \ln\ \frac{1}{x}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right),$$

donc $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ si et seulement si a et b sont tels que :

$$a = \frac{a + b\sqrt{3}}{2} \quad \text{et } b = \frac{a\sqrt{3} - b}{2},$$

soit encore si et seulement si $a = b\sqrt{3}$.

Les solutions du problème sont donc les fonctions définies par :

$$f(x) = b\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$= 2b\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$= \beta\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right), \ \beta \text{ constante réelle.}$$

13.16. Si on considère l'équation différentielle $y'' + y = 0$, une base de l'espace vectoriel des solutions est formé des fonctions cosinus et sinus, (y aurait-il du π dans l'air ?), donc la matrice wronskienne :

$$\mathscr{W}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},$$

est régulière pour tout x, et ses deux vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$.

En particulier, il existe $\lambda(x), \mu(x)$ tels que l'on ait :

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} = \lambda(x)\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + \mu(x)\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

et en fait, (changement de base), on a matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \lambda(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = (\mathscr{W}(x))^{-1}\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix},$$

ce qui justifie que λ et μ sont de classe C^1.

Mais alors on a :

(1) $\quad f(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$

(2) $\quad f'(x) = -\lambda(x)\sin x + \mu(x)\cos x.$

En dérivant (1), il vient :

(3) $\quad f'(x) = \lambda'\cos x + \mu'\sin x - \lambda\sin x + \mu\cos x,$

ce qui, compte tenu de (2), implique :

(4) $\quad \lambda'\cos x + \mu'\sin x = 0.$

Si on dérive (2), on obtient :

(5) $\quad f'' = -\lambda'\sin x + \mu'\cos x - \lambda\cos x - \mu\sin x,$

donc $f + f'' = -\lambda'\sin x + \mu'\cos x.$

Si on pose alors $g(x) = f(x) + f''(x)$, fonction continue à valeurs strictement positives ici, on a λ' et μ' solutions du système (S) avec :

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0, \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = g(x), \end{cases}$$

qui se résoud en $\lambda'(x) = -\sin x\, g(x)$ et $\mu'(x) = \cos x\, g(x)$, d'où l'on tire :

$$\lambda(x) = \lambda_0 - \int_0^x g(t)\sin t \, dt \text{ et } \mu(x) = \mu_0 + \int_0^x g(t)\cos t \, dt.$$

Mais, connaissant λ et μ, on va calculer $f(x) + f(x+\pi)$. On a :

$$f(x) = \lambda_0 \cos x - \cos x \int_0^x g(t)\sin t \, dt + \mu_0 \sin x + \sin x \int_0^x g(t)\cos t \, dt$$

$$= \lambda_0 \cos x + \mu_0 \sin x + \int_0^x g(t)(\cos t \sin x - \sin t \cos x) dt,$$

soit encore :

$$f(x) = \lambda_0 \cos x + \mu_0 \sin x + \int_0^x g(t)\sin(x-t) \, dt.$$

On aura donc :

$$f(x+\pi) = -\lambda_0 \cos x - \mu_0 \sin x + \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t) \, dt,$$

$$= -\lambda_0 \cos x - \mu_0 \sin x - \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x-t) \, dt,$$

d'où :

$$f(x) + f(x+\pi) = -\int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x-t) \, dt.$$

Si on pose $x - t = u$, d'où $t = x - u$, c'est encore :

$$f(x) + f(x+\pi) = -\int_0^{-\pi} g(x-u)\sin u(-du),$$

et (un dernier changement, je fus maladroit), avec $v = -u$, on a :

$f(x) + f(x+\pi) = \int_0^{\pi} g(x+v)\sin v \, dv$, (si, si, vérifiez bien), ce qui, compte tenu de l'hypothèse g, continue >0, donne bien $f(x) + f(x+\pi) > 0$. Ouf !

Vous pouvez constater que l'hypothèse $g \geqslant 0$, non nulle sur tout intervalle de longueur π suffit pour conclure.

Ce résultat est utilisé en 15.15.

13.17. Si on introduit $g(x) = f(x) + f'(x)$, on a :

$$g(x) + g'(x) = f(x) + 2f'(x) + f''(x).$$

Si, avec l'hypothèse $\lim_{x \to +\infty} g(x) + g'(x) = 0$, on justifie que

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on aura d'abord $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, soit

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$, qui impliquera $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, c'est-à-dire la conclusion.

On considère donc la fonction $u : x \rightsquigarrow u(x) = g(x) + g'(x)$.

On la regarde longtemps, jusqu'à ce qu'on pense à se dire que c'est un facteur de la dérivée de $e^x g(x) = v(x)$, car :

$$v'(x) = e^x (g(x) + g'(x)) = e^x u(x), \text{ d'où :}$$

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)\mathrm{d}t = g(0) + \int_0^x e^t u(t)\mathrm{d}t.$$

Or, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{A} > 0$, $t \geqslant \mathrm{A} \Rightarrow |u(t)| \leqslant \varepsilon$, d'où, pour $x \geqslant \mathrm{A}$:

$$\left|\int_0^x e^t u(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^{\mathrm{A}} e^t u(t)\mathrm{d}t\right| + \int_{\mathrm{A}}^x \varepsilon e^t \mathrm{d}t,$$

ce qui donne un majorant de $|v(x)| = e^x |g(x)|$:

$$e^x |g(x)| \leqslant |v(0)| + \left|\int_0^{\mathrm{A}} e^t u(t)\mathrm{d}t\right| + \varepsilon(e^x - e^{\mathrm{A}}),$$

et, en notant C la constante $|v(0)| + \left|\int_0^{\mathrm{A}} e^t u(t)\mathrm{d}t\right| - \varepsilon e^{\mathrm{A}}$, on obtient *a fortiori* :

$$\forall x \geqslant \mathrm{A},\ |g(x)| \leqslant e^{-x}\mathrm{C} + \varepsilon.$$

Le majorant tend vers 0 si x tend vers $+\infty$, il devient inférieur à 2ε pour x assez grand, ce qui traduit bien $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, et permet de conclure à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

13.18. a) Comme f est à valeurs positives, l'inégalité $f'' \geqslant \alpha f$, avec $\alpha > 0$ donne $f'' \geqslant 0$ d'où f' croissante.

De plus f est bornée, mais alors, si on avait un x_0 tel que $f'(x_0) > 0$, par croissance de f' on aurait $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ sur $[x_0, +\infty[$, d'où, en intégrant, pour $x > x_0$:

$$f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0),$$

avec un minorant tendant vers $+\infty$ en $+\infty$: c'est peu compatible avec l'hypothèse f bornée.

Donc f' est croissante, majorée par 0, on a déjà $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = l$ existe, en étant atteinte par valeurs inférieures, avec $l \leqslant 0$.

L'hypothèse $l < 0$, jointe à $f'(x) \leqslant l$, sur $[0, +\infty[$, donnerait cette fois en intégrant :

$$f(x) \leqslant f(0) + lx,$$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$: exclu, f étant à valeurs positives.

Il ne reste que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

b) On a alors f' négative sur $[0, +\infty[$, donc f est décroissante, bornée : on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ existe.

De plus f est à valeurs positives, donc $a \geqslant 0$.

Si $a > 0$, comme pour tout x on a $f(x) \geqslant a$, on aurait $f''(x) \geqslant \alpha a$, d'où en intégrant $f'(x) - f'(0) \geqslant \alpha a x$, et f' tendrait vers $+\infty$ en $+\infty$: c'est exclu. Donc $a = 0$, soit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) On veut comparer $f(x)$ et $g(x) = f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}}$, soit encore g solution de l'équation différentielle $y'' - \alpha y = 0$. Si $f(0) > 0$, g sera à valeurs > 0, et la comparaison revient à comparer $\frac{f}{g}$ à 1, ce qui peut se faire en étudiant les variations de $\frac{f}{g}$, fonction dont la dérivée aura pour dénominateur, l'opposé du wronskien de f et g. On a :

$$w(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = fg' - f'g, \text{ d'où :}$$

$$(w(f, g))' = fg'' - f''g = \alpha fg - f''g = g(\alpha f - f''),$$

soit encore :

$$(w(f, g))'(x) = f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}}(\alpha f(x) - f''(x)).$$

Si $f(0) = 0$, la fonction décroissante f, à valeurs positives, est identiquement nulle, et l'inégalité cherchée est vérifiée.

Si $f(0) > 0$, comme $\alpha f(x) - f''(x) \leqslant 0$, la dérivée du wronskien est négative, donc le wronskien est une fonction décroissante de x.

Mais $w(f, g)(x) = -\sqrt{\alpha}\, f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}} f(x) - f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}} f'(x)$, avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, d'où $\lim_{x \to +\infty} w(f, g)(x) = 0$, ce qui entraîne $w(f, g)(x) \geqslant 0$, soit $f'g - fg' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$, ou encore $\left(\frac{f}{g}\right)' \leqslant 0$.

La fonction $\frac{f}{g}$ est décroissante, vaut $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$ en 0, comme g est positive, c'est que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[0, +\infty[$, soit encore $f(x) \leqslant f(0)e^{-x\sqrt{\alpha}}$ pour $x \geqslant 0$.

13.19. Commençons par l'unicité, ce qui, par linéarité, revient à justifier que si y est solution de l'équation homogène, $y'' + f(x)y = 0$, avec $y(a) = y(b) = 0$, on a y nulle.

Si y est non nulle, ses zéros sont isolés, (un zéro, d, non isolé de y, conduit à $y'(d) = 0 = y(d)$ d'où y nulle par unicité de la solution associée à une donnée initiale) ; donc y étant nulle en a, il existe $c \in]a, b]$ tel que y ne s'annule pas sur $]a, c[$, et $y(c) = 0$, (c est la borne inférieure de l'ensemble non vide des zéros de y dans $]a, b]$).

Comme y est alors de signe constant sur $]a, c[$, si on suppose $y > 0$, on aura $y'(a) > 0$ et $y'(c) < 0$, (inégalités strictes, sinon on aurait une donnée initiale nulle, d'où y nulle). Or $y'' = -fy$ est alors positive, d'où y' croissante sur $[a, c]$ d'une valeur positive strictement à une strictement négative : dur dur !

L'hypothèse $y < 0$ conduit à $y'(a) < 0$ et $y'(c) > 0$, avec $y'' \leqslant 0$ d'où y' décroissant : c'est impossible. Finalement y est nulle, d'où l'unicité.

Pour l'existence, on va prendre l'intégrale générale de l'équation différentielle :

① $\quad y'' + f(x)y = g(x)$,

sous la forme $z(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$, avec z solution de ①, et $\{y_1, y_2\}$ base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, et on va justifier l'existence du couple λ_1, λ_2 tel que la solution soit nulle en a et b.

Pour cela, on choisit y_1 telle que $y_1(a) = 0$ et $y_1(b) \neq 0$: c'est possible puisque seule la fonction nulle est solution de l'équation homogène avec $y_1(a) = y_1(b) = 0$. Il suffit par exemple de prendre comme donnée initiale $y_1(a) = 0$ et $y'_1(a) = 1$.

Le même travail en b permet de choisir y_2 avec $y_2(a) \neq 0$ et $y_2(b) = 0$.

On doit alors résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(a) + \lambda_2 y_2(a) = \lambda_2 y_2(a) = -z(a) \,; \\ \lambda_1 y_1(b) + \lambda_2 y_2(b) = \lambda_1 y_1(b) = -z(b) \,: \end{cases}$$

ce qui, compte tenu de $y_2(a) \neq 0$ et $y_1(b) \neq 0$, donne λ_1 et λ_2, et assure l'existence d'une solution au problème posé.

13.20. Sur $]-\infty, 0[$, ou sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 y' + x(2-x)y = e^x - 1 + x,$$

forment un espace affine de dimension 1, et le problème est celui du prolongement éventuel en 0 d'une solution.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, l'équation homogène conduit, pour y solution non nulle, donc ne s'annulant pas, à :

$$\frac{y'}{y} = 1 - \frac{2}{x}, \text{ d'où } \ln|y| = x - 2\ln|x| + \text{constante},$$

et $y = \lambda \dfrac{e^x}{x^2}$ comme solution générale.

La méthode de variation des constantes conduit à :

$$x^2\left(\lambda' \cdot \frac{e^x}{x^2} + \lambda e^x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right) + (2x - x^2)\frac{\lambda e^x}{x^2} = e^x - 1 + x,$$

soit encore, (et on vérifie que les termes en λ disparaissent) :

$$\lambda' e^x = e^x - 1 + x, \text{ ou } \lambda' = 1 - e^{-x} + xe^{-x}.$$

Avec $\int xe^{-x}\mathrm{d}x = -\ xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x}$, on trouve :

$$\lambda = x + e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} + a = x - xe^{-x} + a,$$

a étant une constante.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, (ou $\mathbb{R}_-^*$), les solutions sont donc du genre :

$$x \leadsto f(x) = \frac{1}{x^2}(-x + ae^x + xe^x).$$

Un prolongement par continuité en 0 impose $a = 0$, d'où :

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1), \text{ avec } \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

On a de plus $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, qui tend vers $\dfrac{1}{2}$, donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ et f est bien dérivable en 0. Pour $x = 0$, l'équation différentielle est vérifiée, (indépendamment des valeurs $f(0)$ et $f'(0)$ en fait : seule leur existence était nécessaire pour conclure, dans cet exemple).

13.21. Pour $n \geqslant 1$, les $\frac{a_n}{n^2}$ existent, le seul problème est celui de la limite à calculer.

On peut écrire la relation de récurrence sous la forme :

$$(n+1)a_{n+1} - na_n - a_n - 2a_{n-1} = 0,$$

et sous cette forme, on peut penser aux équations donnant le terme général d'une série solution d'une équation différentielle.

Ce pourrait être le coefficient du terme en x^n, dans l'expression :

$$y' - xy' - y - 2xy,$$

si $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ceci pour $n \geqslant 1$.

Le terme constant de $y' - xy' - y - 2xy$ étant $a_1 - a_0$, on considère l'équation différentielle :

$y'(1-x) - (1+2x)y = a_1 - a_0$, et, sous réserve de convergence, la somme de la série des $a_n x^n$ est la solution de cette équation différentielle, telle que $y(0) = a_0$.

Pour $|x| < 1$, l'équation homogène a pour solution non nulle toute fonction y telle que :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1+2x}{1-x} = \frac{3+2(x-1)}{1-x} = \frac{3}{1-x} - 2, \text{ d'où :}$$

$\ln|y| = -2x - 3\ln(1-x) +$ constante, ce qui donne :

$$y = \frac{\lambda e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

La méthode de variation des constantes conduit à :

$$\frac{\lambda' e^{-2x}}{(1-x)^2} = a_1 - a_0, \text{ d'où } \lambda' = (a_1 - a_0)(1-x)^2 e^{2x}.$$

On a : $\displaystyle\int (1-x)^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(1-x)^2 e^{2x} + \int (1-x)e^{2x} dx$

$$= \frac{1}{2}(1-x)^2 e^{2x} + \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x} dx$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4}\right).$$

On peut donc prendre :

$\lambda(x) = (a_1 - a_0)e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4}\right) + \mu$, μ étant une constante à fixer pour que la solution y définie par :

$$y(x) = \frac{(a_1 - a_0)}{(1-x)^3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4}\right) + \mu\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3},$$

vérifie $y(0) = a_0$, ce qui donne :

$$\frac{5}{4}(a_1 - a_0) + \mu = a_0, \text{ d'où } \mu = \frac{9a_0 - 5a_1}{4}, \text{ et :}$$

$$y(x) = \frac{(a_1 - a_0)}{(1-x)^3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4}\right) + \frac{9a_0 - 5a_1}{4}\,\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

Il reste à chercher le coefficient a_n de x^n dans le développement en série entière de cette fonction, pour en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n^2}$.

On a : $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{r=0}^{+\infty} x^r$, d'où, par deux dérivations :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=1}^{+\infty} r x^{r-1} \text{ et } \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{+\infty}(r^2 - r)x^{r-2}.$$

En posant $r - 2 = p$, on aura donc :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}(p^2 + 3p + 2)x^p.$$

On a besoin du développement en série entière de $\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$, donc du produit de séries :

$$\left(\sum_{q=0}^{+\infty}(-2)^q\frac{x^q}{q!}\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}(p^2 + 3p + 2)x^p\right),$$

dans lequel le coefficient de x^n s'écrit, (avec $p = n - q$) :

$$u_n = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n}\frac{(-2)^q}{q!}(n^2 - 2nq + q^2 + 3n - 3q + 2),$$

ou encore :

$$u_n = \frac{n^2}{2}\sum_{q=0}^{n}\frac{(-2)^q}{q!} + \frac{n}{2}\sum_{q=0}^{n}\frac{(3-2q)(-2)^q}{q!} + \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n}\frac{(q^2-3q+2)(-2)^q}{q!},$$

ce qui, compte tenu de la convergence des séries intervenant, donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n}\frac{(-2)^q}{q!} = \frac{1}{2e^2}.$$

On cherche alors le coefficient v_n de x^n dans $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}\right)\frac{1}{(1-x)^3}$,

soit dans $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}\right)\sum_{p=0}^{+\infty}(p^2+3p+2)x^p$. C'est :

$$v_n = \frac{5}{8}(n^2+3n+2) - \frac{3}{4}((n-1)^2+3(n-1)+2)$$
$$+\frac{1}{4}((n-2)^2+3(n-2)+2),$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n^2} = \frac{5}{8}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{8}-\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

En rassemblant les résultats, compte tenu de l'expression de y, on aura donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^2} = \frac{a_1-a_0}{8}+\frac{9a_0-5a_1}{8e^2}$, mais vérifiez, car on n'est pas à l'abri d'une erreur dans de si longs calculs.

13.22. Comme f' est un produit de deux fonctions dérivables, f'' existe sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f''(x) = f(-x) - xf'(-x) = f(-x) - x(-x\,f(x)).$$

Sur $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = \frac{f'(x)}{x}$, d'où la relation :

$$f''(x) - \frac{f'(x)}{x} - x^2 f(x) = 0 \text{, ou encore :}$$

① $\quad x f''(x) - f'(x) - x^3 f(x) = 0$,

vérifiée par f, mais, comme on a dérivé, ne pas oublier la vérification finale, quand on aura résolu ①.

On peut chercher des solutions développables en série entière :

avec $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, on doit avoir :

$$\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geqslant 0} a_n x^{n+3} = 0,$$

ce qui conduit aux relations $-a_1 = 0$; $2a_2 - 2a_2 = 0$; $6a_3 - 3a_3 = 0$;

puis, en cherchant pour $p \geqslant 3$, le coefficient de x^p, on obtient :

$$(p+1)(p-1)a_{p+1} = a_{p-3}.$$

Mais alors, avec $a_1 = a_3 = 0$, et a_0, a_2 quelconques, on détermine les coefficients de quatre en quatre, d'où :

$$a_{4p} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (4p)} = \frac{a_0}{2^{2p}(2p)!} ;$$

$$a_{4p+1} = a_{4p+3} = 0 \text{ ; et :}$$

$$a_{4p+2} = \frac{a_2}{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4p+2)} = \frac{a_2}{2^{2p}(2p+1)!}.$$

On obtient donc, les deux solutions indépendantes :

$$y_1(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2p}}{(2p)!} = a_0 \operatorname{ch} \frac{x^2}{2}, \text{ et :}$$

$$y_2(x) = 2a_2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2p+1}}{(2p+1)!} = 2a_2 \operatorname{sh} \frac{x^2}{2},$$

ce qui permet en fait d'écrire l'intégrale générale de l'équation différentielle ① sous la forme $f(x) = ae^{\frac{x^2}{2}} + be^{-\frac{x^2}{2}}$.

Mais alors $f'(x) = axe^{\frac{x^2}{2}} - bxe^{-\frac{x^2}{2}}$, et :

$$x f(-x) = axe^{\frac{x^2}{2}} + bxe^{-\frac{x^2}{2}},$$

donc l'égalité $f'(x) - x f(-x) = -2bxe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ équivaut à $b = 0$.

Les solutions du problème posé sont donc les fonctions du type :
$x \rightsquigarrow a e^{\frac{x^2}{2}}$, $a \in \mathbb{R}$.

13.23. Comme la fonction $t \rightsquigarrow \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1[$, la fonction :
$x \rightsquigarrow \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ est dérivable, donc si f est solution du problème, f est dérivable et vérifie :

① $\quad f'(x) = \dfrac{f(1-x)}{1-x}.$

Comme $x \rightsquigarrow 1-x$ est une involution de $]0, 1[$ sur $]0, 1[$, on redérive pour parvenir à une équation différentielle. C'est licite car ① implique f' dérivable, et on obtient :

$$f''(x) = -\frac{1}{1-x}\ f'(1-x) + \frac{f(1-x)}{(1-x)^2}.$$

Comme $f'(1-x) = \dfrac{f(x)}{x}$ d'après ①, et $\dfrac{f(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{f'(x)}{1-x}$,

toute solution du problème initial vérifie l'équation différentielle :

$$f''(x) = -\frac{f(x)}{(1-x)x} + \frac{f'(x)}{1-x}, \text{ ou encore :}$$

② $\quad x(1-x)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0.$

On constate que $f(x) = x$ est une solution particulière de ②, d'où, en posant $f(x) = \lambda x$ et en appliquant la méthode de variation des constantes, on obtient :

$$f'(x) = \lambda + x\lambda' \ ;\ f'' = 2\lambda' + x\lambda'', \text{ d'où l'équation :}$$

$$x^2(1-x)\lambda'' + \lambda'(2x - 2x^2 - x^2) + \lambda(-x + x) = 0,$$

qui, sur $]0, 1[$, s'écrit encore :

$$x(1-x)\lambda'' + (2-3x)\lambda' = 0.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre en λ', de solution générale :

$$\lambda'(x) = a\exp\left(\int \frac{3x-2}{x(1-x)}\mathrm{d}x\right).$$

On a $\dfrac{3x-2}{x(1-x)} = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{1-x}$, d'où $\int \frac{3x-2}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \ln\frac{1}{x^2(1-x)}$, (sur $]0, 1[$),

et une expression :

$$\lambda'(x) = \frac{a}{x^2(1-x)} = a\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right).$$

On a donc $\lambda(x) = a\left(-\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{1-x}\right)+b$, a et b étant des constantes, ce qui donne comme intégrale générale de l'équation ②, toute fonction du type :

$$x \rightsquigarrow f(x) = a\left(-1+x\ln\frac{x}{1-x}\right)+bx.$$

Comme on a dérivé la relation initiale pour parvenir à ②, il faut déterminer les constantes a et b telles que l'on ait :

$$\int_{1-x}^{1}\left[a\left(-\frac{1}{t}+\ln\frac{t}{1-t}\right)+b\right]\mathrm{d}t = a\left(-1+x\ln\frac{x}{1-x}\right)+bx.$$

C'est encore :

$$a\Big[-\ln t+t\ln t+(1-t)\ln(1-t)\Big]_{1-x}^{1}+bx = a\left(-1+x\ln\frac{x}{1-x}\right)+bx,$$

ou, après simplification par bx et calcul :

$$a(\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-x)-x\ln x) = a\left(-1+x\ln\frac{x}{1-x}\right), \text{ ou :}$$

$ax\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = a\left(-1+x\ln\frac{x}{1-x}\right)$, ce qui impose $a = 0$, (faites tendre x vers 0 par exemple).

Donc les solutions au problème posé sont les fonctions $x \rightsquigarrow bx$.

13.24. Si $f(x)$ est une solution de l'équation différentielle, on étudie les variations de la fonction g définie par :

$$g(x) = f^2(x)+e^{-x}f'^2(x).$$

On a $g'(x) = 2ff' + 2f'f''e^{-x} - e^{-x}f'^2$,

$$= 2f'(f + f''e^{-x}) - e^{-x}f'^2$$

$$= -e^{-x}f'^2,$$

puisque $f'' + e^x f = 0$.

Mais alors la fonction g est décroissante, et sur $[0, +\infty[$ on a $g(x) \leqslant g(0)$, d'où *a fortiori* $f^2(x) \leqslant g(0)$: la fonction f est bornée.

Ceci se généralise au cas d'une équation différentielle :

$$y'' + p(x)y = 0,$$

avec p de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, telle qu'il existe $A \geqslant 0$ avec $0 < p(x)$ et $0 \leqslant p'(x)$ sur $[A, +\infty[$.

On pose alors $g(x) = f^2(x) + \frac{1}{p}(f'(x))^2$, si f est solution de l'équation. On a, pour $x \geqslant A$:

$$g' = 2ff' + 2f'f''\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{p'}{p^2}f'^2$$

$$= \frac{2f'}{p}(pf + f'') - \frac{p'}{p^2}f'^2 = -\frac{p'}{p^2}f'^2 \leqslant 0,$$

donc sur $[A, +\infty[$, g décroît, et on a, puisque $p > 0$:

$$\forall x \geqslant A,\ f^2(x) \leqslant g(x) \leqslant g(A).$$

La fonction f est bornée sur $[A, +\infty[$, et aussi sur $[0, A]$ compact, car elle y est continue.

13.25. La matrice A du système est antisymétrique, donc $H = iA$ est hermitienne et a ses valeurs propres réelles, en étant diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Il en résulte que les valeurs propres de A sont du type $i\lambda$, λ réel, et comme A a un polynôme caractéristique de degré impair, elle admet une valeur propre réelle, qui ne peut être que 0, d'ordre impair qui ne peut être que 1, sinon H serait nulle, (et A aussi) comme matrice diagonalisable n'ayant que 0 pour valeur propre.

Un vecteur propre pour la valeur propre 0 est U : (x, y, z) avec :

$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ x \quad - z = 0, \end{cases}$$

donc $U = (1, -1, 1)$ convient.

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 - 1 - \lambda - \lambda - \lambda = -(\lambda^3 + 3\lambda),$$

les deux valeurs propres conjuguées sont $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$.

Les vecteurs propres pour la valeur propre $i\sqrt{3}$ ont, dans $\mathbb{C}$, des coordonnées x, y, z vérifiant le système :

$$\begin{cases} -i\sqrt{3}x - y - z = 0 \\ x - i\sqrt{3y} - z = 0. \end{cases}$$

Avec $z = 1$, on résoud le système :

$$\begin{cases} i\sqrt{3}x + y = -1 \\ x - i\sqrt{3y} = 1 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 \\ i\sqrt{3} \end{vmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$-2x = -i\sqrt{3} + 1 \ ; \ 2y = i\sqrt{3} + 1,$$

et les vecteurs propres :

$$V_{i\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } V_{-i\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$, sont donc obtenues, à partir de la partie réelle et de la partie imaginaire de :

$$2V_{i\sqrt{3}}e^{i\sqrt{3}t} = (\cos\sqrt{3}t + i\sin\sqrt{3}t)\begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{3} \\ 1 + i\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ \cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t \\ 2\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix},$$

d'où une forme de l'intégrale générale du système :

$$X(t) = a\begin{pmatrix} -\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ \cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t \\ 2\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$X(t) = \begin{pmatrix} -a + b\sqrt{3} \\ a + b\sqrt{3} \\ 2a \end{pmatrix}\cos\sqrt{3}t + \begin{pmatrix} -a\sqrt{3} - b \\ -a\sqrt{3} + b \\ 2b \end{pmatrix}\sin\sqrt{3}t + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut parvenir à cette forme plus rapidement.

En effet, l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau d'une forme linéaire vecteur propre pour ${}^t A$, est stable par A.

Un tel hyperplan, a une équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, avec α, β, γ vérifiant :

$$\begin{cases} \quad \beta + \gamma = 0 \\ \alpha \quad - \gamma = 0, \end{cases}$$

d'où $(1, -1, 1)$ comme solution, et $x - y + z$ pour équation.

On peut choisir des vecteurs de composantes $(\lambda, \lambda + \mu, \mu)$ et $(\lambda', \lambda' + \mu', \mu')$ dans ce plan, et chercher des conditions entre ces quatre paramètres pour que :

$$X(t) = (\cos\sqrt{3}t)(\lambda, \lambda + \mu, \mu) + (\sin\sqrt{3}t)(\lambda', \lambda' + \mu', \mu')$$

soit solution du système, ce qui conduit à :

$$-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix} \lambda' \\ \lambda' + \mu' \\ \mu' \end{pmatrix} = X'(t), \text{ donc :}$$

$$= \cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \lambda' + \mu' \\ \mu' \end{pmatrix},$$

d'où les conditions :

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\lambda = -\lambda' - 2\mu' \\ -\sqrt{3}(\lambda + \mu) = \lambda' - \mu' \\ -\sqrt{3}\mu = 2\lambda' + \mu' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \sqrt{3}\lambda' = -\lambda - 2\mu \\ \sqrt{3}(\lambda' + \mu') = \lambda - \mu \\ \sqrt{3}\mu' = 2\lambda + \mu \end{cases},$$

qui sont vérifiées en prenant λ et μ quelconques et en utilisant le deuxième système pour exprimer λ' et μ'.

On obtient la solution sous la forme :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\mu \\ \mu \end{pmatrix} \cos\sqrt{3}t + \begin{pmatrix} -\lambda-2\mu \\ \lambda-\mu \\ 2\lambda+\mu \end{pmatrix} \frac{\sin\sqrt{3}t}{\sqrt{3}} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et vous pouvez vérifier, qu'avec $\mu = 2a$ et $\lambda = -a+b\sqrt{3}$, on retrouve la forme précédente.

C'est une autre façon de traiter les calculs, ni pire, ni meilleure en fait.

13.26. On étudie le polynôme caractéristique de la matrice A du système.

On a :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 4 \\ -1 & -(7+\lambda) & -4 \\ -6 & 6 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(49-\lambda^2)+24-24-24(7+\lambda)+24(7-\lambda)-\lambda,$$

(en développant suivant la règle de Sarrus), soit encore : $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3$.

On a une seule valeur propre 0, d'ordre 3, avec un sous-espace propre de dimension 1 car A est de rang 2. On peut trigonaliser, mais on peut aussi remarquer que la somme des lignes de A est nulle, donc on a :

$x'+y'+z' = 0$, d'où $x+y+z = a$,

avec a constante en t, (t désigne la variable), et on peut éliminer $z = a-x-y$.

Le système est équivalent à :

$$\text{I} : \begin{cases} x' = 7x+y-4x-4y+4a = 3x-3y+4a, \\ y' = -x-7y+4x+4y-4a = 3x-3y-4a, \end{cases}$$

avec $z = a-x-y$.

On remarque alors que $x'-y' = 8a$, donc (I) équivaut à (II) :

$$\text{II} : \begin{cases} x'-y' = 8a, \\ y' = 3x-3y-4a, \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x = y + 8at + b, \\ y' = 3(y + 8at + b) - 3y - 4a = 24at + 3b - 4a. \end{cases}$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} y = 12at^2 + (3b - 4a)t + c, \\ x = 12at^2 + (3b + 4a)t + c + b \\ z = -24at^2 - 6bt + a - 2c - b, \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 12t^2 + 4t \\ 12t^2 - 4t \\ -24t^2 + 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 3t \\ -6t - 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Comme on sait que les solutions forment un espace vectoriel de dimension trois et que c'est ce qui est trouvé on a la solution générale du système.

Vous pouvez trouver d'autres expressions polynomiales, car il n'y a pas unicité de la base formée de solutions indépendantes !

13.27. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 - a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

du système, a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 1 - a^2 \\ -1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix},$$

$$= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 + a^2) + (2 - \lambda + 1)$$

$$= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + a^2 + 1).$$

Les valeurs propres sont donc 3 et $1 \pm ia$.

Pour $a \neq 0$, en notant V un vecteur propre pour la valeur propre 3, et W pour la valeur propre $1 + ia$, les trois solutions :

$$\mathrm{V}e^{3t},\ \mathrm{Re}(\mathrm{W}e^{t+iat}) \text{ et } \mathrm{Im}(\mathrm{W}e^{t+iat}),$$

forment une base de l'espace vectoriel des solutions.

Calcul de V.

On résoud le système :

$$\begin{cases} z = 0, \\ 2x - 2y + (1-a^2)z = 0, \end{cases}$$

d'où les composantes possibles $(1, 1, 0)$ de V.

Calcul de W.

On résoud :

$$\begin{cases} (2-ia)x + z = 0, \\ -x + y - iaz = 0, \end{cases}$$

d'où $x = 1$, $z = ia - 2$, et $y = 1 + ia(ia-2)$ soit $y = (1-a^2) - 2ia$.

On a donc :

$$e^{t+iat}\mathrm{W} = e^t(\cos at + i\sin at)\begin{pmatrix} 1 \\ (1-a^2) - 2ia \\ -2 + ia \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} \cos at \\ (1-a^2)\cos at + 2a\sin at \\ -2\cos at - a\sin at \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} \sin at \\ (1-a^2)\sin at - 2a\cos at \\ -2\sin at + a\cos at \end{pmatrix}$$

et, avec des constantes réelles λ, μ, ν, la solution du système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu e^t\begin{pmatrix} \cos at \\ (1-a^2)\cos at + 2a\sin at \\ -2\cos at - a\sin at \end{pmatrix}$$

$$+ \nu e^t\begin{pmatrix} \sin at \\ (1-a^2)\sin at - 2a\cos at \\ -2\sin at + a\cos at \end{pmatrix}.$$

<u>*Pour a = 0*</u>, on se retrouve avec 3, valeur propre simple, et 1, valeur propre double de A.

On sait que, si $\{W_1, W_2\}$ est une base de $N = \operatorname{Ker}(A - I_3)^2$, les solutions $X_i(t) = e^t(I_3 + t(A - I_3)) \cdot W_i$, pour $i = 1$ et 2, seront deux solutions indépendantes, et indépendantes de $V \cdot e^{3t}$.

On a :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d'où } (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc N est l'hyperplan d'équation :

$$3x + y + 2z = 0,$$

une base possible en est :

$$W_1 = (1, -3, 0)\ ;\ W_2 = (0, -2, 1).$$

On obtient alors la solution du système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 1+2t & 0 & t \\ 2t & 1 & t \\ -t & t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu \\ -3\mu - 2\nu \\ \nu \end{pmatrix},$$

libre à vous d'achever les calculs pour retrouver des solutions indépendantes !

13.28. a) On constate que le coefficient embêtant est $1 + x^2$, ce qui fait penser à de la trigonométrie hyperbolique, et le c) incite encore plus à poser $x = \operatorname{sh} t$, d'où $1 + x^2 = \operatorname{ch}^2 t$.

La fonction, encore notée y, de t, est telle que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\frac{dy}{dt}, \text{ et :}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\operatorname{ch} t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

La fonction y, de la variable t, vérifie donc l'équation :

$$(\mathrm{F}) : \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \alpha^2 y = 0,$$

ou encore :

$$(\mathrm{F}) : \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \alpha^2 y = 0,$$

d'intégrale générale $y(t) = \mathrm{Ach}\alpha t + \mathrm{Bsh}\alpha t$, donc la solution générale de E est :

$$y(x) = \mathrm{A}\ \mathrm{ch}(\alpha \mathrm{Arg\ sh}\ x) + \mathrm{B}\ \mathrm{sh}(\alpha \mathrm{Arg\ sh}\ x).$$

b) Si E admet une solution développable en série entière,

$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, valable sur un intervalle centré en 0, on doit avoir :

$$\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n \geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^n - \sum_{n \geqslant 0} \alpha^2 a_n x^n = 0,$$

d'où, en identifiant les termes de degré 0, 1, puis $p \geqslant 2$, les relations :

$$\begin{cases} 2a_2 - \alpha^2 a_0 = 0, \\ 2 \cdot 3a_3 + (1-\alpha^2)a_1 = 0, \\ p(p-1)a_p + (p+2)(p+1)a_{p+2} + pa_p - \alpha^2 a_p = 0. \end{cases}$$

La relation générale s'écrit encore :

$$(p+1)(p+2)a_{p+2} = (\alpha^2 - p^2)a_p,$$

et cette relation est aussi vérifiée par $p = 0$ et $p = 1$.

On obtient donc les expressions :

$$a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!}\prod_{q=0}^{p-1}(\alpha^2 - (2q)^2), \text{ et :}$$

$$a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)!}\prod_{q=0}^{p-1}(\alpha^2 - (2q+1)^2),$$

que doivent vérifier les solutions développables en série entière.

On trouve un espace vectoriel de solutions de dimension deux, vu la présence des deux constantes indépendantes a_0 et a_1.

L'une de ces deux séries se réduit à un polynôme si et seulement si α est entier, car avec $\alpha = k$, on obtient $a_k = 0$, et les a_{k+2q} suivants nuls.

Pour α non entier, (ou pour p de parité différente de celle de α si α est entier) on a :

$\lim\limits_{p \to +\infty} \left|\dfrac{a_{p+2}}{a_p}\right| = 1$, donc la, (ou les), série(s) entière(s), solution(s) a, (ont), un rayon de convergence égal à 1.

c) La solution particulière paire : $f : x \rightsquigarrow \operatorname{ch}(\alpha \operatorname{Arg\,sh} x)$, est donc développable en série entière sur $]-1, 1[$, et comme

$f(0) = a_0 = \operatorname{ch}0 = 1$, on a :

$$\operatorname{ch}(\alpha \operatorname{Arg\,sh} x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\prod_{q=0}^{p-1}(\alpha^2 - (2q)^2)\right)\frac{x^{2p}}{(2p)!},$$

développement réduit à un polynôme de degré $2k-2$ si $\alpha = 2k$, k dans $\mathbb{N}$.

13.29. Avant de chercher la, (ou les ?) solution maximale de donnée initiale $y(1) = 1$, résolvons les deux équations :

$E_+ : xy' + y = 2(x^2 - 4)$ et $E_- : xy' - y = 2(x^2 - 4)$.

L'équation homogène $xy' + y = 0$, a pour intégrale générale $y = \dfrac{\lambda}{x}$, (solutions définies sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$), et la méthode de variation des constantes donne :

$$x\left(\frac{\lambda'}{x} - \frac{\lambda}{x^2}\right) + \frac{\lambda}{x} = \lambda' = 2x^2 - 8,$$

d'où $\lambda = \dfrac{2}{3}x^3 - 8x + a$, et les solutions de E_+ :

$$f_a : x \rightsquigarrow f_a(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8 + \frac{a}{x},$$

définies pour $x < 0$ ou $x > 0$.

La partie homogène : $xy' - y = 0$, de E_-, donne : $y = \mu x$, et la méthode de variation des constantes donne :

$x(\mu + \mu' x) - \mu x = \mu' x^2 = 2x^2 - 8$, d'où $\mu' = 2 - \dfrac{8}{x^2}$, (pour $x \neq 0$),

soit $\mu(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + b$, et les solutions de E_- :

$g_b : x \rightsquigarrow g_b(x) = 2x^2 + 8 + bx$, définies, elles, sur $\mathbb{R}$.

<u>*Recherche d'une solution maximale y telle que $y(1) = 1$*</u>.

La fonction cherchée, continue, reste localement positive, donc solution de E_+ , et du type :

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8 + \frac{a}{x},$$

avec $y(1) = 1 = \frac{2}{3} - 8 + a$, d'où $a = \frac{25}{3}$, et y garde cette expression sur le plus grand intervalle contenant 1 sur lequel y reste > 0. En fait $\Omega = y^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert, réunion de ses composantes connexes, qui sont des intervalles ouverts de Ω, et sur la composante connexe I de 1, on a :

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8 + \frac{25}{3x}.$$

Il reste à voir si en α, borne réelle éventuelle de I, lorsque x « traverse » α, y change de signe ou non, et c'est le signe de $y'(\alpha)$ qui peut nous renseigner. Encore faut-il connaître α, aussi étudie-t-on les variations de y, en remarquant que $y(2) = -\frac{7}{6} < 0$.

On a $y' = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3x^2} = \frac{1}{3x^2}(4x^3 - 25)$, la dérivée s'annule et change de signe en $\left(\frac{25}{4}\right)^{1/3}$, d'où le tableau de variations de $y = f_{\frac{25}{3}}$.

x	0	1	α	$\left(\frac{25}{4}\right)^{1/3}$	
y'	$-$			0	$+$
y	$+\infty$ ↘	1	0	↘ ↗	$+\infty$

Il existe un α, entre 1 et $\left(\frac{25}{4}\right)^{1/3}$, où y s'annule, et $y'(\alpha)$ étant < 0, une solution de l'équation de départ, nulle en α, devient à valeurs négatives sur $]\alpha, \ )$, donc est solution de E_-, avec $y(\alpha) = 0$.

Elle est du type :

$$g_b(x) = 2x^2 + 8 + bx \text{, avec } 2\alpha^2 + 8 + b\alpha = 0,$$

donc $b = -\frac{8}{\alpha} - 2\alpha = -\frac{2}{\alpha}(\alpha^2 + 4)$.

Mais alors $g_b'(x) = 4x + b$, s'annule en $\beta = -\frac{b}{4}$,

soit en $\beta = \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}$, valeur à placer par rapport à α,

or $\frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} > \alpha \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} > \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4 > \alpha^2 \Leftrightarrow 2 > \alpha$, car α est positif.

Avec la valeur $f_{\frac{25}{3}}$, on a :

$$f_{\frac{25}{3}}(2) = \frac{8}{3} - 8 + \frac{25}{6} = \frac{16 - 48 + 25}{6} = \frac{-7}{6} < 0 \text{, d'où } \beta > \alpha.$$

Les variations de $y = g_{-\frac{2}{\alpha}(\alpha^2+4)}$, sur $[\alpha, +\infty[$, sont alors données par le tableau suivant.

x	α		β	γ	$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
				0	

Cette fonction s'annule à son tour en un $\gamma > \beta$, avec $g'(\gamma) > 0$, donc un prolongement de la solution y au-delà de γ, ne peut se faire qu'avec une solution de E_+.

En fait on peut calculer γ avant d'aller plus loin.

En effet, $g_b(x) = 2x^2 - \dfrac{2}{\alpha}(\alpha^2+4)x + 8$, est un trinôme en x, de discriminant réduit : $\delta = \dfrac{1}{\alpha^2}(\alpha^2+4)^2 - 16 = \dfrac{(\alpha^2-4)^2}{\alpha^2}$, donc g_b s'annule pour :

$$x = \frac{\dfrac{\alpha^2+4}{\alpha} \pm \dfrac{\alpha^2-4}{\alpha}}{2}, \text{ soit pour } \alpha \text{ et pour } \frac{4}{\alpha}.$$

Donc g_b reste négative sur $\left]\alpha, \dfrac{4}{\alpha}\right[$, elle est nulle en $\dfrac{4}{\alpha}$, et on doit raccorder g_b avec une fonction f_a telle que $f_a\left(\dfrac{4}{\alpha}\right) = 0$, soit :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{4}{\alpha}\right)^2 - 8 + \frac{a\alpha}{4} = 0, \text{ donc } a = \frac{32}{\alpha} - 32 \times \frac{4}{3\alpha^3}.$$

Pour cette valeur de a, on a : $f'_a\left(\dfrac{4}{\alpha}\right) = g'_b\left(\dfrac{4}{\alpha}\right)$, car les fonctions f_a et g_b, solutions de E_+ et E_- respectivement, nulles toutes deux en $\dfrac{4}{\alpha}$, vérifient l'égalité :

$$\frac{4}{\alpha} f'_a\left(\frac{4}{\alpha}\right) = 2\left(\frac{16}{\alpha^2} - 4\right) = \frac{4}{\alpha} g'_b\left(\frac{4}{\alpha}\right).$$

Comme $g'_b\left(\dfrac{4}{\alpha}\right) > 0$, $f'_a\left(\dfrac{4}{\alpha}\right) > 0$, et comme on a :

$$f'_a(x) = \frac{4}{3}x - \frac{a}{x^2} = \frac{4}{3x^2}\left(x^3 - \frac{3a}{4}\right), \text{ sur }]0, +\infty[,\ f'_a \text{ est négative}$$

sur $\left]0, \left(\dfrac{3a}{4}\right)^{1/3}\right[$, puis positive, il en résulte que f'_a reste positive sur $\left]\dfrac{4}{\alpha}, +\infty\right[$, d'où f_a croissante, avec $f_a\left(\dfrac{4}{\alpha}\right) = 0$: la fonction reste positive donc solution de E_+ .

Finalement, la solution maximale cherchée est unique, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{2}{3}x^2 - 8 + \frac{25}{3x} \text{ sur }]0, \alpha] \,; \\ &= 2x^2 + 8 - \frac{2(\alpha^2 + 4)}{\alpha}x \text{ sur } \left[\alpha, \frac{4}{\alpha}\right] ; \\ &= \frac{2}{3}x^2 - 8 + \frac{32}{\alpha^3}\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)\frac{1}{x} \text{ sur } \left[\frac{4}{\alpha}, +\infty\right[\,, \end{aligned}$$

y étant nulle en α et $\frac{4}{\alpha}$, y' se raccordant continuement en ces points comme on l'a vu, grâce à l'équation E, E_+ et E_- donnant la même valeur de y' lorsque $y = 0$.

CHAPITRE XIV

Géométrie affine, géométrie métrique.

Si je devais caractériser la géométrie analytique, je dirais que c'est l'art d'esquiver les calculs, en s'efforçant de trouver la méthode permettant d'obtenir un résultat sans déterminer tous les intermédiaires.

Par exemple, dans l'exercice 14.7, on peut voir comment traduire un contact par l'existence d'une racine double, et comment on cherche directement une relation entre les coordonnées d'un point obtenu à partir d'autres points sans déterminer explicitement ces derniers.

On peut aussi faire agir une transformation inversible sur un problème pour simplifier sa résolution, résoudre le problème simplifié, et en faisant agir la transformation inverse, obtenir le résultat. Vous verrez en 14.8 comment, en transformant par affinité, une ellipse en cercle, on peut utiliser ce procédé, ou en 14.22 l'action d'une similitude.

On n'hésitera pas non plus à utiliser la géométrie traditionnelle, dite parfois géométrie pure, pour obtenir rapidement un résultat, quitte à traiter les cas particuliers par le calcul, (voir 14.2, 14.3, 14.11).

À ce propos il est ridicule de vouloir opposer une géométrie « pure » et une géométrie « analytique ». Il est plus efficace de les employer toutes les deux, là où elles sont les plus performantes :

– la géométrie pure donne des raisonnements rapides, sans calculs, mais nécessite parfois un examen à part des cas particuliers;

– ces cas particuliers peuvent souvent se traiter facilement par le calcul précisément parce qu'ils sont particuliers, ou par des raisonnements de continuité.

On a ainsi résolu plus vite une question, ce qui permet d'aller à la pêche, ou de se consacrer à toute autre activité, ô combien plus intéressante.

Efforcez-vous aussi de raisonner le plus longtemps possible sur les « êtres » de la géométrie que sont les vecteurs, droites, sous-espaces, orthogonaux éventuellement, sans recourir systématiquement aux repères, (14.9), (14.21).

S'il faut choisir un repère, il faut le prendre adapté à la situation, respectant au mieux les symétries éventuelles des données. On peut être ainsi amené à se rappeler que la perpendiculaire commune à deux droites, cela existe. Voir 14.4, 14.16.

Analysez les données : si un problème est de nature affine, non métrique, il sera maladroit de le traduire dans un repère orthonormé. Les repères affines, cela existe aussi, (14.12).

Quand on cherche un ensemble de points M, obtenus à partir de tout un processus constructif, il est souvent très efficace de partir carrément de M et de chercher des conditions sur ses coordonnées, traduisant le fait qu'on peut l'obtenir, plutôt que de calculer ses coordonnées par la résolution de tout un tas d'équations. Voir 14.14.

Toutes ces remarques ne permettent cependant pas d'échapper à un minimum de connaissances.

Ainsi, si $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une base orthonormée d'un sous-espace F de $E = \mathbb{R}^n$, euclidien, *le projeté* de x sur F est $p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$, (voir 14.1).

La distance d'un point $M(x, y)$ à une droite D, d'équation $ux + vy + w = 0$, dans un repère orthonormé, c'est :

$$d(M, D) = \frac{|ux + vy + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

mais, si D est déterminée par deux points (B et C), on a aussi :

$$d(M, D)\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\|,$$

cette formule étant valable dans $\mathbb{R}^3$, et indépendante de tout repère. Voir 14.3.

A propos de produit vectoriel, dans $\mathbb{R}^3$, *une aire*, c'est relié au produit vectoriel, *un volume* au produit mixte. Plus précisément, si $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sera $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$, et le volume du parallélépipède défini par $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ est la valeur absolue du produit mixte $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$. Voir 14.17.

Les barycentres, c'est un peu la raison d'être de la géométrie affine : il est bien rare qu'un problème vraiment affine ne les fasse pas intervenir : voir 14.6, 14.12, 14.24, 14.25.

Les déterminants cela peut servir même là où on ne les attend pas. Par exemple, comment écrire, en repère orthonormé, l'équation d'un cercle passant par M_1, M_2, M_3 , ou d'une sphère passant par M_1, M_2, M_3, M_4 ? Avec des notations évidentes, pour la sphère, on aurait :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

tout simplement, avec en prime, si le coefficient de $x^2+y^2+z^2$ est nul, la condition de coplanairité des quatre points.

Vous pouvez, sur le même modèle, écrire l'équation d'une parabole d'axe parallèle à Oy, ou à Ox, ou de bien d'autres courbes. Ouvrez la porte à votre imagination !

Pensez dans les problèmes plans, à employer les nombres complexes : voir 14.2, 14.5, 14.14, 14.18, 14.19, 14.22.

Ne négligez pas la géométrie du triangle (14.2, 14.3), ni ces notions un peu perdues de vue que sont l'inversion (14.5), la puissance analytique (14.13).

Quand les données interviennent de façon symétriques, le recours aux fonctions symétriques évite bien des calculs, (14.7).

Énoncés

14.1. Matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien, de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D de vecteur directeur : $\vec{V} : (a, b, c)$.

14.2. Orthocentre d'un triangle M_1, M_2, M_3 du plan complexe, les affixes des sommets vérifiant $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

14.3. Soit un triangle ABC. Un point M du cercle circonscrit au triangle se projette en A', B' et C' sur BC, CA et AB. Montrer que A', B' et C' sont alignés.

14.4. Dans A espace affine euclidien de dimension trois, ensemble des points équidistants de deux droites non coplanaires.

14.5. Soit z complexe tel que $\operatorname{Im}(z) > 0$. Montrer que

$$\operatorname*{Sup}_{t \in \mathbb{R}} \left|\frac{t-i}{t-z}\right| = \frac{|z+i| + |z-i|}{2\operatorname{Im}(z)}.$$

14.6. Soit une famille $(M_{1,i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de p points distincts d'un espace affine, $p \geqslant 2$.

On définit les points $(M_{k,i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$, par récurrence sur k, en notant $M_{k,i}$ l'isobarycentre de la famille des points $(M_{k-1,j})$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$, avec $j \neq i$.

Étude, pour chaque i fixé, des suites $(M_{k,i})_{k \in \mathbb{N}^*}$.

14.7. Déterminer le lieu des points M du plan, d'où on peut mener deux tangentes à une ellipse coupant les axes de cette ellipse en quatre points cocycliques.

14.8. Soit une ellipse E. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que par M passent deux tangentes à E en P et Q, avec le centre de gravité du triangle MPQ sur E.

14.9. Ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ euclidien tels que, avec $\vec{W}$ vecteur non nul donné on ait :

a) $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{W}$ de direction donnée ;

b) $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{W}\| = a$, constante positive donnée.

14.10. Soient AB, AC, AD, trois arêtes issues du même sommet d'un cube $\mathscr{C}$. On les projette sur un plan P en ab, ac, ad.

Soient z_B, z_C, z_D les affixes de $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad}$, dans le plan P identifié à $\mathbb{C}$ par le choix d'un repère orthonormé.

Montrer que $z_B^2 + z_C^2 + z_D^2 = 0$.

Réciproquement, si pour tout plan de projection, on a la relation précédente, pour un parallélépipède d'arêtes consécutives $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ montrer que c'est un cube.

14.11. Soit ABCD un rectangle non dégénéré du plan euclidien. Ensemble des points M du plan tels que les cercles circonscrits aux triangles ABM et BCM soient égaux.

14.12. Soit un triangle vrai, ABC, du plan affine réel. Ensemble des points P du plan tels qu'il existe au moins une droite passant par P, coupant les trois supports des côtés du triangle en trois points d'isobarycentre P.

14.13. Soit un cercle C de rayon R donné, et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Chercher les centres des cercles Γ de rayon r constant, coupant C sous un angle constant θ. Que peut-on dire de ces cercles Γ.

14.14. Ensemble des centres de gravité des triangles équilatéraux inscrits dans une parabole.

14.15. Soit une hyperbole équilatère H et A un point fixé sur H. Montrer que, si une droite coupe l'hyperbole en P et Q tels que AP et AQ soient orthogonaux, cette droite a une direction fixe que l'on précisera.

14.16. Ensemble des points M du plan, centres des cercles vus de deux points donnés A et B sous des angles donnés, 2α et 2β.

14.17. Soient trois points M_1, M_2, M_3 de la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$, d'ordonnées y_1, y_2, y_3 indexées en croissant. Aire du triangle $M_1M_2M_3$ en fonction de y_1, y_2, y_3.

14.18. Condition sur a, b, c complexes, pour que les points d'affixes les zéros de $z^4 + az^2 + bz + c$, soient les sommets d'un parallélogramme.

14.19. Soient a et b complexes. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les deux racines de $X^2 + aX + b$ soient de module 1.

14.20. Soit u_0 complexe, et la suite définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|).$$

Nature et limite de la suite.

14.21. Soient D et D' deux droites concourantes en O, non orthogonales entre elles. On considère un plan H, orthogonal à D en B et coupant D' en A, on suppose $O \neq B$.

a) Soient P et P' deux plans, contenant D et D' respectivement et perpendiculaires entre eux.

Les plans P, P' et H se rencontrent en M. Que dire de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$?

b) Soit M un point du cercle de diamètre AB dans H, montrer que les plans AOM et BOM sont perpendiculaires entre eux.

c) Nature de la nappe engendrée par les droites $P \cap P'$, avec P et P' plans perpendiculaires entre eux, contenant D et D' respectivement.

14.22. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z dans un plan euclidien, tels que les points d'affixe z, z^2 et z^5 soient alignés.

14.23. Déterminer la perpendiculaire commune aux droites D_1 et D_2 définies par :

$$D_1 : \begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} ; \quad D_2 : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

14.24. Soit A un espace affine euclidien et u une isométrie affine qui n'est pas l'identité. Montrer que u est une symétrie orthogonale si et seulement si elle est involutive.

14.25. Soit A un espace affine euclidien de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie directe ayant un seul point fixe.

Solutions

14.1. L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est somme directe orthogonale, $E = \mathbb{R}\vec{V} \oplus \mathbb{R}\vec{V}^{\perp}$. Si on décompose un vecteur $\vec{X}$ en $\vec{X} = \vec{Y} + \vec{Z}$ dans cette somme directe, le symétrique orthogonal de $\vec{X}$ par rapport à D est $s(\vec{X}) = \vec{Y} - \vec{Z}$.

Comme $\left\{ \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \right\}$ est une base orthonormée de D, le projeté $\vec{Y}$ de $\vec{X}$ sur D est tout de suite connu, on exprime donc $s(\vec{X})$ à l'aide de $\vec{X}$ et de $\vec{Y}$ en remplaçant $\vec{Z}$ par $\vec{X} - \vec{Y}$ d'où :

$$s(\vec{X}) = -\vec{X} + 2\vec{Y} = -\vec{X} + 2 < \vec{X}, \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} > \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}.$$

Avec $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on a

$$2 < \vec{X}, \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} > \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{2(ax + by + cz)}{a^2 + b^2 + c^2}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}),$$

donc la matrice de s dans la base orthonormée canonique est :

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2 - a^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

14.2. Les trois sommets sont sur le cercle de centre O de rayon 1 : je connais donc le centre du cercle circonscrit. Je cherche l'orthocentre H, or... le centre de gravité G est connu facilement et ces trois points sont alignés.

En effet, par l'homothétie h de centre le centre de gravité G, de rapport $-\frac{1}{2}$, chaque sommet M_j a pour image le milieu M'_j du côté opposé

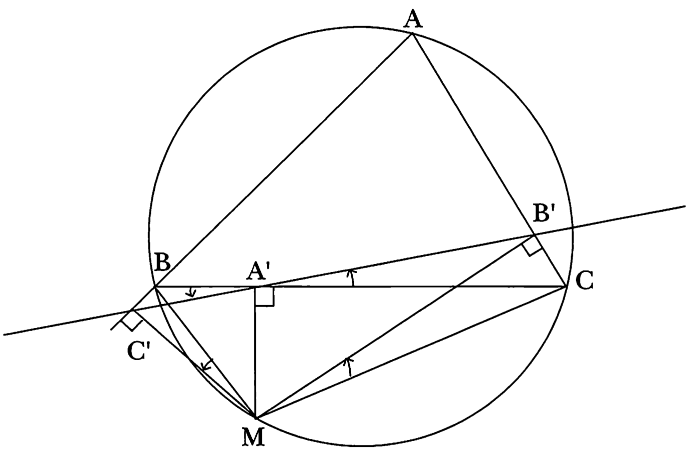
M_iM_k, et la hauteur issue de M_j a pour image la droite passant par M'_j, parallèle à la hauteur donc perpendiculaire à M_iM_k : c'est la médiatrice de M_iM_k. Les hauteurs donnent les médiatrices donc $h(\mathrm{H}) = \mathrm{O}$,

on a donc $\overrightarrow{\mathrm{GO}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GH}}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \overrightarrow{\mathrm{GH}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

soit $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

L'affixe de G, isobarycentre étant $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, l'affixe de H est $z_1 + z_2 + z_3$.

14.3. Une figure, ça peut servir.



On peut se tirer d'affaire avec des angles de droites, dans le plan orienté.

Les points MA'B'C sont cocycliques ; (cercle de diamètre MC) donc (A'C, A'B') = (MC, MB').

De même, MA'BC' cocycliques, (cercle de diamètre MB)

donc (A'B, A'C') = (MB, MC').

Si on justifie l'égalité (MC, MB') = (MB, MC'), on aura donc

(A'C, A'B') = (A'B, A'C'), d'où :

$$\begin{aligned}(A'B', A'C') &= (A'B', A'B) + (A'B, A'C')\\ &= (A'B', A'B) + (A'C, A'B') = (A'C, A'B) = \pi\end{aligned}$$

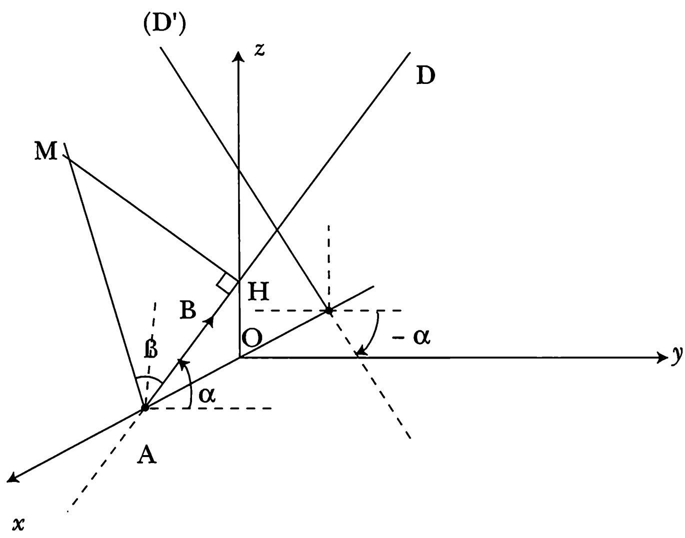
et l'alignement cherché.

Or, (Chasles es-tu là ?) :

$$\begin{aligned}(MC, MB') &= (MC, MB) + (MB, MC') + (MC', MB')\\ &= (MB, MC') + (MC, MB) + (MC', AB) + (AB, AC)\\ &\quad + (AC, MB')\\ &= (MB, MC') + (MC, MB) + (AB, AC) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\\ &= (MB, MC') \text{ car M, B, C, A sont cocycliques}\end{aligned}$$

donc $(MC, MB) = (AC, AB) = -(AB, AC)$. Comme les angles de droites sont définis modulo π, on a bien finalement l'égalité $(MC, MB') = (MB, MC')$ voulue.

14.4. Soit D et D' les deux droites non coplanaires, elles ont une perpendiculaire commune Δ et, si A et A' sont les intersections de Δ et D, et Δ et D', on peut prendre un repère orthonormé d'origine O milieu de $[A, A']$, d'axe Ox porté par Δ, le plan xOy étant bissecteur du dièdre de plans $aff(D, \Delta)$ et $aff(D', \Delta)$. Dans ce repère, qui fait jouer un rôle symétrique aux données, (pourquoi faire des jaloux ?), D aura pour



équations $x = a$; $z = y\text{tg}\alpha$ et D' $x = -a$, $z = -y\text{tg}\alpha$, (avec $\alpha \neq 0$ sinon les droites seraient coplanaires).

Soit A(a, 0, 0) et B(a, 1, tgα) sur D. Si M se projette en H sur D, (orthogonalement), l'interprétation du produit vectoriel donne $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \sin\beta = \|\overrightarrow{MH}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$, avec β angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$, d'où un calcul de $MH = d(M, D)$.

En prenant A'($-a$, 0, 0) et B'($-a$, 1, $-$tgα) sur D', on aura de même $\|\overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{A'B'}\| = d(M, D) \cdot \|\overrightarrow{A'B'}\|$.

Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$, l'égalité des distances équivaut à l'égalité des carrés des normes des produits vectoriels.

Soient x, y, z les coordonnées de M, on a :

$$\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-a \\ y \\ z \end{vmatrix}, \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{tg}\alpha \end{vmatrix}, \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} y\text{tg}\alpha - z \\ (a-x)\text{tg}\alpha \\ x-a \end{vmatrix}$$ d'où l'égalité :

$$(y\text{tg}\alpha - z)^2 + (a-x)^2\text{tg}^2\alpha + (x-a)^2 = (-y\text{tg}\alpha - z)^2 + (a+x)^2\text{tg}^2\alpha + (a+x)^2$$

qui traduit l'égalité des distances, (la symétrie des données permet de remplacer (a, α) par $(-a, -\alpha)$.)

En développant il vient :

$-4yz\text{tg}\alpha - 4ax(1 + \text{tg}^2\alpha) = 0$, soit encore :

$\underline{yz\sin 2\alpha + 2ax = 0}$, équation d'un paraboloïde hyperbolique.

14.5. Pour t réel et $z = x + iy$ avec $y > 0$, la fonction homographique $f : t \rightsquigarrow f(t) = \dfrac{t-i}{t-z} = \dfrac{t-z+z-i}{t-z} = 1 + \dfrac{\omega}{t-z}$

avec $\omega = z - i$ est définie.

Si $\omega = 0$, (soit $z = i$), elle est constante, le sup cherché vaut 1, or $\dfrac{|z+i| + |z-i|}{2\text{Im}z} = \dfrac{2}{2} = 1$ dans ce cas.

On suppose donc $z \neq i$. L'application f se décompose en un certain nombre de transformations géométriques simples, et nous allons suivre ce que donne la droite D, axe des x.

D'abord $T : t \rightsquigarrow t_1 = t - z$ est une translation : D donne D_1 droite d'équation $Y = -y$. (On a $z = x + iy$ *fixé*).

Puis $I : t_1 \rightsquigarrow \frac{1}{t_1} = t_2$ est composée de l'inversion de pôle O, de puissance 1, et de la symétrie par rapport à Ox.

La droite D_1 donne d'abord le cercle Γ_1 de diamètre OH_1 avec H_1 de coordonnées $\left(0, -\frac{1}{y}\right)$, ($H_1$ inverse de $D_1 \cap Oy$), puis Γ_1 donne Γ_2 cercle tangent en O à Ox, de rayon $\frac{1}{2y}$, de centre le point d'affixe $\frac{i}{2y}$.

Puis $\mathscr{S} : t_2 \rightsquigarrow \omega t_2 = t_3$ est une similitude de centre O, de rapport $|\omega| = |z - i|$, d'angle $\operatorname{Arg}(\omega)$. Par $\mathscr{S}$, Γ_2 donne un cercle Γ_3, passant par O, de centre Ω_3 d'affixe $\omega\frac{i}{2y}$, de rayon $|z - i|\frac{1}{2y}$.

L'abscisse de Ω_3, d'affixe $(x + iy - i)\frac{i}{2y} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{ix}{2y}$, étant $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2y}$, ce cercle Γ_3 recoupe Ox au point d'abscisse $-1 + \frac{1}{y}$.

Enfin $\mathscr{C}' : t_3 \rightsquigarrow 1 + t_3$ est une translation qui envoie Γ_3 sur un cercle Γ_4, de rayon $\frac{|z - i|}{2y}$, de centre Ω_4 d'affixe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{ix}{2y} = \frac{y + 1 + ix}{2y}$. Ce cercle coupant O$x$ aux deux points translatés de $\Gamma_3 \cap Ox$, donc aux points d'affixes 1 et $\frac{1}{y}$, O est extérieur à Γ_4 et le sup des distances de l'origine à Γ_4 est $\left\|\overrightarrow{O\Omega_4}\right\|$ + rayon du cercle, soit $\frac{|y + 1 + ix|}{2y} + \frac{|z - i|}{2y}$. Mais $y + 1 + ix = i(x - iy - i)$, donc $|y + 1 + ix| = |\bar{z} - i| = |z + i|$ et on obtient bien le maximum voulu.

14.6. Si $p = 2$, notons $M_{1,1} = A$ et $M_{1,2} = B$.

Alors $M_{2,1}$ est l'isobarycentre de la famille $(M_{1,2})$: c'est B et

$M_{1,2}$ est l'isobarycentre de la famille $(M_{1,1})$: c'est A.

On en déduit que, pour tout k, $M_{2k,1} = B$; $M_{2k,2} = A$ et $M_{2k+1,1} = A$; $M_{2k+1,2} = B$. Comme $A \neq B$, les deux suites divergent dans ce cas.

On suppose donc $p > 2$, et on s'aperçoit que, pour $k \geqslant 2$, l'isobarycentre $M_{k,i}$ des points $M_{k-1,j}$ pour $j \neq i$, est tel que l'isobarycentre, G_{k-1}, des points $M_{k-1,r}$, $r = 1, \ldots, p$ est le barycentre de $M_{k-1,i}$, coefficient 1, et de $M_{k,i}$, coefficient $p-1$, d'où la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{G_{k-1}M_{k-1,i}} + (p-1)\overrightarrow{G_{k-1}M_{k,i}} = 0,$$

d'où l'on tire l'égalité :

$$\overrightarrow{G_{k-1}M_{k,i}} = \frac{1}{1-p}\overrightarrow{G_{k-1}M_{k-1,i}}.$$

Mais cette égalité va nous permettre de justifier que $G_k = G_{k-1}$, car en sommant les égalités pour $i = 1, \ldots, p$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{G_{k-1}M_{k,i}} = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{G_{k-1}M_{k-1,i}} = 0$$

puisque G_{k-1} est l'isobarycentre des $(M_{k-1,i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

Mais la nullité de $\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{G_{k-1}M_{k,i}}$ prouve alors que G_{k-1} est isobarycentre des $M_{k,i}$, d'où $G_{k-1} = G_k$ avec nos notations.

En notant $G = G_1$ l'isobarycentre des $(M_{1,i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ au départ, on a donc les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{GM_{2,i}} = \frac{1}{1-p}\overrightarrow{GM_{1,i}},$$

$$\overrightarrow{GM_{3,i}} = \frac{1}{1-p}\overrightarrow{GM_{2,i}} = \frac{1}{(1-p)^2}\overrightarrow{GM_{1,i}},$$

et, à l'ordre k :

$$\overrightarrow{GM_{k,i}} = \frac{1}{1-p}\overrightarrow{GM_{k-1,i}} = \frac{1}{(1-p)^{k-1}}\overrightarrow{GM_{1,i}}.$$

Mais alors, pour $p \geqslant 3$, et i fixé, $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{1}{(1-p)^{k-1}} = 0$, donc la suite $(M_{k,i})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers G, ceci pour chaque valeur de i.

14.7. On prend un repère orthonormé dans lequel l'équation de l'ellipse sera $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

Par un point $M(X, Y)$, on fait passer une droite D_t de pente t, d'équation $y - Y = t(x - X)$. Cette droite est tangente à l'ellipse si et seulement si l'équation aux abscisses des points d'intersection a une racine double.

Cette équation s'écrit :

$$b^2x^2 + a^2(tx + (Y - tX))^2 - a^2b^2 = 0,$$

ce qui s'ordonne en :

$$x^2(b^2 + a^2t^2) + 2a^2t(Y - tX)x + a^2(Y - tX)^2 - a^2b^2 = 0,$$

et la condition de « tangence » s'écrit :

$$a^4t^2(Y - tX)^2 - (b^2 + a^2t^2)a^2(Y - tX)^2 + a^2b^2(b^2 + a^2t^2) = 0,$$

soit en développant et en remarquant la présence de $-a^4t^2(Y - tX)^2$ dans le deuxième terme :

$$-b^2a^2(Y - tX)^2 + a^2b^2(b^2 + a^2t^2) = 0,$$

donc, après simplification par a^2b^2, on trouve la condition :

① : $\quad b^2 + a^2t^2 - (Y - tX)^2 = 0,$

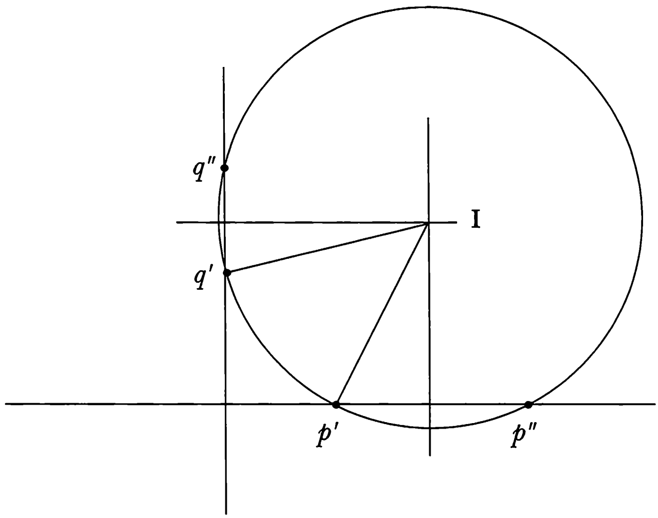
(condition où l'on peut remarquer que pour $X = \pm a$, le coefficient de t^2 s'annule, d'où une « solution $t = \infty$ » correspondant à une tangente verticale).

Cette équation en t aura deux solutions réelles t' et t'' si M est extérieur à l'ellipse, ce qui est connu, ou se retrouve en écrivant que son discriminant réduit est positif, ce qui donne :

$$a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2 \geqslant 0.$$

Si on note $D_{t'}$ et $D_{t''}$ les droites obtenues, elles coupent l'axe des abscisses en deux points p' et p'' d'abscisses x' et x'', et l'axe des ordonnées en deux points q' et q'' d'ordonnées y' et y''.

Le centre d'un cercle passant par ces quatre points est à l'intersection des médiatrices de $p'p''$ et $q'q''$, c'est donc I de coordonnées $\dfrac{x' + x''}{2}, \dfrac{y' + y''}{2}$.



Les points sont donc cocycliques si et seulement si $\mathrm{I}p' = \mathrm{I}q'$.

On semble rompre la symétrie des données mais les composantes de

$\overrightarrow{\mathrm{I}p'}$ sont $x' - \dfrac{x'+x''}{2} = \dfrac{x'-x''}{2}$ et $\dfrac{y'+y''}{2}$, alors que celles de

$\overrightarrow{\mathrm{I}q'}$ sont $\dfrac{x'+x''}{2}$ et $y' - \dfrac{y'+y''}{2} = \dfrac{y'-y''}{2}$, d'où l'égalité des carrés des longueurs traduite par :

$$(x'-x'')^2 + (y'+y'')^2 = (x'+x'')^2 + (y'-y'')^2,$$

ce qui équivaut à :

② $$x'x'' = y'y'',$$

relation tout à fait symétrique.

Il reste à calculer, à partir de l'équation $y - \mathrm{Y} = tx - t\mathrm{X}$ de D_t, les abscisses :

$$x' = \mathrm{X} - \frac{\mathrm{Y}}{t'} \text{ et } x'' = \mathrm{X} - \frac{\mathrm{Y}}{t''},$$

et les ordonnées :

$$y' = \mathrm{Y} - t'\mathrm{X} \text{ et } y'' = \mathrm{Y} - t''\mathrm{X},$$

des points d'intersection avec les axes de coordonnées, pour traduire la condition ② et obtenir la relation :

$$(t'X - Y)(t''X - Y) = t't''(Y - t'X)(Y - t''X),$$

ou encore :

$$(t'X - Y)(t''X - Y)(1 - t't'') = 0.$$

Or $t'X - Y = 0$ correspond à $x' = y' = 0$: une tangente $D_{t'}$ aurait le mauvais goût de passer par le centre de l'ellipse, ce qui ne se fait pas quand on est une tangente qui se respecte.

On a donc $t'X - Y \neq 0$ et $t''X - Y \neq 0$, d'où la condition de points cocycliques qui devient $t't'' = 1$, ce qui, compte tenu de l'équation ① ordonnée en :

$$t^2(a^2 - X^2) + 2tXY + b^2 - Y^2 = 0,$$

se traduit par : $Y^2 - X^2 = b^2 - a^2$.

Le lieu cherché est donc la partie de l'hyperbole équilatère d'équation $X^2 - Y^2 = a^2 - b^2$, extérieure à l'ellipse, (si vous gardez la partie intérieure, pour M sur cette partie il n'y aura pas de tangentes !).

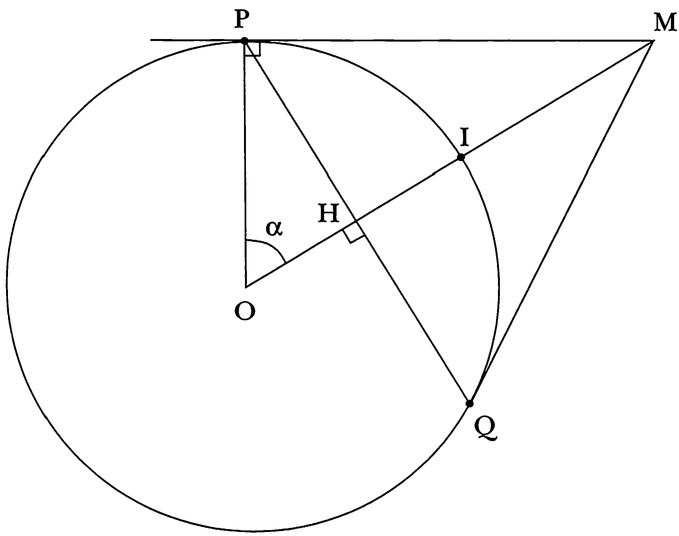
14.8. Tel quel, le problème est difficile à résoudre. Mais la notion de barycentre est conservée par affinité, ainsi que le contact de deux courbes.

Si l'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans un repère orthonormé, et si on effectue l'affinité d'axe Ox, de direction Oy, de rapport $\frac{a}{b}$, l'ellipse E donne le cercle de centre O, de rayon a. On note $\mathscr{A}$ cette affinité.

Or, pour un cercle C, si les tangentes issues de M ont pour points de contact P et Q, le centre de gravité G du triangle MPQ est sur l'axe de symétrie OM, (O centre du cercle), avec $HG = \frac{1}{3}HM$, si H est le milieu de PQ, donc en notant I le point d'intersection de OM et de l'arc PQ, on aura G en I si et seulement si $IH = \frac{IM}{2}$.

En notant d la distance OM, on doit donc avoir :

$$IH = R - OH = \frac{1}{2}(d - R).$$



Or, $OH = R\cos\alpha$, (dans le triangle rectangle OHP), avec $\cos\alpha = \frac{R}{d}$, dans le triangle rectangle OPM, donc la condition devient :

$$R - \frac{R^2}{d} = \frac{d-R}{2} \text{ soit encore :}$$

$$2dR - 2R^2 = d^2 - dR, \text{ ou } d^2 - 3dR + 2R^2 = 0,$$

ce qui se factorise en :

$$(d-R)(d-2R) = 0.$$

Comme pour mener deux tangentes au cercle C, il faut avoir $d > R$, l'ensemble cherché est caractérisé par $d = 2R$: c'est le cercle C' homothétique de C dans l'homothétie de centre O et de rapport 2.

Pour l'ellipse E, en notant E' l'ensemble cherché, comme E donne C par l'affinité $\mathscr{A}$, E' donne l'ensemble des solutions pour C, donc $\mathscr{A}(E') = C'$, cercle homothétique de C dans l'homothétie de centre O et de rapport 2, d'où $E' = \mathscr{A}^{-1}(C')$: c'est l'image de C' par l'affinité d'axe Ox, de direction Oy, de rapport $\frac{b}{a}$. On a une ellipse, de grand axe

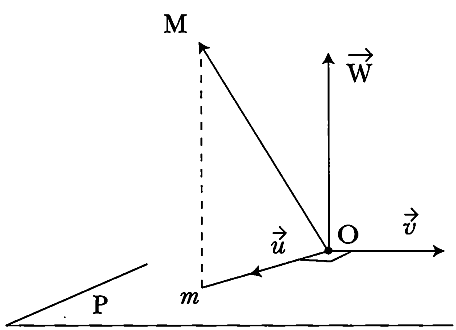
$2a$, de petit axe $2a \times \frac{b}{a} = 2b$: c'est l'ellipse homothétique de E dans l'homothétie de centre O, de rapport 2.

14.9. L'exercice reposant que voilà ! On introduit le plan P, orthogonal à $\overrightarrow{W}$ et contenant l'origine, et on projette M en m sur P, projection orthogonale bien sûr.

On introduit $\vec{u}$ unitaire dans P, tel que $\overrightarrow{Om} = \|\overrightarrow{Om}\|\vec{u}$, ($\vec{u}$ unitaire quelconque de P si $m = 0$), et $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée de P, $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{W})$ étant base directe, orthogonale de l'espace.

Avec $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \|\overrightarrow{Om}\|\vec{u} + z\overrightarrow{W}$ il vient

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{W} = \|\overrightarrow{Om}\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{W} = -\|\overrightarrow{W}\|\,\|\overrightarrow{Om}\|\vec{v}.$$



L'exercice est alors évident.

a) Si on veut que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{W}$ ait une direction donnée, de vecteur unitaire $\vec{a}$, et si $\vec{a}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{W}$, il n'y a pas de solution. Si $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{W}$, en prenant dans P un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{a}$, tout point M se projetant sur P, orthogonalement, sur la droite dirigée par $\vec{u}$ conviendra donc l'ensemble cherché est le plan passant par O, orthogonal au vecteur $\vec{a}$, (privé de la droite $(O, \overrightarrow{W})$, si on veut un produit vectoriel non nul).

b) Comme $\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{W}\right\|\left\|\overrightarrow{Om}\right\|$, cette quantité sera constante si et seulement si $\left\|\overrightarrow{Om}\right\| = \dfrac{a}{\left\|\overrightarrow{W}\right\|}$, donc si M est sur le cylindre de révolution d'axe $(O, \overrightarrow{W})$, de rayon $\dfrac{a}{\left\|\overrightarrow{W}\right\|}$.

14.10. Par homothétie, on peut supposer les arêtes du cube $\mathscr{C}$ de longueur 1, le cas d'une longueur ℓ se traduisant par des affixes multipliées par ℓ, d'où une somme de carrés multipliée par ℓ^2 : la nullité de la somme est conservée.

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace affine euclidien de dimension trois, telle que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base orthonormée du plan P sur lequel on projette les trois arêtes : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{u}' = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}'' = \overrightarrow{AD}$.

Si $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, la projection orthogonale est :

$\overrightarrow{ab} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, d'affixe $z_B = \alpha + i\beta$; et de même avec $\vec{u}' = \alpha'\vec{i} + \beta'\vec{j} + \gamma'\vec{k}$ et $\vec{u}'' = \alpha''\vec{i} + \beta''\vec{j} + \gamma''\vec{k}$, on aura :

$$z_C = \alpha' + i\beta' \text{ et } z_D = \alpha'' + i\beta'', \text{ d'où :}$$

$$z_B^2 + z_C^2 + z_D^2 = (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) - (\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2) + 2i(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'').$$

Or, la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

est orthogonale, en tant que matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}'')$, bases orthonormées, donc $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, $\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$ et $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$, on a bien : $z_B^2 + z_C^2 + z_D^2 = 0$.

Réciproquement en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{u}' = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}'' = \overrightarrow{AD}$, vecteurs indépendants, mais ne donnant pas une base orthonormée cette fois, et en notant :

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

la matrice de passage d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, à la base $\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}''$, la nullité de la somme des carrés des affixes des projections sur les trois plans $\mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$, $\mathrm{Vect}(\vec{j}, \vec{k})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{k}, \vec{i})$ successivement, se traduit par :

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 \text{ et } \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \ ;$$

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 \text{ et } \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \ ;$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \text{ et } \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0 .$$

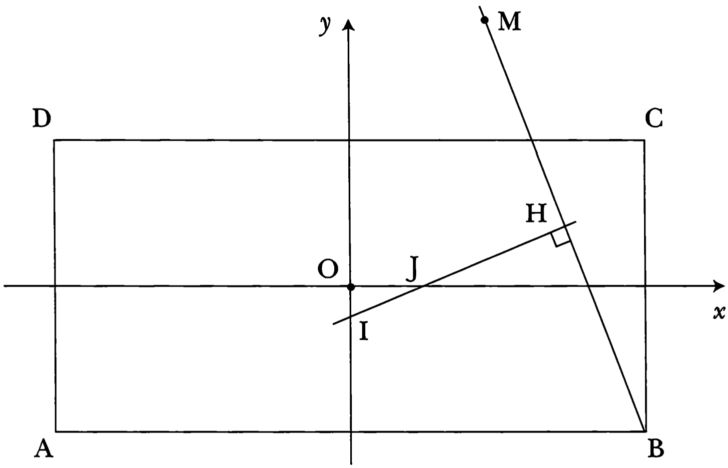
Mais c'est dire que $< \vec{u}, \vec{u}' > = < \vec{u}', \vec{u}'' > = < \vec{u}'', \vec{u} > = 0$, avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| = \|\vec{u}''\|$: n'aurait-on pas un cube ?

14.11. Pour que ces cercles circonscrits soient égaux, il faut d'abord qu'ils existent, donc M ne doit pas être sur la droite (AB), ni sur la droite (BC).

Prenons un repère orthonormé de centre le centre O du rectangle, et tel que les coordonnées de A, B, C, D soient respectivement : $(-a, -b)$; $(a, -b)$; (a, b) et $(-a, b)$.

Le centre I du cercle circonscrit à AMB est l'intersection de l'axe des ordonnées et de la médiatrice Δ de MB, alors que J, centre du cercle circonscrit à MBC est l'intersection de Δ et de l'axe des abscisses, (médiatrice de BC). Les deux cercles, passant par B, seront égaux si et seulement si $BI = BJ$, ce qui ne peut se faire, (I et J sur la médiatrice Δ de MB) que si $I = J$, ou si I et J sont symétriques par rapport à (MB).

C'est du Pythagore : $BI^2 = BH^2 + HI^2$ et $BJ^2 = BH^2 + HJ^2$, donc l'égalité équivaut à $HI = HJ$.



Calculons : avec $M(x, y)$, $\overrightarrow{BM} = (x-a)\vec{i} + (y+b)\vec{j}$, et coordonnées de H : $\frac{x+a}{2}, \frac{y-b}{2}$.

Équation de Δ :

$$\left(X - \frac{x+a}{2}\right)(x-a) + \left(Y - \frac{y-b}{2}\right)(y+b) = 0,$$

d'où les coordonnées de I : $\left(0, \frac{y-b}{2} + \frac{1}{2(y+b)}(x^2 - a^2)\right)$, et

celles de J : $\left(\frac{x+a}{2} + \frac{1}{2(x-a)}(y^2 - b^2), 0\right)$, ce qui s'arrange encore en :

I : $\left(0, \frac{1}{2(y+b)}(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\right)$ et J : $\left(\frac{1}{2(x-a)}(x^2 + y^2 - a^2 - b^2), 0\right)$;

(on a $y + b \neq 0$ et $x - a \neq 0$ vu la remarque initiale sur la position de M).

Premier cas : I = J, donc I = J = O, c'est équivalent à :

$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$, donc à M sur le cercle circonscrit au rectangle, et dans ce cas ce cercle est circonscrit aux deux triangles, MAB et MBC.

Deuxième cas : I et J symétriques par rapport à (MB), ce qui est équivalent à H milieu de [IJ] : c'est le cas si et seulement si :

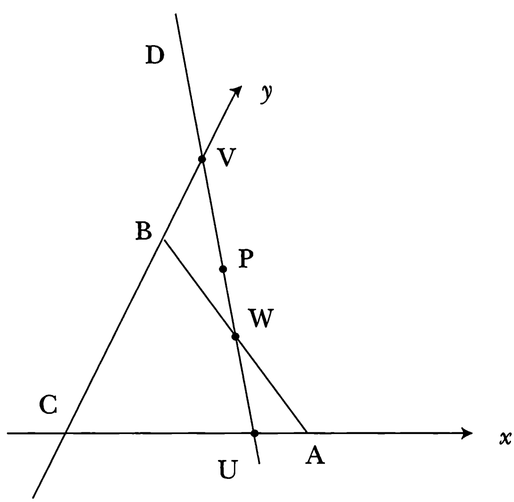
$$\begin{cases} \dfrac{x+a}{2} = \dfrac{x+a}{4} + \dfrac{y^2 - b^2}{4(x-a)} \text{ et,} \\ \dfrac{y-b}{2} = \dfrac{y-b}{4} + \dfrac{x^2 - a^2}{4(y+b)}, \end{cases}$$

ces deux égalités n'en faisant qu'une : $x^2 - a^2 = y^2 - b^2$, ce qui équivaut à M sur l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$, (dégénérée en les deux bissectrices si $a = b$, donc si le rectangle est un carré).

Si vous avez tout fait « par le calcul », vous n'avez pas dû vous ennuyer !

14.12. Le problème étant affine, on va prendre un repère affine d'origine C, de base vectorielle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Soit un point P de coordonnées (x, y). Une droite D passant par P et coupant les trois supports des côtés du triangle ne sera pas parallèle à (CB), (axe des ordonnées), donc aura une équation du type $Y - y = t(X - x)$, avec de plus $t \neq 0$, (D non parallèle à CA), et $t \neq -1$, (D non parallèle à (BA) d'équation $X + Y - 1 = 0$ dans ce repère).



Soient U, V et W les points d'intersections de D et des supports (CA), (CB), (AB) respectivement.

On a pour coordonnées : U : $\left(x-\frac{1}{t}y, 0\right)$; V : $(0, y-tx)$; et pour W, on résoud le système :

$$\begin{cases} Y = -X+1, \\ Y = y+tX-tx, \end{cases}$$

d'où $X(1+t) = 1+tx-y$, et les coordonnées de W :

$$W : \left(\frac{1+tx-y}{1+t}, \frac{t-tx+y}{1+t}\right).$$

On doit alors traduire qu'il existe t réel ($\neq 0$ et $\neq -1$, ne l'oublions pas), tel que P soit l'isobarycentre de U, V, W, ce qui se traduit par les égalités :

$$\begin{cases} 3x = x-\frac{1}{t}y+\frac{1+tx-y}{1+t}, \\ 3y = y-tx+\frac{t-tx+y}{1+t}, \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} 2x(t^2+t)+y(1+t)-t-t^2x+yt = 0, \\ 2y(t+1)+tx(t+1)-t+tx-y = 0, \end{cases}$$

ce que l'on va ordonner en t sous la forme :

$$\begin{cases} xt^2+t(2x+2y-1)+y = 0, \\ xt^2+t(2x+2y-1)+y = 0, \end{cases}$$

donc il n'y a finalement qu'une relation, qui s'exploite en disant que x et y doivent être tels que le trinôme en t :

$$xt^2+(2x+2y-1)t+y = 0,$$

doit avoir des racines réelles, $\neq 0$ et $\neq -1$, ceci pour $x \neq 0$.

On doit donc avoir l'inégalité : $(2x+2y-1)^2-4xy \geqslant 0$, soit :

$$\mathscr{E}: \quad 4x^2+4y^2+4xy-4x-4y+1 \geqslant 0.$$

La forme quadratique $4x^2 + 4xy + 4y^2$, associée à la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de signature $(2, 0)$, car de polynôme caractéristique $(4-\lambda)^2 - 4 = 0$, donc de valeurs propres 4 ± 2, soit 6 et 2, positives.

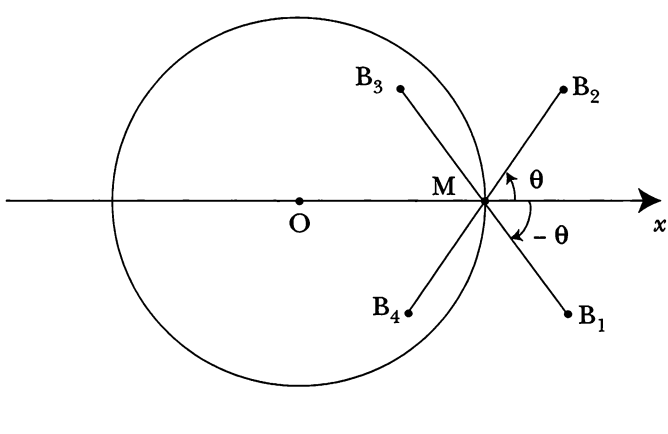
On doit donc être à l'extérieur d'une ellipse pour que le problème soit possible.

De plus, les conditions $t \neq 0$ et $t \neq -1$ se traduisent par les conditions $y \neq 0$ et $3x + 3y - 1 \neq 0$, ce qui élimine éventuellement des points de la zone trouvée.

Il faut encore examiner le cas de $x = 0$: y doit alors être tel que l'équation $t(2y-1) + y = 0$, ait une solution $\neq 0$ et $\neq -1$. On doit donc avoir $y \neq 0$, $y \neq 1$ et $y \neq \frac{1}{2}$, ce qui laisse pas mal de points sur l'axe des ordonnées.

14.13. L'angle de deux cercles sécants en M et M ' est l'angle de leurs tangentes, (en M ou M ' : c'est le même par symétrie par rapport à la ligne des centres). C'est donc aussi l'angle des rayons des deux cercles passant par M, (ou M ').

Soit un repère orthonormé d'origine O, centre de C. Le problème est conservé par rotation autour de O, donc on peut considérer un cercle Γ sécant avec C en M sur la demi-droite Ox. Le centre B de Γ occupe l'une des quatre positions B_1, B_2, B_3 ou B_4 avec $MB_i = r$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, et tel que l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à $\theta, -\theta, \pi - \theta$ ou $\pi + \theta$.



Si $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MB_i}) = \theta_i$, $(\theta_1 = -\theta, \theta_2 = \theta, \theta_3 = \pi - \theta, \theta_4 = \pi + \theta$ ici$)$,

on a $OB_i^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB_i})^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta_i$, donc les points B_1 et B_2 décrivent le cercle de centre O et de rayon $(R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta)^{1/2}$, noté Ω_1, et les points B_3 et B_4 décrivent le cercle Ω_2 de centre O et de rayon $(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{1/2}$.

De plus, la puissance de O par rapport à l'un des cercles Γ centrés sur Ω_1 est :

$$OB^2 - r^2 = R^2 + 2Rr\cos\theta.$$

Comme $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce nombre est positif, donc les cercles Γ solutions, centrés sur Ω_1 sont orthogonaux au cercle fixe de centre O de rayon $(R^2 + 2Rr\cos\theta)^{1/2}$.

De même, la puissance de O par rapport à l'un des cercles Γ centrés sur Ω_2 est :

$$OB^2 - r^2 = R^2 - 2Rr\cos\theta,$$

quantité qui pour θ donné, peut être positive ou non suivant r.

Si $R^2 - 2Rr\cos\theta > 0$, on a encore des cercles Γ orthogonaux au cercle centré en O, de rayon $(R^2 - 2Rr\cos\theta)^{1/2}$;
si $R^2 - 2Rr\cos\theta = 0$, tous les cercles Γ passent par O ;
enfin si $R^2 - 2Rr\cos\theta < 0$, les cercles Γ centrés sur Ω_2 sont pseudo-orthogonaux au cercle de centre O, de rayon $(2Rr\cos\theta - R^2)^{1/2}$, c'est-à-dire qu'ils le coupent en deux points diamétralement opposés sur ce cercle.

14.14. On va chercher à quelle condition un point Ω du plan peut être centre de gravité d'un triangle équilatéral ABC, dont les sommets sont sur une parabole $\mathscr{P}$.

En fait, ce centre de gravité, c'est aussi l'orthocentre, le centre du cercle inscrit au triangle ... et le centre du cercle circonscrit.

On doit donc chercher les points Ω centres des cercles C coupant la parabole en au moins trois points A, B et C sommets d'un triangle équilatéral de centre Ω : il y a de la rotation dans l'air.

On prend un repère orthonormé tel que la parabole ait l'équation :

① $y^2 - 2px = 0$.

Soit (a, b) les coordonnées d'un point Ω, le cercle de centre Ω de rayon R se paramètre par :

② $x = a + \mathrm{R}\cos t$, $y = b + \mathrm{R}\sin t$,

et si on remplace x et y par ces valeurs dans ①, on obtient une équation trigonométrique en t, c'est peu commode.

En posant $u = e^{it}$, on a $\cos t = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$,

et $\sin t = -\frac{i}{2}(e^{it} - e^{-it}) = -\frac{i}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$, et en posant :

$$\begin{cases} x = a + \frac{\mathrm{R}}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ y = b - i\frac{\mathrm{R}}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), \end{cases}$$

ce « paramétrage par des affixes » du cercle C nous donnera les u correspondant aux points d'intersection avec la parabole, comme solutions de :

③ $$\left(b - i\frac{\mathrm{R}}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)^2 - 2p\left(a + \frac{\mathrm{R}}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\right) = 0.$$

On doit écrire que cette équation admet trois solutions du type α, (de module 1), $j\alpha$ et $j^2\alpha$, pour traduire que l'on a des e^{it}, $e^{i\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)}$ et $e^{i\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)}$, comme solutions.

On ordonne ③ en :

$$\left(bu - i\frac{\mathrm{R}}{2}u^2 + \frac{i\mathrm{R}}{2}\right)^2 - 2pu\left(au + \frac{\mathrm{R}}{2}u^2 + \frac{\mathrm{R}}{2}\right) = 0, \text{ donc en :}$$

$$\frac{\mathrm{R}^2}{4}u^4 + \mathrm{R}(p + ib)u^3 + u^2\left(2pa - b^2 - \frac{\mathrm{R}^2}{2}\right) + u\mathrm{R}(p - ib) + \frac{\mathrm{R}^2}{4} = 0.$$

Ce polynôme $\mathrm{Q}(u)$ doit être divisible par une expression du type :

$(u - \alpha)(u - j\alpha)(u - j^2\alpha) = u^3 - \alpha^3$, (avec $|\alpha| = 1$), ce qui conduit, en effectuant la division, à un reste de degré 2 qui doit être nul. On a trois relations entre lesquelles il suffira (avec de la chance) d'éliminer R et α pour obtenir une relation entre a et b.

On écrit $Q(u) = (u^3 - \alpha^3)\left(\frac{R^2}{4}u + R(p+ib)\right) + S(u)$

d'où

$$S(u) = u^2\left(2pa - b^2 - \frac{R^2}{2}\right) + u\left(Rp - iRb + \frac{\alpha^3 R^2}{4}\right) + \frac{R^2}{4} + \alpha^3(p+ib)R,$$

qui doit être nul, d'où les conditions :

$$\begin{cases} ④ : 2pa - b^2 - \dfrac{R^2}{2} = 0, \\ ⑤ : \alpha^3\dfrac{R}{4} + (p - ib) = 0, \\ ⑥ : \dfrac{R}{4} + \alpha^3(p+ib) = 0. \end{cases}$$

À l'aide de ⑤ et ⑥ on calcule R^2 : en effet on a :

$$\left(\alpha^3\frac{R}{4}\right)\left(\frac{R}{4}\right) = (p-ib)\alpha^3(p+ib) = \alpha^3(p^2+b^2),$$

et comme $|\alpha| = 1$, on peut simplifier par α^3, d'où finalement :

$$R^2 = 16(p^2+b^2),$$

et les coordonnées a et b de Ω sont telles que :

$$2pa - b^2 - 8(p^2+b^2) = 0, \text{ soit encore :}$$

$$9b^2 - 2pa + 8p^2 = 0.$$

Le point Ω doit donc être sur la parabole d'équation :

⑦ $$9y^2 - 2px + 8p^2 = 0,$$

si on pose alors $R^2 = 16(p^2+y^2)$, (pour Ω de coordonnées x et y), il reste à voir si α tel que $\alpha^3\frac{R}{4} + p - iy = 0$, est de module 1.

Or on a $\alpha^3\frac{R}{4} = -p + iy$, d'où $\overline{\alpha}^3\frac{R}{4} = -p - iy$ et :

$|\alpha|^6 \frac{R^2}{16} = p^2 + y^2 = \frac{R^2}{16}$: on a bien $|\alpha| = 1$.

On peut à partir d'un point de la parabole d'équation ⑦, retrouver R et α, d'où un triangle équilatéral : toute la parabole convient.

14.15. On considère l'hyperbole H d'équation $xy = a^2$ dans un repère orthonormé.

On la paramètre par : $x = at$, $y = \frac{a}{t}$, pour t dans $\mathbb{R}^*$, et on se donne A par son paramètre r.

Si P et Q correspondent aux paramètres s et t, les composantes de $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont :

$$\overrightarrow{AP} : \left| \begin{array}{l} a(s-r) \\ a\left(\frac{r-s}{sr}\right) \end{array} \right. \quad \text{et } \overrightarrow{AQ} : \left| \begin{array}{l} a(t-r) \\ a\left(\frac{r-t}{tr}\right) \end{array} \right.,$$

donc la condition d'orthogonalité se traduit par :

$$(s-r)(t-r)\left(1 + \frac{1}{r^2 ts}\right) = 0.$$

Les cas $s = r$, ou $t = r$, correspondent à la nullité de $\overrightarrow{AP}$, ou de $\overrightarrow{AQ}$. On les écarte et il reste la condition $r^2 ts + 1 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour composantes :

$$\overrightarrow{PQ} \left| \begin{array}{l} a(t-s) \\ a\left(\frac{s-t}{ts}\right) \end{array} \right.$$

et, pour $t \neq s$, (si $t = s$, $1 + r^2 ts = 1 + r^2 t^2$ aura du mal à être nul), on a un vecteur parallèle à $\vec{V}$ de composantes 1 et $-\frac{1}{ts}$, soit, compte tenu de la relation $1 + r^2 ts = 0$, de composantes 1 et r^2.

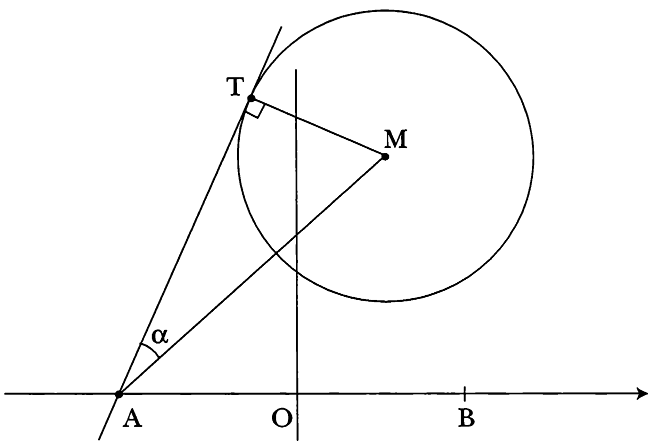
Comme r est fixé, cette direction est fixe.

Un vecteur tangent à l'hyperbole en A ayant pour composantes $a, -\frac{a}{r^2}$, il est orthogonal à $\vec{V} : (1, r^2)$, en conclusion la droite (P, Q) reste parallèle à la normale en A à l'hyperbole.

On pouvait se douter qu'il s'agit de cette direction car, partant de Q voisin de A sur l'hyperbole, la perpendiculaire en A à (A, Q) détermine P, et si Q tend vers A, cette perpendiculaire tend vers la normale en A à l'hyperbole.

14.16. Prenons un repère orthonormé de façon que les coordonnées de A et B soient respectivement $(-a, 0)$ et $(a, 0)$.

Si le cercle de centre $M(x, y)$, de rayon R, est vu de A sous l'angle 2α, c'est que l'angle de AM et d'une tangente au cercle, AT, est α, donc que $\sin\alpha = \frac{MT}{AM} = \frac{R}{AM}$, ou encore que $R^2 = (\sin^2\alpha)[(x+a)^2 + y^2]$.



L'ensemble cherché est donc, (calcul analogue fait à partir de B), l'ensemble des points $M(x, y)$, tels que :

$$(x^2 + y^2 + 2ax + a^2)\sin^2\alpha = (x^2 + y^2 - 2ax + a^2)\sin^2\beta,$$

soit encore :

$$(x^2 + y^2)(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) + 2ax(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) + a^2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) = 0.$$

Si $\sin^2\alpha \neq \sin^2\beta$, par exemple $\sin^2\alpha > \sin^2\beta$, on a un cercle d'équation :

$$x^2+y^2+2ax\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}+a^2 = 0,$$

centré en I : $\left(-a\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}, 0\right)$, et de rayon r tel que :

$$r^2 = \left(a^2\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}\right)^2-a^2\right),$$

$$= a^2\,\frac{4(\sin^2\alpha\sin^2\beta)}{(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^2} \text{ : c'est un vrai cercle.}$$

Si $\alpha = \beta$, l'ensemble cherché, d'équation $2ax = 0$, est réduit à la médiatrice de $[A, B]$, ce qui était intuitivement évident, (un cercle « plus près » de A que de B sera vu de A sous un angle plus grand).

14.17. L'aire du triangle est la moitié de la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{M_1M_2}\wedge\overrightarrow{M_1M_3}$, (si on considère le plan de la parabole plongé dans $\mathbb{R}^3$).

C'est donc la moitié de la valeur absolue du déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2p}\begin{vmatrix} y_2^2-y_1^2 & y_3^2-y_1^2 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2p}(y_2-y_1)(y_3-y_1)\begin{vmatrix} y_2+y_1 & y_3+y_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2p}(y_2-y_1)(y_3-y_1)(y_2-y_3).$$

Vu l'indexation croissante des ordonnées l'aire vaut donc :

$$\frac{1}{4p}(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_2-y_1).$$

14.18. Si on note z_1, z_2, z_3 et z_4 les zéros du polynôme, ce seront les sommets d'un parallélogramme si on a une relation du genre

$z_4 - z_1 = z_3 - z_2$, ou $z_4 + z_2 = z_1 + z_3$, l'indexation n'ayant aucune importance.

C'est donc équivalent à ce que la somme de deux zéros soit la somme des deux autres.

On pose alors $s = z_1 + z_2 = z_3 + z_4$, et on introduit :

$$p = z_1 z_2 \text{ et } q = z_3 z_4.$$

Ces paramètres p, q et s sont tels que :

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2s = 0 \ ;$$

$$z_1 z_2 + z_1(z_3 + z_4) + z_2(z_3 + z_4) + z_3 z_4 = a \ ;$$

$$z_1 z_2(z_3 + z_4) + z_3 z_4(z_1 + z_2) = -b$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = c.$$

Compte tenu de $s = 0$, ces relations se réduisent à :

$$\begin{cases} p + q = a \\ -b = 0 \\ pq = c. \end{cases}$$

Si donc $b = 0$, avec p et q solutions complexes de l'équation :

$$t^2 - at + c = 0,$$

puis z_1, z_2 solutions de $Z^2 - p = 0$, et z_3, z_4 solutions de $Z^2 - q = 0$, on aura les sommets d'un parallélogramme de centre O en fait, le polynôme de départ étant bicarré.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc $b = 0$.

14.19. Si $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont les deux zéros du polynôme, supposés de module 1, on a :

$$\begin{cases} b = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ a = -(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}). \end{cases}$$

On peut encore, (calcul classique), écrire :

$$a = -e^{i\theta_2}(e^{i(\theta_1-\theta_2)}+1) = -e^{i\theta_2}e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right)$$

$$= -e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}2\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2},$$

et les relations s'écrivent encore :

$$\begin{cases} b = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ a = -2\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{cases}$$

Elles impliquent que $|b| = 1$, $|a| \leqslant 2$, et :

$$\operatorname{Arg} a = \frac{1}{2}\operatorname{Arg} b \text{ (modulo } \pi).$$

Réciproquement, si $b = e^{i\beta}$ et $a = re^{i\alpha}$ avec $0 \leqslant r \leqslant 2$ et $\beta = 2\alpha$ (modulo 2π), l'équation :

$$X^2 + re^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0,$$

a pour discriminant $r^2e^{2i\alpha} - 4e^{i\beta} = -(4-r^2)e^{2i\alpha}$,

ce qui est le carré de $i\sqrt{4-r^2}e^{i\alpha}$, et les zéros du polynôme sont :

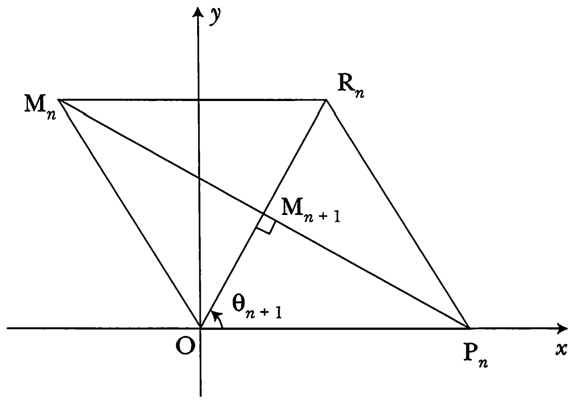
$$\frac{-re^{i\alpha} \pm i\sqrt{4-r^2}e^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha}\left(-\frac{r}{2} \pm \frac{i\sqrt{4-r^2}}{2}\right),$$

avec $\left|-\dfrac{r}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{4-r^2}}{2}\right|^2 = \dfrac{r^2}{4} + \dfrac{4-r^2}{4} = 1$: on a bien deux racines de module un.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc :

$$|b| = 1,\ |a| \leqslant 2 \text{ et } \operatorname{Arg} b = 2\operatorname{Arg} a \text{ (modulo } 2\pi).$$

14.20. Un peu de géométrie.



Soient M_n, P_n et R_n les points d'affixes u_n, $|u_n|$ et $u_n + |u_n|$: avec O ce sont les quatre sommets d'un parallélogramme qui est un losange, $(OM_n = OP_n = |u_n|)$, donc M_{n+1}, milieu de OR_n, aura un module et un argument connus, en fonction de $|u_n|$ et de $\theta_n = \text{Arg}(u_n)$.

L'argument sera $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$, ($OR_n$ axe de symétrie du losange), et comme dans le triangle rectangle $OM_{n+1}P_n$ on a :

$$\cos\theta_{n+1} = \frac{OM_{n+1}}{OP_n}, \text{ avec } OP_n = OM_n, \text{ il vient :}$$

$$OM_{n+1} = OM_n \cos\theta_{n+1}.$$

Un peu de rigueur : si $M_{n+1} = O$, il est difficile de parler d'argument. Or ceci n'est possible que si O est le milieu de M_nP_n. D'où, en fonction de u_0, la discussion suivante.

Si $u_0 = 0$, pour tout n, on a $u_n = 0$: suite constante, nulle.

Si $\text{Arg}(u_0) = \pi$, M_0 et P_0 sont symétriques par rapport à l'origine, $u_1 = 0$, et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$: la suite devient constante, nulle, au rang 1.

Supposons alors $\theta_0 = \text{Arg}(u_0)$ *dans* $]-\pi, \pi[$,

on a $\theta_1 = \dfrac{\theta_0}{2}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$,

$\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'où $\cos\theta_n > 0$, et on a :

$\operatorname{Arg} u_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$ et $|u_n| = |u_{n-1}| \cos\dfrac{\theta_0}{2^n}$, d'où, par récurrence, pour $n \geqslant 1$:

$$|u_n| = |u_0| \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k}.$$

On a l'argument de u_n qui tend vers 0, quant au module, on étudie la limite du produit en passant aux logarithmes, or :

$$\ln|u_n| = \ln|u_0| + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\frac{\theta_0}{2^k}\right), \text{ et on a :}$$

$$v_k = \ln\left(\cos\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \ln\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2^{k+1}} + o\left(\frac{1}{2^k}\right)\right),$$

donc v_k est équivalent à $-\dfrac{\theta_0^2}{2^{k+1}}$: c'est le terme général d'une série convergente, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = r$ existe, avec $r > 0$, et finalement la suite est convergente vers une limite réelle strictement positive lorsque u_0 est dans $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite des réels négatifs.

En fait on peut calculer cette limite, ce qui rend d'ailleurs ridicule ce qui précède, n'ayons pas peur de le dire.

Comme on divise les angles en deux, on peut passer par la trigonométrie et remarquer que, pour θ_0 dans $]-\pi, \pi[$, d'abord si $\theta_0 = 0$, pour tout k, $\cos\dfrac{0}{2^k} = 1$, et $|u_n| = |u_0|$ converge vers $|u_0|$.

Puis, si $\theta_0 \neq 0$, on a $\sin\theta_0 = \sin 2 \cdot \dfrac{\theta_0}{2} = 2\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\dfrac{\theta_0}{2}$ d'où :

$$\cos\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\theta_0}{\sin\frac{\theta_0}{2}},$$

$$\cos\frac{\theta_0}{2^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta_0}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2^2}}, \ldots$$

et plus généralement :

$$\cos\frac{\theta_0}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta_0}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\theta_0}{2^n}},$$

d'où, en faisant le produit de ces relations :

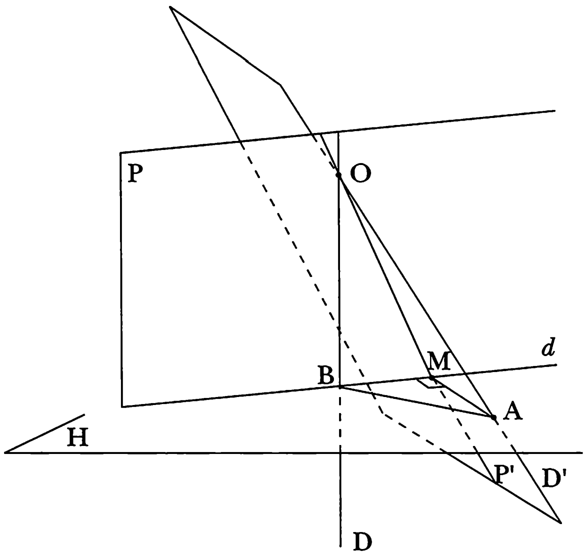
$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta_0}{2^k} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\theta_0}{\sin\frac{\theta_0}{2^n}}$$, ce qui est équivalent, si n tend vers $+\infty$, à :

$$(\sin\theta_0)\frac{1}{2^n\cdot\frac{\theta_0}{2^n}} = \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}.$$

Finalement, $|u_n|$ tend vers $|u_0|\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$, si $\theta_0 \neq 0$ modulo π, ce qui donne la limite de la suite : le nombre réel positif $|u_0|\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

14.21. a) Une figure pour y voir plus clair. Un plan P qui contient D, droite perpendiculaire au plan H, est lui-même perpendiculaire à H, et il est déterminé par son intersection $d = \mathrm{P} \cap \mathrm{H}$, avec d droite de H passant par B.

Le plan P ', perpendiculaire à P, contient la direction de droite orthogonale à P. Si dans H, on considère M, pied de la perpendiculaire issue de A à la droite d, on aura (AM) perpendiculaire à D et (AM) perpendiculaire à d, donc (AM) perpendiculaire au plan P. Comme A est sur D', la droite (AM) est dans P ' et dans H, c'est donc l'intersection de P ' et de H et M est alors le point commun aux trois plans P, P ' et H, et on a $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ orthogonaux.



b) Réciproquement, si M est dans H, sur le cercle de diamètre AB, et si on note d la droite (BM), on a (AM) orthogonale à d et à D donc à P, plan BOM, et le plan P ' = AOM, contenant la direction (AM) orthogonale à P est lui-même perpendiculaire à P. Bien sûr, dans ce qui précède, on suppose $A \neq M$ et $B \neq M$ puisque l'on parle des plans AOM et BOM.

c) Comme la droite $P \cap P'$ est la droite OM, passant par O, fixe, et par M qui décrit, dans H le cercle Γ de diamètre AB, cette droite engendre le cône S de sommet O et de courbe directrice le cercle Γ.

14.22. L'alignement est préservé par similitude, et multiplier des affixes par le même nombre c'est faire une similitude, aussi est-on tenté de multiplier par z^{-1}, si $z \neq 0$.

Après avoir constaté que $z = 0$ est solution, on remplace le problème par : trouvez z tel que les points d'affixe $1, z$ et z^4 soient alignés.

Là encore, $z = 1$ est solution, puis, pour $z \neq 1$, on peut dire que A, B, C, d'affixes $1, z$ et z^4 sont alignés si et seulement si il existe λ réel tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, soit encore :

$$z^4 - 1 = \lambda(z-1), \text{ ou } \frac{z^4-1}{z-1} = z^3 + z^2 + z + 1 \text{ soit réel.}$$

En posant $z = x + iy$, on doit donc traduire que la partie imaginaire de $z^3 + z^2 + z$ est nulle, donc que :

$$3yx^2 - y^3 + 2xy + y = 0.$$

La condition s'écrit encore : $y(3x^2 - y^2 + 2x + 1) = 0$, donc l'ensemble cherché est la réunion de :

l'axe des x, ($y = 0$), sur lequel se trouvent les deux solutions particulières trouvées, et :

l'hyperbole d'équation :

$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$, ce qui se met encore sous la forme réduite :

$$\frac{y^2}{\frac{2}{3}} - \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} - 1 = 0,$$

ce qui permet éventuellement de placer ses axes de symétrie.

14.23. Par produit vectoriel, on détermine des vecteurs directeurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ de D_1 et D_2. On a :

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix}, \text{ et } \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{vmatrix},$$

vecteur que l'on remplace par $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ avec :

$$\overrightarrow{W_1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \overrightarrow{W_2} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_1} \wedge \overrightarrow{W_2} = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$, parallèle à $\overrightarrow{W}' = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, est perpendiculaire à D_1 et D_2, donc $\overrightarrow{W}'$ dirige la perpendiculaire commune aux deux droites.

On cherche alors un plan passant par D_1, parallèle à $\overrightarrow{W}'$, et un autre passant par D_2, parallèle aussi à $\overrightarrow{W}'$: leur intersection sera la perpendiculaire commune, Δ.

Tous les plans passant par D_1, sauf d'équation $x - y - 1 = 0$, ont une équation du type :

P_t : $(x + 2y + 3z - 6) + t(x - y - 1) = 0$,

et P_t est orthogonal à $\overrightarrow{V_t}$: $\left|\begin{array}{l} 1+t \\ 2-t \\ 3 \end{array}\right.$.

Donc P_t sera parallèle à $\overrightarrow{W}'$ si et seulement si $\overrightarrow{V_t} \cdot \overrightarrow{W'} = 0$, soit si $4 + t = 0$, d'où $t = -4$, et l'équation :

P_{-4} : $-3x + 6y + 3z - 2 = 0$.

On procède de même pour D_2, en considérant les plans Q_t d'équation :

Q_t : $(2x + y + z - 1) + t(x - 2y + 3z - 2) = 0$,

plan perpendiculaire cette fois à $\overrightarrow{V_t}$: $\left|\begin{array}{l} 2+t \\ 1-2t \\ 1+3t \end{array}\right.$,

et la condition $\overrightarrow{V_t} \cdot \overrightarrow{W}' = 0 = 3 + 4t$, d'où $t = -\dfrac{3}{4}$, pour un plan contenant D_2 et la perpendiculaire commune.

On peut en fait prendre l'équation :

$4(2x + y + z - 1) - 3(x - 2y + 3z - 2) = 0$, soit encore :

$5x + 10y - 5z + 2 = 0$.

Finalement, la perpendiculaire commune est la droite Δ, intersection des deux plans d'équations :

$$\begin{cases} -3x + 6y + 3z - 2 = 0, \\ 5x + 10y - 5z + 2 = 0. \end{cases}$$

14.24. Si u est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine B de direction F, on prend b dans B, et en décomposant le vecteur $\overrightarrow{bm}$ dans $\mathbb{R}^n = F \oplus F^{\perp}$ en $\overrightarrow{bm} = \vec{X} + \vec{Y}$, $(\vec{X} \in F, \vec{Y} \in F^{\perp})$, on a :

$$u : m \rightsquigarrow m' \text{ tel que } \overrightarrow{bm'} = \vec{X} - \vec{Y},$$

mais alors, m' donne m'' tel que :

$$\overrightarrow{bm''} = \vec{X} - (-\vec{Y}) = \vec{X} + \vec{Y} = \overrightarrow{bm},$$

d'où $m'' = u^2(m) = m$.

Réciproquement soit u une isométrie affine involutive. Si f est son application linéaire associée, f^2 est associée à $u^2 = \mathrm{id}_A$, donc f^2 est l'identité vectorielle sur $E = \mathbb{R}^n$.

Mais f annulant le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1$ est diagonalisable, de valeurs propres 1 et -1. On note E_1 et E_{-1} les sous-espaces propres associés.

Comme $u(u(a)) = a$, puisque $u^2 = \mathrm{id}_A$, en posant $a' = u(a)$, on a $u(a') = a$, donc b, milieu de $[a, a']$, (ou équibarycentre) est tel que $u(b)$ est le milieu de $u(a)$ et $u(a')$, donc de a' et a, par conservation du barycentre. On a $u(b) = b$.

Mais alors, tout point m du sous-espace affine B passant par b, de direction $E_1 = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, est tel que :

$$\overrightarrow{u(b)u(m)} = \overrightarrow{bu(m)} = f(\overrightarrow{bm}) = \overrightarrow{bm},$$

donc $u(m) = m'$.

Ce sous-espace B est formé de points invariants, or u n'est pas l'identité, donc ce n'est pas A entier, d'où E_{-1} non réduit à $\vec{0}$.

En prenant alors m quelconque dans A, et en décomposant $\overrightarrow{bm}$ en $\overrightarrow{bm} = \vec{X} + \vec{Y}$ avec $\vec{X}$ dans E_1 et $\vec{Y}$ dans E_{-1}, le point m a pour image m' tel que :

$$\overrightarrow{u(b)u(m)} = \overrightarrow{bm'} = \vec{X} - \vec{Y},$$

et u étant une isométrie, on a :

$\|\vec{X}+\vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}-\vec{Y}\|^2$ ce qui équivaut à $<\vec{X}, \vec{Y}> = 0$: les sous-espaces vectoriels E_1 et E_{-1} sont orthogonaux l'un de l'autre, $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ étant quelconques dans ces sous-espaces.

Finalement u est bien la symétrie orthogonale par rapport à B.

14.25. Soit u une isométrie affine directe. Son application linéaire associée, f, est une isométrie directe de E espace vectoriel euclidien.

Les valeurs propres, (sur $\mathbb{C}$), de f sont à choisir parmi 1, -1, et des nombres complexes de module 1, mais si $e^{i\theta}$ est valeur propre de multiplicité p, $e^{-i\theta}$ est aussi valeur propre de multiplicité p. Le produit des valeurs propres non réelles est donc 1, car $(e^{i\theta}e^{-i\theta})^p = 1$.

Finalement, le déterminant de f étant 1, la valeur propre -1 est de multiplicité paire, et 1 est valeur propre d'ordre impair puisque E est de dimension impaire.

Avec $E_1 = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, il en résulte que si a est point fixe de u, tout point m tel que $\overrightarrow{am} \in E_1$ est tel que :

$$\overrightarrow{u(a)u(m)} = \overrightarrow{au(m)} = f(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{am},$$

donc $u(m) = m$.

Donc u n'admet pas de point fixe, ou admet pour points fixes tous les points du sous-espace affine de direction $E_1 \neq \{\vec{0}\}$, passant par a, point fixe : le cas un seul point fixe est exclu.

Arcs paramétrés

Les arcs plans peuvent se représenter de trois façons localement équivalentes au voisinage des points réguliers :

1°) *en représentation paramétrique :* $x = f(t)$, $y = g(t)$, et en $m_0(t_0)$, point régulier, la tangente est dirigée par le vecteur de composantes $(f'(t_0), g'(t_0))$;

2°) *en équation cartésienne :* $y = f(x)$, (ou $x = g(y)$), et dans ce cas la tangente en m_0 : (x_0, y_0) est la droite de pente $f'(x_0)$, passant par m_0 ;

3°) *en équation implicite :* $f(x, y) = 0$, et en m_0 : (x_0, y_0), point régulier la tangente aura pour équation :

$$(\mathrm{Y} - y_0) f'_y(x_0, y_0) + (\mathrm{X} - x_0) f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Du fait de l'existence de ces différents modes de représentation, pour un exercice un peu général, il faudra choisir celui qui donnera le moins de calculs, compte tenu des questions posées, et ce choix s'ajoute à celui d'un repère, éventuellement mobile.

Par exemple, pour des *questions d'intersection* de courbes planes, *ou de contact*, (courbes tangentes), on a tout intérêt à prendre un arc en implicite, l'autre en paramétré et à former l'équation aux paramètres des points d'intersection. Il n'y a alors qu'une équation à une inconnue à résoudre, ou à étudier pour traduire l'existence d'une racine double par exemple.

Voir de telles approches en 15.1, 15.2.

Pour *les arcs gauches* on a de même soit une représentation paramétrique, soit une intersection de deux nappes qui elles, peuvent être données par des équations implicites, ou des équations cartésiennes.

Dans ce cas la tangente en un point régulier d'un arc intersection de deux nappes régulières sera l'intersection des plans tangents, (15.27).

On retrouve dans l'étude des arcs paramétrés, l'une des difficultés de la géométrie analytique, (mais difficulté qui, résolue, donne tout l'intérêt de cet outil) : *savoir analyser le problème posé avant de se lancer dans des calculs*, et ne pas vouloir « déterminer tous les intermédiaires ».

Ainsi, si des points sur un arc paramétré jouent des rôles symétriques, peut-être qu'on peut éviter leur détermination individuelle, et rester au niveau des fonctions symétriques de leurs paramètres, (15.1) ; ou passer à leur isobarycentre (15.4).

De même une *courbe orthoptique* peut se trouver en raisonnant uniquement sur la relation $p'p'' = -1$ que doivent vérifier les pentes de deux droites perpendiculaires, (voir 15.31).

Cet exercice 15.31 est par ailleurs l'occasion de voir comment en fait on se focalise sur ce que l'on cherche, sur le but visé, pour faire la mise en équation.

Voir aussi en 15.18, un exercice où on reste au niveau de l'équation aux paramètres des points d'intersection.

Un autre aspect de la mise en équation, *c'est le choix du repère*, choix primordial car de lui dépend bien souvent la difficulté des calculs.

Si les axes jouent un rôle dans les données, le choix est tout de suite fait, (voir 15.29), mais si on a le choix, on utilisera au mieux les symétries des données pour choisir l'origine et les axes, (voir 15.4 ; 15.8).

Le plus souvent, on aura cependant intérêt à prendre *un repère mobile*, dans lequel les orthogonalités, les carrés de norme peuvent être très faciles à calculer. Le seul problème sera de ne pas oublier les dérivées des vecteurs.

C'est ainsi que pour des questions de courbure, développées, on passera par le repère de Frenet, $(\vec{T}, \vec{N})$, (voir 15.30), ou qu'on utilisera un repère de base $(\vec{u}, \vec{v})$, vecteurs unitaires orthogonaux, $\vec{u}$ faisant l'angle θ avec une direction fixe, d'où $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$, ou tout autre repère variable lié aux données, (voir 15.9, 15.30, 15.22).

Ce repère $(\vec{u}, \vec{v})$ avec $(\vec{i}, \vec{u}) = \theta$, c'est celui associé au mode de représentation en « coordonnées polaires » d'un arc, mode qui peut être utile pour voir si un arc est borné, (voir 15.10), car on étudie les variations de $\rho(\theta)$, ou d'un majorant de $|\rho(\theta)|$.

Ne pas oublier, pour un arc « en polaires », $\rho = f(\theta)$:

1°) que si $\rho(\theta_0) = 0$, (avec $\rho'(\theta_0) \neq 0$), la droite d'angle polaire θ_0 passant par l'origine est alors tangente à l'arc à l'origine ;

2°) que les *antipériodes* peuvent exister, (voir 15.12) : si la période d'étude de l'arc est du genre $2 \cdot (2p+1)\pi$, et que l'on a :
$f(\theta + (2p+1)\pi) = -f(\theta)$, en augmentant l'angle de $2p\pi + \pi$ on est

revenu au même point, donc on n'étudiera que pour θ dans un intervalle d'amplitude $(2p+1)\pi$, sinon on obtient deux fois la courbe, alors, gare aux points doubles ;

3°) à ce sujet, les *points doubles* d'un arc en polaires, dont l'intervalle d'étude est la longueur $2p\pi$, s'obtiennent en résolvant les équations :

$$\begin{cases} f(\theta) = f(\theta + 2k\pi) \; ; \; 1 \leqslant k \leqslant p-1, \text{ceci pour } p \geqslant 2, \text{ et :} \\ f(\theta) = -f(\theta + \pi + 2k\pi) \; ; \; 0 \leqslant k \leqslant p-1, \text{ceci pour } p \geqslant 1 ; \end{cases}$$

4°) l'étude particulière des *branches infinies*, avec, lorsque : $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = +\infty$ ou $-\infty$, la recherche de : $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$, ce qui permet de savoir, en cas d'existence de cette limite, ℓ, qu'il y a une asymptote, la droite d'ordonnée ℓ dans le repère mobile $(O\,;\,X, Y)$, avec $(Ox, OY) = \theta_0 + \dfrac{\pi}{2}$.

Mais je suis certain que vous connaissez très bien tout cela.

Il y a alors une quatrième manière de considérer les arcs plans, où tout ce qu'on vient de dire sur le choix du repère, repère mobile, la mise en évidence des tangentes, normales... se condense : c'est la donnée d'un arc par son *équation d'Euler*, c'est-à-dire comme enveloppe de la famille de ses tangentes, les droites D_θ d'équation normale :

$$D_\theta : \quad x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0,$$

avec D_θ perpendiculaire, en H tel que $\overrightarrow{OH} = p(\theta)\vec{u}$, au vecteur $\vec{u}$, avec $\vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$.

C'est pratique pour : tangentes, normales, (15.5) ; questions de podaires (15.11) ; de développées (15.12) ; de rayons de courbure (15.3) ; ou des problèmes d'enveloppe, souvent facilités (15.12, 15.15) par cette équation d'Euler.

Parlons un peu du *rayon de courbure* d'un arc plan birégulier. C'est $\mathscr{R} = \dfrac{ds}{d\varphi}$, s abscisse curvilique et φ angle de la tangente orientée et d'une direction fixe, ce qui conduit aux expressions connues, (ou que l'on retrouve) :

$$\mathscr{R} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - x''y'}, \text{ en paramétrés ;}$$

$$\mathcal{R} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}, \text{ en polaires ;}$$

$$\mathcal{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \text{ en cartésienne : } y = f(x), \text{ expression pouvant}$$

même s'employer en implicites, voir 15.13 ou 15.19.

A ces formules, j'ajouterai volontiers les deux résultats suivants.

Dans un repère $(m_0 \,;\, X, Y)$, orthonormé, d'axe des abscisses la tangente à l'arc, supposé orienté suivant les X croissants, on a :

$$\mathcal{R} = \lim_{X \to X_0} \frac{X^2}{2Y}, \text{ (voir 15.9).}$$

Si l'arc est donné par son équation d'Euler, on a $\mathcal{R} = p + p''$, (voir 15.15).

Il reste à parler de quelques aspects techniques sur les arcs.

Les enveloppes : c'est facile, on a une équation de droite fonction d'un paramètre, on dérive par rapport à ce paramètre, et on résoud le système : voir 15.6, 15.7, 15.8, 15.14.

Bien sûr, l'équation d'Euler est particulièrement adaptée, comme le montrent les exercices 15.12, 15.15, 15.32.

Les équations intrinsèques : pour un arc plan, la donnée du rayon de courbure, fonction de s, abscisse curvilique, permet par des calculs de primitives, de retrouver l'arc à un déplacement près, (voir 15.21, 15.26). C'est technique, il faut savoir le faire.

Les *tracés des arcs en implicites* peuvent s'étudier en paramétrique, si par exemple on a une cubique à point double, (voir 15.16), ou une quartique à point triple, (15.17), mais ce n'est pas systématique (15.17).

Énoncés

15.1. Soient les deux paraboles d'équations $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2qy$. Montrer qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans l'une, circonscrits à l'autre.

15.2. Trouver les droites à la fois normales et tangentes à l'arc paramétré $\Gamma : x = 3t^2, y = 2t^3$.

15.3. Dans le plan euclidien, trouver les arcs plans de classe C^3 dont le cercle osculateur passe par un point fixe.

15.4. Trois points A, B, C, mobiles dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, vérifient, pour tout t, les relations :

$$\frac{\overrightarrow{dA}}{dt} = \overrightarrow{BC}(t) \; ; \; \frac{\overrightarrow{dB}}{dt} = \overrightarrow{CA}(t) \; ; \; \frac{\overrightarrow{dC}}{dt} = \overrightarrow{AB}(t).$$

Quelles sont leurs trajectoires ?

15.5. Arcs plans (Γ), de classe C^1, tels que la normale en M coupe $(O, \vec{i})$ en P et $(O, \vec{j})$ en Q avec $\|\overrightarrow{PQ}\| = a$ constante donnée, $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé.

15.6. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$. Deux droites parallèles, de direction variable, passent par A et B respectivement, (on les note D_A et D_B), et on considère les droites Δ obtenues en joignant un point d'intersection de D_A et du cercle C de centre O de rayon $\sqrt{2}$, avec un point d'intersection de D_B et de C. Enveloppe des droites Δ.

15.7. Soit un réel $a > 0$. Une droite variable coupe Ox en M et Oy en N tels que $\overline{OM} + \overline{ON} = a$. Enveloppe de D.

15.8. Soient deux droites orthogonales D et D' d'un plan euclidien, et A un point du plan, autre que l'intersection de D et D'. Par A on considère deux droites orthogonales variables, Δ et Δ'. Soit P l'intersection de D et Δ, et P' l'intersection de D' et Δ', et I le milieu de PP'.

Lieu géométrique de I. Enveloppe des droites (P, P').

15.9. Soit une hyperbole équilatère H, et un point M de H. On note C le centre de courbure en M de H. La normale à H en M coupe l'autre branche de H en N. Calculer le rapport $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{MN}}$.

15.10. Montrer que la courbe C d'équation implicite :

$y^2(y^2-2) = -x^2(x-1)(x-2)$ est bornée.

15.11. On appelle podaire de la courbe C vue de O, l'ensemble des projections orthogonales de O sur les tangentes à C.

a) Quelle est la courbe admettant pour podaire vue de O la courbe d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$?

b) On suppose que C passe par O. Étudier localement sa podaire vue de O, au voisinage de O. Préciser en particulier sa tangente.

15.12. Soit la courbe C d'équation $y^2-2x+1 = 0$. Condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la droite $D_\lambda : y = \lambda x$ coupe C en deux points M' et M'' distincts.

Enveloppe Γ des médiatrices des cordes M'M''.

Développée de Γ.

15.13. Soit une fonction f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions du Théorème des fonctions implicites sont réunies. Exprimer la courbure en un point de Γ, arc d'équation $f(x,y) = 0$, à l'aide des dérivées partielles de f.

15.14. Soient deux réels $m>0$ et $a>0$. Enveloppe des droites d'équations $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta} = 1$, α et β étant liés par la relation $\alpha^m+\beta^m = a^m$. Cas de $m = 1$ et $m = -2$.

15.15. Soit une fonction p de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodique, avec $p+p''>0$. On considère l'arc paramétré Γ :

$$\begin{cases} x(t) = p(t)\cos t - p'(t)\sin t, \\ y(t) = p(t)\sin t + p'(t)\cos t, \end{cases}$$

dans un repère orthonormé.

Montrer que, pour toute direction Δ donnée, il existe deux tangentes à Γ de direction Δ. Condition pour qu'elles soient distinctes.

Montrer qu'il existe deux points distincts de Γ où les tangentes sont parallèles, et où les rayons de courbure sont égaux.

15.16. Construire l'arc C d'équation implicite $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $(a > 0)$. Aire de la boucle.

15.17. Soit l'arc Γ d'équation implicite :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ay(x^2 - y^2) = 0, \ (a > 0).$$

Tracer Γ et calculer l'aire de la surface délimitée par Γ.

15.18. Soit, dans l'espace affine réel de dimension trois, l'arc Γ paramétré par $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$.

Montrer que le plan π_t, osculateur à Γ en $M(t)$, recoupe Γ en un point $M'(t)$, (sauf si $t = 0$).

On pose $M'(0) = M(0)$. Montrer que si pour t_1, t_2, t_3 et t_4 les points $M(t_i)$ de Γ sont coplanaires, il en est de même des $M'(t_i)$.

15.19. Montrer que l'équation :

$$x^3 + 2y^3 - x^2 + y = 0,$$

définit implicitement un arc dont on donnera la courbure à l'origine.

15.20. Allure au voisinage de $(0, 0)$ de l'arc Γ d'équation :

$$\cos(x + y) - \sin(x - y) - 1 = 0.$$

Allure de la courbe.

15.21. Courbes planes bi-régulières telles que le rayon de courbure $\mathscr{R}$ et l'abscisse curviligne vérifient l'égalité $\mathscr{R} = 1 + s^2$.

15.22. Arcs plans de classe C^2, d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ tels que le rayon de courbure au point d'angle polaire θ soit $\mathscr{R}(\theta) = \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

15.23. Le cadre est celui du plan euclidien orienté. On note s l'abscisse curviligne d'un arc régulier de classe C^∞, d'équation polaire $\rho(\theta)$. Trouver les arcs tels que $\rho^2 = 2as$.

15.24. Trouver les arcs plans réguliers Γ, ne passant pas par O, tels qu'en appelant T l'intersection de la tangente en M à Γ et de la droite symétrique de (OM) par rapport à Ox, le triangle OTM ait une aire constante.

15.25. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, trouver les arcs Γ réguliers, de classe C^1 tels que :

1°) aucune tangente de Γ ne soit parallèle à Ox, et :

2°) si M de Γ se projette en m sur Ox, et si la tangente en M coupe Ox en Q, on ait $\overline{Om} = a \cdot \overline{mQ}$, a constante strictement positive fixée.

15.26. Arcs plans de classe C^1 réguliers, tels que le rayon de courbure $\mathscr{R}$ et l'abscisse curviligne s vérifient la relation $\mathscr{R} = \sqrt{a^2 - s^2}$, a constante positive.

15.27. Soit Γ la courbe définie par les équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = 5. \end{cases}$$

Tangente en tout point ; plan osculateur en A : (1, 2, 2).

15.28. Soit la courbe gauche Γ paramétrée par :

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = a\operatorname{ch} t,\ a > 0.$$

Donner les équations de la tangente et du plan osculateur en tout point de Γ.

Montrer que les plans osculateurs restent tangents à une sphère fixe. Ensemble $\mathscr{C}$ des points de contacts.

15.29. Courbes planes telles que la tangente et la normale au point courant coupent l'axe des abscisses en deux points symétriques par rapport à l'origine.

15.30. Soit une courbe Γ de classe C^2, régulière, d'abscisse curviligne s, et $\vec{T}(s)$ le vecteur tangent unitaire orienté. On pose :

$$\overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OM}(s) + \lambda(s)\vec{T}(s) \text{ et } \overrightarrow{OQ}(s) = \overrightarrow{OM}(s) - \lambda(s)\vec{T}(s),$$

λ étant une fonction de classe C^1, M parcourant l'arc Γ.

Montrer que les normales en P et Q à Γ_1 et Γ_2, arcs décrits par P et Q, rencontrent la normale en M à Γ en deux points dont le milieu est le centre de courbure en M à Γ.

15.31. Soit une hyperbole H. Étudier l'ensemble des points M du plan par où passent deux tangentes perpendiculaires à l'hyperbole. Discussion suivant H.

15.32. Soit une ellipse $\mathscr{E}$ de centre O. Enveloppe des droites (M_1, M_2) joignant deux points M_1 et M_2 de $\mathscr{E}$ tels que (O, M_1) et (O, M_2) soient des droites perpendiculaires.

15.33. Soit la parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y^2 = 2px$, et A un point fixé sur la parabole.

a) Que dire de l'enveloppe de la famille des droites (M, N), M et N sur la parabole $\mathscr{P}$ tels que (A, M) et (A, N) soient des droites orthogonales.

b) On note $f(A)$ le point trouvé au a). Vérifier que $f(A)$ est sur la normale en A à $\mathscr{P}$ et trouver l'ensemble des $f(A)$ lorsque A décrit $\mathscr{P}$.

Solutions

15.1. On a le choix entre deux méthodes : prendre trois points sur une parabole, m_1, m_2, m_3 et traduire que les côtés du triangle sont tangents à l'autre : c'est un problème de racine double si on paramètre un côté ; ou bien prendre trois tangentes d'une parabole, chercher les sommets du triangle formé, (système à résoudre ?) et traduire qu'ils sont sur l'autre parabole... C'est long. Je prends la première méthode en préservant la symétrie des données. Je ferai les calculs pour m_1 et m_2, et procéderai ensuite par permutation circulaire. Soient $m_1(x_1, x_1^2/2q)$, $m_2(x_2, x_2^2/2q)$ et $m_3(x_3, x_3^2/2q)$ sur la deuxième parabole.

La droite $D(m_1, m_2)$ se paramètre en $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(x_2^2 - x_1^2)/2q$, et les paramètres t des points d'intersection de cette droite et de la première parabole sont solutions de :

$$(y_1 + t(x_2^2 - x_1^2)/2q)^2 - 2p(x_1 + t(x_2 - x_1)) = 0,$$

équation du second degré qui s'ordonne en :

$$\frac{t^2(x_2^2 - x_1^2)^2}{4q^2} + 2t\left(\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{2q}y_1 - p(x_2 - x_1)\right) + y_1^2 - 2px_1 = 0.$$

Elle sera tangente si et seulement si la racine est double, d'où la condition :

$$\left[(x_2 - x_1)\left(\frac{(x_2 + x_1)y_1}{2q}\right) - p\right]^2 - \frac{(x_2 - x_1)^2(x_2 + x_1)^2}{4q^2}(y_1^2 - 2px_1) = 0.$$

On peut simplifier par $\dfrac{(x_1 - x_2)^2}{4q^2}$, (vrai triangle : les x_i sont distincts) et regrouper en :

$$((x_2 + x_1)y_1 - 2pq)^2 - (x_2 + x_1)^2(y_1^2 - 2px_1) = 0.$$

Après élimination de $(x_2 + x_1)^2 y_1^2$, on peut remplacer y_1 par $\dfrac{x_1^2}{2q}$ là où il subsiste, d'où l'égalité :

$2px_1(x_1 + x_2)^2 - 4pq \cdot \dfrac{x_1^2}{2q}(x_1 + x_2) + 4p^2q^2 = 0$, qui après simplification par $2p$, et calcul, se réduit à la condition :

$$x_1x_2(x_1+x_2)+2pq^2 = 0\,.$$

Finalement, les côtés du triangle $m_1m_2m_3$ seront tangents à la première parabole si et seulement si x_1, x_2 et x_3 vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1x_2(x_1+x_2)+2pq^2 = 0 \\ x_2x_3(x_2+x_3)+2pq^2 = 0 \\ x_3x_1(x_3+x_1)+2pq^2 = 0. \end{cases}$$

On peut considérer x_3 comme un paramètre, et chercher si on peut trouver x_1 et x_2 vérifiant les trois relations.

Dans ce cas, x_1 et x_2 sont solutions de l'équation du second degré, en s, $s^2x_3+sx_3^2+2pq^2 = 0$, et si ces solutions sont réelles, leur somme x_1+x_2 vaut, pour $x_3 \neq 0$, $-x_3$, leur produit $\dfrac{2pq^2}{x_3}$, et la première relation devient $\dfrac{2pq^2}{x_3}(-x_3)+2pq^2 = 0$: c'est vérifié.

Or l'équation en s a deux racines réelles distinctes si et seulement si $x_3^4-8pq^2x_3>0$, soit pour $x_3(x_3^3-8pq^2)>0 \Leftrightarrow x_3<0$ ou $x_3>2(pq^2)^{1/3}$.

Il en résulte que pour tout x_3 vérifiant cela, on trouve x_1 et x_2 réels, d'où une infinité de triangles solutions.

15.2. On doit chercher les couples de paramètres (t, θ), tels que la droite D passant par $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(\theta)$, points de l'arc Γ, soit tangente en un point, normale en l'autre. Comme exprimer un contact tangentiel se traduit par l'existence d'une racine double, je choisis de traduire que la normale en $\mathrm{M}(\theta)$ a un contact d'ordre 2 en une autre valeur t.

Équation de la normale en $\mathrm{M}(\theta)$: $\overrightarrow{\mathrm{M}(\theta)p}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}t}(\theta) = 0$, soit :

$$(x-3\theta^2)6\theta+(y-2\theta^3)6\theta^2 = 0,\ \text{pour } \theta\neq 0,$$

soit encore $x+\theta y-3\theta^2-2\theta^4 = 0$.

(Pour $\theta = 0$, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2}(0) = 6\vec{\imath}$, la tangente est l'axe des x, mais il y a rebroussement de première espèce et on peut considérer que l'axe des y est normal en O à Γ).

Paramètres t des points d'intersection de Γ et de la normale en $\mathrm{M}(\theta)$: ils sont solutions de l'équation :

$$3t^2 + 2t^3\theta - 3\theta^2 - 2\theta^4 = 0.$$

Comme en tout point régulier, $(\theta \neq 0)$, la normale n'est pas tangente, on doit traduire que cette équation doit avoir, en plus de la racine θ, une racine double. Elle s'écrit :

$$(t-\theta)(2t^2\theta + t(2\theta^2+3) + 2\theta^3 + 3\theta) = 0,$$

et θ doit être tel que :

$(2\theta^2+3)^2 - 8\theta(2\theta^3+3\theta) = 0$, soit, (simplification par $3 + 2\theta^2 \neq 0$), tel que $2\theta^2 + 3 - 8\theta^2 = 0$, donc que :

$\theta^2 = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

L'équation du second degré en t s'écrit alors :

$\pm t^2\sqrt{2} + 4t \pm 2\sqrt{2} = 0$, soit encore :

$t^2 \pm 2\sqrt{2}t + 2 = (t \pm \sqrt{2})^2 = 0$, et elle admet pour racine $\mp\sqrt{2}$.

La normale en $\mathrm{M}(\theta)$: $\left(\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est donc tangente à l'arc Γ en :

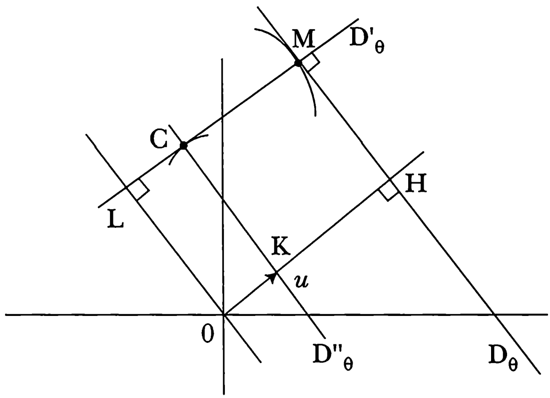
$\mathrm{M}(t)$: $(6, \mp 4\sqrt{2})$.

15.3. On prend ce point fixe pour origine du repère, et si le centre de courbure de Γ en M est C, on doit traduire $\|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\| = |\mathscr{R}|$, $\mathscr{R}$ rayon de courbure.

La donnée de (Γ) par son équation d'Euler :

D_θ : $x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$, conduit à une détermination immédiate du rayon de courbure.

Soit $\vec{u}\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{vmatrix}$.



On a $M(\theta)$ intersection de D_θ et D'_θ. De même, le centre de courbure est l'intersection de D'_θ et D''_θ, (développée = enveloppe des normales) d'où :

$$\overrightarrow{OH} = p(\theta)\vec{u} \; ; \; \overrightarrow{OL} = p'(\theta)\vec{v} \; ; \; \overrightarrow{OK} = -p''(\theta)\vec{u},$$

donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OK} = p'\vec{v} - p''\vec{u}$, alors que :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK} = (p + p'')\vec{u}.$$

La condition cherchée est donc $(p+p'')^2 = p'^2 + p''^2$ ou encore $\underline{2pp'' - p'^2 + p^2 = 0}$.

Cette équation différentielle du 2^e ordre est incomplète : on l'intègre en cherchant p' fonction de p.

Posons $p' = f(p) = \dfrac{dp}{d\theta}$, $p'' = \dfrac{d^2p}{d\theta^2} = f'(p)\dfrac{dp}{d\theta} = ff'$

et l'équation devient :

$$2pff' - f^2 + p^2 = 0,$$

où l'on cherche f fonction de p, ou même $g = f^2$, fonction de p. On a $pg' - g = -p^2$, équation linéaire en g fonction de p.

La solution $g = \lambda p$, de l'équation sans second membre, conduit, (variation des constantes) à $\lambda' = -1$, d'où :

$\lambda(p) = a - p$, a constante, donc :

$$f^2(p) = ap - p^2 = \frac{a^2}{4} - \left(p - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 - (2p-a)^2),$$

d'où, avec a réel de signe quelconque, (a non nul),

$$f(p) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a}{2}\left(1-\left(\frac{2p-a}{a}\right)^2\right)^{1/2}$$

ce qui conduit à $\operatorname{Arcsin}\frac{2p-a}{a} = \theta-\theta_0$, d'où $p = \frac{a}{2}(1+\sin(\theta-\theta_0))$.

Un paramétrage de Γ est obtenu en résolvant le système :

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta), \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = p'(\theta), \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x = p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta, \\ y = p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta, \end{cases}$ ce qui conduit, sauf erreur à :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(\cos\theta + \cos\theta\sin(\theta-\theta_0) - \sin\theta\cos(\theta-\theta_0)), \\ y = \frac{a}{2}(\sin\theta + \sin\theta\sin(\theta-\theta_0) + \cos\theta\cos(\theta-\theta_0)), \end{cases}$$ ou encore :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(\cos\theta - \sin\theta_0)\ ; \\ y = \frac{a}{2}(\sin\theta + \cos\theta_0). \end{cases}$$

On trouve en fait tous les cercles passant par 0, lorsque a et θ_0 varient.

15.4. Les points A, B, C interviennent de façon symétrique dans les données, aussi va-t-on prendre une origine en O, isobarycentre des positions initiales $A_0 = A(O)$, B_0 et C_0.

Comme $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OA(t)} + \overrightarrow{OB(t)} + \overrightarrow{OC(t)}) = 0\ ;$$

donc $\overrightarrow{OA(t)} + \overrightarrow{OB(t)} + \overrightarrow{OC(t)} = 3\overrightarrow{OG(t)}$, avec $G(t)$ barycentre de $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$, est un vecteur constant : *ce barycentre est fixe.*

$$\text{Puis, } \overrightarrow{\frac{d^2A}{dt^2}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$$

$$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OA},$$

compte tenu de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

Par raison de symétrie, on a donc $\overrightarrow{OA''} + 3\overrightarrow{OA} = 0$; $\overrightarrow{OB''} + 3\overrightarrow{OB} = 0$ et $\overrightarrow{OC''} + 3\overrightarrow{OC} = 0$, d'où des relations du type :

$$\overrightarrow{OA(t)} = \overrightarrow{A_0}\cos\sqrt{3}t + \overrightarrow{A_1}\sin\sqrt{3}t\ ;$$

$$\overrightarrow{OB(t)} = \overrightarrow{B_0}\cos\sqrt{3}t + \overrightarrow{B_1}\sin\sqrt{3}t\ ; \text{ et } \overrightarrow{OC(t)} = -\overrightarrow{OA(t)} - \overrightarrow{OB(t)}.$$

En fait on a dérivé pour obtenir l'équation $\overrightarrow{OA''} + 3\overrightarrow{OA} = 0$: il y a sans doute des solutions parasites. On revient donc aux données initiales, avec $\overrightarrow{OC(t)} = -(\overrightarrow{A_0} + \overrightarrow{B_0})\cos\sqrt{3}t - (\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{B_1})\sin\sqrt{3}t$.

On doit avoir :

$$-\sqrt{3}\overrightarrow{A_0}\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\overrightarrow{A_1}\cos\sqrt{3}t = -(\overrightarrow{A_0} + 2\overrightarrow{B_0})\cos\sqrt{3}t - (\overrightarrow{A_1} + 2\overrightarrow{B_1})\sin\sqrt{3}t,$$

valable pour tout t, d'où $\overrightarrow{A_1} = -\dfrac{\overrightarrow{A_0} + 2\overrightarrow{B_0}}{\sqrt{3}}$ et $\overrightarrow{B_1} = \dfrac{2\overrightarrow{A_0} + \overrightarrow{B_0}}{\sqrt{3}}$.

Sauf erreur, on trouve pour solution :

$$\overrightarrow{OA(t)} = \overrightarrow{A_0}\cos\sqrt{3}t - \frac{\overrightarrow{A_0} + 2\overrightarrow{B_0}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\ ;$$

$$\overrightarrow{OB(t)} = \overrightarrow{B_0}\cos\sqrt{3}t + \frac{2\overrightarrow{A_0} + \overrightarrow{B_0}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$$

$$\text{et } \overrightarrow{OC(t)} = -\overrightarrow{A(t)} - \overrightarrow{B(t)} = -(\overrightarrow{A_0} + \overrightarrow{B_0})\cos\sqrt{3}t + \frac{\overrightarrow{B_0} - \overrightarrow{A_0}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t,$$

donc les trajectoires sont :

des ellipses dans le plan $(O\ ; \overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_0})$ si $\overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_0}$ sont indépendants ;

des segments d'une droite si A_0 et B_0 sont liés.

15.5. Le recours à l'équation d'Euler de Γ s'impose, car en se donnant Γ comme enveloppe des droites D_θ d'équations :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0,$$

la droite D'_θ, d'équation :

$$-x\sin\theta + y\cos\theta - p'(\theta) = 0,$$

est la normale en M, intersection de D_θ et D'_θ.

Pour $\cos\theta \neq 0$ et $\sin\theta \neq 0$, les coordonnées de P sont donc :

$\left(-\dfrac{p'(\theta)}{\sin\theta}, 0\right)$ et celles de Q : $\left(0, \dfrac{p'(\theta)}{\cos\theta}\right)$.

La condition s'exprime donc par : $p'(\theta)^2\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\right) = a^2$,

soit encore $(p'(\theta))^2 = a^2\sin^2\theta\cos^2\theta$, d'où

$$p'(\theta) = \pm\frac{a}{2}\sin 2\theta \text{ et } \underline{p(\theta) = \mp\frac{a}{4}\cos 2\theta + k}.$$

Un paramétrage de l'arc est alors obtenu en résolvant le système :

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = \mp\dfrac{a}{4}\cos 2\theta + k \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = \pm\dfrac{a}{2}\sin 2\theta, \end{cases}$$

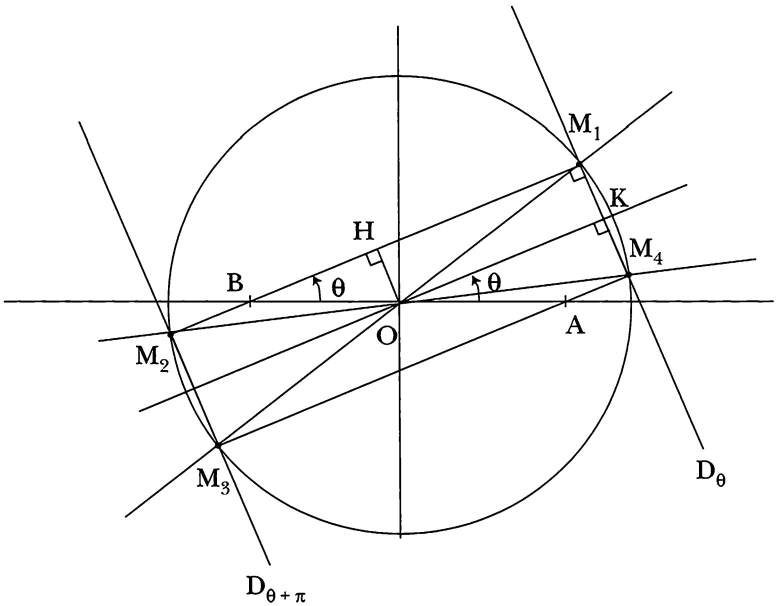
d'où $\begin{cases} x = \mp\dfrac{a}{4}\cos 2\theta\cos\theta + k\cos\theta \mp \dfrac{a}{2}\sin\theta\sin 2\theta \\ y = \mp\dfrac{a}{4}\cos 2\theta\sin\theta + k\sin\theta \pm \dfrac{a}{2}\sin 2\theta\cos\theta, \end{cases}$

et si vous y tenez, avec de la trigonométrie, et tous calculs, (justes j'espère) effectués :

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{8}\cos 3\theta + \left(k \mp \dfrac{3a}{8}\right)\cos\theta\ ; \\ y = \pm\dfrac{a}{8}\sin 3\theta + \left(k \pm \dfrac{3a}{8}\right)\sin\theta. \end{cases}$$

15.6. Un schéma ne fait pas de mal.

Les points A et B sont symétriques par rapport à O et les droites variables parallèles, elles sont symétriques par rapport à O donc cou-



pent C en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 qui sont en fait les sommets d'un rectangle car M_2 et M_4 sont symétriques par rapport à O, donc alignés avec O, et M_2M_4 diamètre du cercle implique $\widehat{M_2M_1M_4} = \dfrac{\pi}{2}$. On procède de même pour les autres sommets.

Deux des droites Δ sont M_2M_4 et M_3M_1 qui « pivotent » autour de O, l'enveloppe est réduite à O.

Pour les deux autres : M_1M_4 est le second côté d'un angle droit dont le premier passe par B, dont le sommet décrit C : il enveloppe une ellipse de cercle directeur C de foyers B et A. Il en est de même de M_2M_3, symétrique de M_1M_4 par rapport à O.

On peut retrouver ce résultat par le calcul, en cherchant l'enveloppe de D_θ connue par son équation normale.

On note θ l'angle de Ox et de la direction commune des deux droites parallèles, on projette O en H sur M_1M_2, en K sur M_4M_1, l'équation cherchée est :

$$D_\theta : \quad x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0,$$

avec $p(\theta) = \overline{OK}$.

Dans le triangle rectangle en H, OBH, avec $BO = 1$, on a $OH = |\sin\theta|$, donc $HM_1^2 = OM_1^2 - OH^2 = 2 - \sin^2\theta$ et, avec $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OK})$, on a $\overline{OK} = \sqrt{2 - \sin^2\theta}$, d'où l'équation d'Euler de l'enveloppe obtenue par :

$$\begin{array}{l|c|c} D_\theta : (x\cos\theta + y\sin\theta) = \sqrt{2-\sin^2\theta} & \cos\theta & \sin\theta \\ D'_\theta : (-x\sin\theta + y\cos\theta) = -\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}, & -\sin\theta & \cos\theta, \end{array}$$

d'où $x = \sqrt{2-\sin^2\theta}\cos\theta + \dfrac{\cos\theta\sin^2\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$

$= \dfrac{\cos\theta(2-\sin^2\theta+\sin^2\theta)}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} = \dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$, puis :

$y = \sqrt{2-\sin^2\theta}\sin\theta - \dfrac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}(2-\sin^2\theta-\cos^2\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$,

donc $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = \dfrac{1}{2-\sin^2\theta}$, avec $(2-\sin^2\theta)y^2 = \sin^2\theta$,

ce qui donne $\sin^2\theta(1+y^2) = 2y^2$, donc encore :

$$\frac{1}{2-\sin^2\theta} = \frac{1}{2-\dfrac{2y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{2}, \text{ et l'équation :}$$

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = \dfrac{y^2+1}{2}$, ou $\dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0$ de l'ellipse. Avouez que la géométrie dite « pure » a du bon.

15.7. Si t désigne l'abscisse de M, l'ordonnée de N sera $a - t$, donc, pour $t \neq 0$ et $t \neq a$, une équation de la droite D_t passant par M et N sera :

$\dfrac{x}{t} + \dfrac{y}{a-t} - 1 = 0$, ou, sans cas particuliers :

D_t : $(a-t)x+ty = -(t-a)t = at-t^2$. On dérive en t :

D'_t : $-x+y = a-2t$,

système de déterminant $a \neq 0$, de solution, $(1 \times D_t + (-t)D'_t)$:

$$x = \frac{t^2}{a}, \text{ d'où } y = x+a-2t = \frac{(t-a)^2}{a}.$$

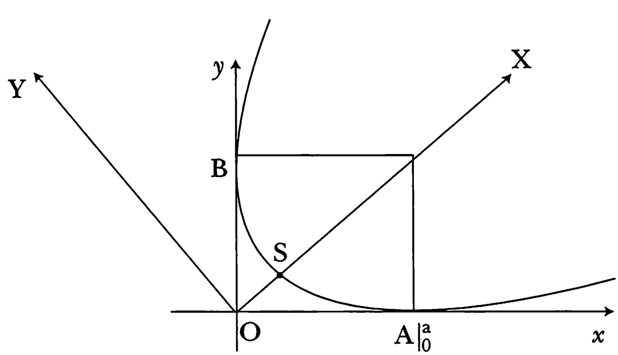
Comme $x'(t) = \dfrac{2t}{a}$ et $y'(t) = \dfrac{2(t-a)}{a}$ ne sont pas simultanément nuls, le paramétrage donné est celui de l'enveloppe Γ cherchée. On a $t = \dfrac{x+a-y}{2}$, d'où une équation implicite : $4ax = (x+a-y)^2$ de Γ qui permet de dire qu'il s'agit d'une parabole.

Si on veut connaître ses éléments remarquables, une rotation de $\dfrac{\pi}{4}$ du repère s'impose, d'où des formules de changement de coordonnées : $\sqrt{2}x = X-Y$ et $\sqrt{2}y = X+Y$ d'où $\sqrt{2}(x-y) = -2Y$, et une équation dans le nouveau repère :

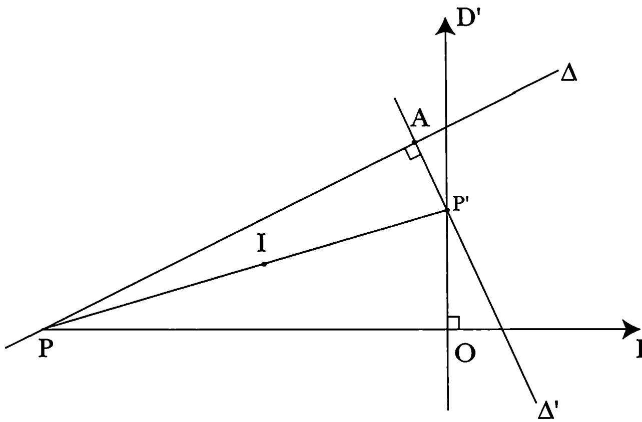
$$2\sqrt{2}a(X-Y) = (a-\sqrt{2}Y)^2, \text{ équation qui se réduit à :}$$

$$X = \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{Y^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{Y^2}{a\sqrt{2}}.$$

La parabole a pour sommet le point S : $X = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, $Y = 0$, pour axe la première bissectrice du repère initial. Elle est tangente en $A(a, 0)$ à l'axe Ox, (D_a), et en $B(0, a)$ à l'axe des y, (D_0).



15.8. Prenons un repère d'origine O, point d'intersection de D et D', d'axes D et D'.



Le quadrilatère PAP'O est inscriptible sur le cercle de diamètre [P, P'], donc I est le centre de ce cercle, et IA = IO nous permet de dire que I appartient à la médiatrice de [AO]. Est-ce qu'on obtient toute la médiatrice : l'analytique va nous le dire.

On définit Δ par le point A et un vecteur unitaire, $\vec{u}(\theta)$ d'angle θ avec D, $\theta \neq 0$ modulo π, pour que P existe.

On paramètre donc Δ par : $x = a + \lambda\cos\theta$, $y = b + \lambda\sin\theta$, et Δ' passe par $A(a, b)$, a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, d'où le paramétrage $x = a - \mu\sin\theta$, $y = b + \mu\cos\theta$ de Δ'.

Le point P de Δ est associé à λ annulant y, soit $\lambda = -\frac{b}{\sin\theta}$, donc P a pour coordonnées $(a - b \text{ cotan } \theta, 0)$; de même P' correspond à $\mu = \frac{a}{\sin\theta}$, d'où les coordonnées $(0, b + a \text{ cotan } \theta)$ de P'.

Le point I a pour coordonnées $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \text{ cotan } \theta$; $\frac{b}{2} + \frac{a}{2} \text{ cotan } \theta$, et cotan θ décrivant $\mathbb{R}$, I décrit la droite d'équation $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{2b}$, obtenue en éliminant cotan θ.

En réunissant les deux résultats, on obtient la médiatrice de [O, A]. Cet exercice montre les atouts et faiblesses de l'analytique et de la géométrie dite pure, et l'intérêt qu'il y a à utiliser chaque méthode pour ce qu'elle donne.

Pour l'enveloppe de (P, P '), on a intérêt à prendre comme paramètre $t = \operatorname{cotan}\theta$, d'où les coordonnées de P : $(a - bt, 0)$ et de P ' : $(0, b + at)$, et l'équation D_t de (P, P ') :

$$D_t : \quad \frac{x}{a - bt} + \frac{y}{b + at} - 1 = 0,$$

ou, plus symétriquement :

$$D_t : \quad (b + at)x + (a - bt)y - (a - bt)(b + at) = 0.$$

On dérive :

$$D'_t : \quad ax - by + 2abt - a^2 + b^2 = 0.$$

On résoud ce système, de déterminant $-b^2 - abt - a^2 + abt \neq 0$, car $A \neq O$, d'où :

$$x = \frac{a(a - bt)^2}{a^2 + b^2}, \; y = \frac{b(at + b)^2}{a^2 + b^2},$$

ce qui paramètre l'enveloppe.

Si on veut connaître la nature de cette courbe, on peut « éliminer » t, en remarquant que :

$$\begin{cases} (a^2 + b^2)\dfrac{x}{a} = a^2 - 2abt + b^2t^2 & ① \\[2ex] (a^2 + b^2)\dfrac{y}{b} = a^2t^2 + 2abt + b^2 & ②, \end{cases}$$

en formant ① + ②, on obtient $1 + t^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$;

en formant $-\ a^2① + b^2②$, il vient :

$$(a^2 + b^2)(-ax + by) = b^4 - a^4 + 2abt(a^2 + b^2), \text{ ou encore :}$$

$$-ax + by = b^2 - a^2 + 2abt.$$

On a donc :

$$(b^2 - a^2 + ax - by)^2 = (-\ 2abt)^2$$

$$= 4a^2b^2\left(\frac{bx + ay - ab}{ab}\right)$$

$$= 4ab(bx + ay - ab),$$

ce qui est une équation de parabole, qui peut encore s'écrire :

$$(ax-by)^2-2(a^2+b^2)(ax+by)+(a^2+b^2)^2 = 0,$$

une fois les calculs terminés.

15.9. Les points C et N étant sur la normale en M à l'hyperbole, on a tout intérêt à prendre pour repère $\mathscr{R}$, le repère de Frenet, d'origine M, de vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$.

Dans ce repère, l'hyperbole équilatère à une équation du second degré, la partie homogène du second degré, $ax^2+bxy+cy^2$ étant telle que les pentes t et t' des asymptotes, vérifient la relation $tt' = -1$, (droites perpendiculaires), avec t et t' solutions de l'équation :

$$ct^2+bt+a = 0,$$

d'où $c = -a$.

On peut écrire l'équation de H sous la forme :

$$a(x^2-y^2)+bxy+cx+dy = 0.$$

De plus H est tangente à l'axe des abscisses à l'origine, d'où $x = 0$ racine double si $y = 0$, ce qui implique $c = 0$, et comme $a \neq 0$, on peut simplifier par a, ce qui conduit à une équation en :

$$x^2-y^2+\beta xy+\gamma y = 0.$$

Si on oriente H avec les x croissants, le rayon de courbure est alors :

$$\mathscr{R} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{y^2-\beta xy-\gamma y}{2y}\right) = -\frac{\gamma}{2}.$$

La normale en M à H est l'axe des ordonnées, elle coupe H aux points d'ordonnées y vérifiant $-y^2+\gamma y = 0$ d'où $y = 0$ et $y = \gamma$.

On a donc $\mathscr{R} = \overline{\text{MC}} = -\dfrac{\gamma}{2}$ et $\overline{\text{MN}} = \gamma$ donc $\dfrac{\overline{\text{MC}}}{\overline{\text{MN}}} = -\dfrac{1}{2}$.

15.10. Si on développe l'équation, C est définie par la relation

$$f(x,y) = x^4+y^4-3x^3-2y^2+2x^2 = 0,$$

et nous allons montrer qu'il s'agit d'une partie bornée du plan en passant en polaires. On a la relation :

$$\varphi(r,\theta) = r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-3r^3\cos^3\theta+2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = 0,$$

qui correspond à $r = 0$, (l'origine), et à la relation :

$$r^2((\cos^2+\sin^2)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta)-3r\cos^3\theta+2\cos 2\theta = 0,$$

ou encore :

$$r^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)-3r\cos^3\theta+2\cos 2\theta = 0.$$

C'est une équation du second degré en r, de discriminant :

$$\Delta = 9\cos^6\theta - 4\cos 2\theta(2-\sin^2 2\theta).$$

Pour θ tel que Δ soit $\geqslant 0$, on aura en fait deux valeurs de r, données par $r = \dfrac{3\cos^3\theta \pm \sqrt{\Delta}}{2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)}$, ce qui prouve que C est une courbe, et de plus, comme $1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta \geqslant \frac{1}{2}$, et que $|\Delta| \leqslant 9+4\cdot 2 = 17$, on a $|r| \leqslant \dfrac{3+\sqrt{17}}{2\cdot\frac{1}{2}}$, donc C est une courbe bornée.

15.11. a) Prendre la courbe C par son équation d'Euler :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0,$$

cela s'impose.

La droite D_θ : $x\cos\theta+y\sin\theta-p(\theta) = 0$ étant tangente à la courbe, le projeté de l'origine sur cette tangente est le point $m(\theta)$ tel que $\overrightarrow{0m(\theta)} = p(\theta)\vec{u}(\theta)$, avec $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$.

On doit donc avoir $p(\theta) = 1+\cos\theta$, donc C est l'enveloppe des droites D_θ avec :

D_θ : $x\cos\theta + y\sin\theta - 1 - \cos\theta = 0$.

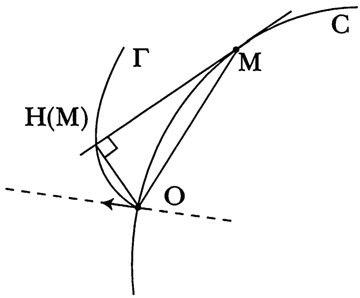
On dérive par rapport à θ :

D'_θ : $-x\sin\theta + y\cos\theta + \sin\theta = 0$,.

système qui se résoud en $x = 1+\cos\theta$ et $y = \sin\theta$: la courbe C est le cercle centré en $A(1, 0)$ de rayon 1.

b) Si la courbe C passe par O, si en M voisin de O sur C, la tangente existe et si $H(M)$ est la projection orthogonale de O sur cette tangente, dans le triangle rectangle en $H(M)$, $OH(M)M$, on a $OH(M) \leqslant OM$ donc $\lim\limits_{M\to 0} H(M) = 0$: la podaire de C vue de O passe par O.

De plus, $(OH(M))$ est la droite passant par O et orthogonale à la tangente en M à C, donc si M tend vers O sur C, la sécante $(OH(M))$ à la podaire Γ, tend vers la perpendiculaire en O à la tangente en O à C : la tangente à la podaire en O est donc la normale en O à C.



15.12. La courbe C, d'équation cartésienne $x = \frac{y^2+1}{2}$, est une parabole d'axe l'axe des x, de sommet A : $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

La droite D_λ coupe C en deux points distincts si et seulement si l'équation aux abscisses :

$$\lambda^2 x^2 - 2x + 1 = 0,$$

a deux racines distinctes puisque, D_λ non parallèle à l'axe des y, ne peut pas couper C en deux points de même abscisse. La condition est donc :

$$1 - \lambda^2 > 0, \text{ avec } \lambda \neq 0,$$

(car si $\lambda = 0$, on n'a plus une équation du second degré).

Comme on demande la développée de Γ, on a tout intérêt à partir de l'équation normale de Δ_θ médiatrice de M'M'', car Δ'_θ sera la normale à Γ, dont il suffira de chercher l'enveloppe. Dans ce qui précède, on désigne par Δ_θ, à la fois une droite et son équation, abus de notations fréquent dans ces questions d'enveloppes.

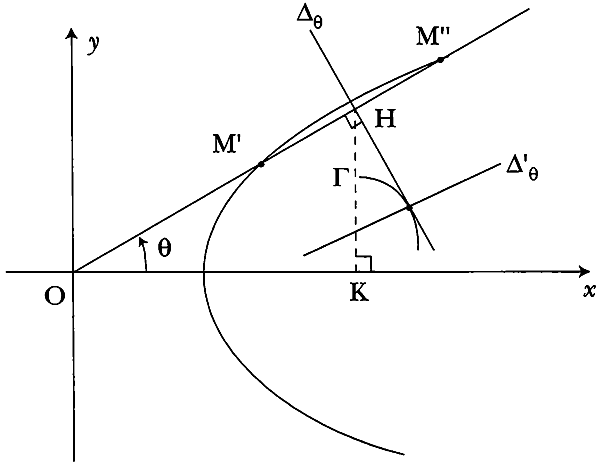
En posant $\lambda = \tan\theta$, $\left(\theta \neq 0, \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$, la médiatrice Δ_θ est perpendiculaire à $D_{\tan\theta}$, et passe par H, milieu de M'M'', donc, dans l'équation normale :

$$\Delta_\theta : \quad x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0,$$

de cette médiatrice, on a, (voir schéma) :

$$p(\theta) = \mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OK}}{\cos\theta}, \text{ avec } \mathrm{OK} = \frac{x' + x''}{2}.$$

On a : $\dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$, donc $p(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$.



Le reste est routine : pour Γ on résoud le système :

$$\begin{cases} \Delta_\theta : x\cos\theta + y\sin\theta - \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0, \\ \Delta'_\theta : -x\sin\theta + y\cos\theta + \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta} = 0, \end{cases}$$

d'où, (multiplicateurs : $(\cos\theta, -\sin\theta)$, puis $(\sin\theta, \cos\theta)$) :

$$x = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1 + 2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + 3\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \ ;$$

$$y = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{2\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = -2\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} \ ;$$

d'où une paramétrisation : $x = 1 + 3\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$, $y = -2\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$, θ non nul dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, (ou $x = 1 + \dfrac{3}{\lambda^2}, y = -\dfrac{2}{\lambda^3}, 0 < |\lambda| < 1$) de l'enveloppe Γ.

Comme Δ'_θ est la normale à Γ, la développée de Γ est l'enveloppe des droites Δ'_θ. On résoud donc :

$$\begin{cases} \Delta'_\theta : -x\sin\theta + y\cos\theta + \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta} = 0, \\ \Delta''_\theta : -x\cos\theta - y\sin\theta - \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{6\cos^3\theta}{\sin^4\theta} = 0, \end{cases}$$

ce qui se résoud en :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{5\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - 6\dfrac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta} = 1 - \dfrac{3\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - 6\dfrac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}\ ; \\ y = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - \dfrac{2\cos^3\theta}{\sin^3\theta} - \dfrac{5\cos\theta}{\sin\theta} - 6\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = -6\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} - 8\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\ ; \end{cases}$$

paramétrage de la développée, avec $0 < |\theta| < \dfrac{\pi}{2}$.

On peut, là aussi, paramétrer avec $\lambda = \tan\theta$, en :

$$x = 1 - \frac{3}{\lambda^2} - \frac{6}{\lambda^4}\ ;\ y = -\frac{6}{\lambda} - \frac{8}{\lambda^3}\ ;\ \text{pour } 0 < |\lambda| < 1\,.$$

15.13. Soit $M_0 : (x_0, y_0)$ un point de Γ, on a une différentielle de f en M_0 non nulle, donc $f'_x(x_0, y_0)$ ou $f'_y(x_0, y_0)$ est non nulle. Supposons par exemple $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, on sait que localement $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y$ fonction de x, (notons $y = \theta(x)$), avec θ de classe C^2.

La courbure γ c'est $\dfrac{d\varphi}{ds}$, avec φ angle $(\vec{i}, \vec{T})$.

On a $\tan\varphi = \theta'(x)$, donc $(1 + \tan^2\varphi)d\varphi = \theta''dx$.

De plus $ds^2 = (1+\theta'^2)dx^2$, d'où, si l'arc est orienté avec les x croissants, $ds = (1+\theta'^2)^{1/2}dx$ donc :

$$\gamma = \frac{\dfrac{\theta''}{1+\theta'^2}}{(1+\theta'^2)^{1/2}} = \frac{\theta''}{(1+\theta'^2)^{3/2}}.$$

On calcule θ' et θ'' en dérivant l'identité $f(x, \theta(x)) = 0$, qui caractérise, (localement) l'appartenance de M : $(x, \theta(x))$, à l'arc Γ. On a :

$$f'_x + f'_y\theta' = 0 \text{ , donc } \theta' = \frac{-f'_x}{f'_y}, \text{ puis :}$$

$$f''_{x^2} + 2f''_{xy}\theta' + f''_{y^2}\theta'^2 + f'_y\theta'' = 0, \text{ ce qui donne :}$$

$$-f'_y\theta'' = f''_{x^2} + 2f''_{xy}\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right) + f''_{y^2}\left(\frac{f'_x}{f'_y}\right)^2, \text{ d'où :}$$

$$\theta'' = -\frac{1}{(f'_y)^3}\left(f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_xf'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2\right).$$

Comme $(1+\theta'^2)^{3/2} = \dfrac{((f'_y)^2+(f'_x)^2)^{3/2}}{|f'_y|^3}$, on aura, toujours avec Γ orientée avec les x croissants :

$$\gamma = -\frac{f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_xf'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2}{((f'_y)^2+(f'_x)^2)^{3/2}},$$

si f'_y est positif, et l'opposé si f'_y est négatif.

15.14. Si m est réel quelconque (>0), la définition de α^m et de β^m exige $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Si m est rationnel à dénominateur impair, on peut se permettre des valeurs négatives. Mais dans ce cas, on peut remarquer que le passage de α à $-\alpha$, (et β conservé) correspond à une symétrie par rapport à Oy, (et α conservé, β donne $-\beta$ à une symétrie par rapport à Ox). Aussi supposera t'on α et β positifs, et même non nuls, pour considérer $D_{\alpha\beta}$ d'équation $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1 = 0$, quoique, en écrivant l'équation sous la forme $\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$, le cas $\alpha = 0$, (d'où $\beta \neq 0$) correspond à l'axe des y, et $\beta = 0$ correspond à l'axe des x.

En supposant α et β non nuls, (donc aussi tels que $\alpha^m \neq a^m$) on peut calculer $\beta = (a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m}}$ et obtenir la droite D_α :

$$D_\alpha : \ (a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m}} x + \alpha y - \alpha(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

On dérive en :

$$D'_\alpha : \ -\alpha^{m-1}(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1} x + y - (a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m}} + \alpha^m (a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1} = 0,$$

ou encore :

$$D'_\alpha : \ -\alpha^{m-1}(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1} x + y + (a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1}(2\alpha^m - a^m) = 0.$$

Le système $D_\alpha = 0$, $D'_\alpha = 0$ se résoud : pour calculer x on utilise les multiplicateurs 1 et $-\alpha$, et pour calculer y, les multiplicateurs α^{m-1} et $a^m - \alpha^m$. On obtient :

$$\left[(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m}} + \alpha^m (a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1}\right] x = \alpha(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m}}$$
$$+ \alpha(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1}(2\alpha^m - a^m),$$

ou encore, après simplification par $(a^m - \alpha^m)^{\frac{1}{m} - 1}$:

$$(a^m - \alpha^m + \alpha^m)x = \alpha(a^m - \alpha^m + 2\alpha^m - a^m), \text{ d'où en fait :}$$

$$x = \frac{\alpha^{m+1}}{a^m} \text{ : on croit rêver !}$$

Vu la symétrie des rôles joués par x, y d'une part, α et β d'autre part, on aurait, si le calcul avait été fait avec β,

$$y = \frac{\beta^{m+1}}{a^m}, \text{ donc } y = \frac{(a^m - \alpha^m)^{\frac{m+1}{m}}}{a^m},$$

(et vous pouvez faire le calcul si vous ne me croyez pas !).

On a donc : $x = \dfrac{\alpha^{m+1}}{a^m}$, $y = \dfrac{(a^m - \alpha^m)^{1+\frac{1}{m}}}{a^m}$,

paramétrisation de la partie de l'enveloppe correspondant à α et β liés par la relation $\alpha^m + \beta^m = a^m$, mais avec $\beta > 0$, ce qui, le cas échéant, ne donnera qu'une partie de l'enveloppe, à compléter par symétrie par rapport à Ox, (voir $m = -2$).

<u>*Cas particulier : $m = 1$*</u>.

On doit avoir $\alpha + \beta = a$, donc α peut décrire $\mathbb{R}$. On trouve une paramétrisation de l'enveloppe en :

$$x = \frac{\alpha^2}{a}\ ;\ y = \frac{(a-\alpha)^2}{a}.$$

L'élimination de α peut se faire, on a :

$$y = a - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{a} = a - 2\alpha + x,\ \text{donc } \alpha = \frac{a+x-y}{2},$$

et les coordonnées x et y d'un point de l'enveloppe vérifient l'équation $x = \dfrac{(a+x-y)^2}{4a}$: on est sur une parabole P.

Réciproquement, si M : (x, y) est sur P, on pose :

$$\frac{a+x-y}{2} = \alpha,\ \text{on a alors } x = \frac{\alpha^2}{a},\ \text{et comme on a :}$$

$$y = a + x - 2\alpha = a + \frac{\alpha^2}{a} - 2\alpha = \frac{(\alpha - a)^2}{a},$$

on obtient bien un point de l'enveloppe, qui est la parabole entière. (Voir exercice 15.7).

<u>*Cas de $m = -2$*</u>. On doit avoir $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{1}{a^2}$, d'où $\dfrac{1}{\alpha^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$ et donc $|\alpha| \geqslant a$, (de même $|\beta| \geqslant a$).

On obtient la paramétrisation $x = \dfrac{a^2}{\alpha}$ et $y = a^2\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

soit encore $y = a\left(1-\dfrac{a^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Mais ici, la relation $\alpha^{-2}+\beta^{-2} = a^{-2}$ étant paire en α et β, le choix de $\beta = (a^{-2}-\alpha^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ ne donne que la moitié de l'enveloppe : il faut aussi prendre $-\beta$,ce qui conduit à la symétrique de la partie précédente par rapport à Ox, obtenue avec $x = \dfrac{a^2}{\alpha}$ et $y = -a\left(1-\dfrac{a^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme $\dfrac{1}{\alpha^2} = \dfrac{x^2}{a^4}$, on a encore deux équations :

$y = \pm a\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, de l'enveloppe, qui est donc le cercle d'équation $x^2+y^2 = a^2$.

15.15. Il faut reconnaître dans le paramétrage de Γ, celui de l'enveloppe de la famille de droites D_t, d'équations :

D_t : $x\cos t+y\sin t-p(t) = 0$, car en dérivant on a :

D'_t : $-x\sin t+y\cos t-p'(t) = 0$,

d'où, en résolvant (multiplicateurs $(\cos t, -\sin t)$, puis $(\sin t, \cos t)$:

$$x(t) = p(t)\cos t-p'(t)\sin t \text{ et } y(t) = p(t)\sin t+p'(t)\cos t.$$

La tangente en M, point de Γ de paramètre t, est donc D_t, orthogonale au vecteur $\overrightarrow{u(t)} = \vec{i}\cos t+\vec{j}\sin t$, donc D_t et $D_{t+\pi}$ sont parallèles, de direction $\vec{u}\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Sont-elles distinctes ? On sait que D_t passe par le point H_t tel que $\overrightarrow{OH_t} = p(t)\overrightarrow{u(t)}$, et $D_{t+\pi}$ par le point K_t tel que

$\overrightarrow{OK_t} = p(t+\pi)\vec{u}(t+\pi) = -p(t+\pi)\overrightarrow{u(t)}$, ces deux droites étant perpendiculaires à $\overrightarrow{u(t)}$, donc la longueur de :

$$\overrightarrow{K_tH_t} = \overrightarrow{OH_t} - \overrightarrow{OK_t} = (p(t)+p(t+\pi))\overrightarrow{u(t)},$$

est la distance entre ces deux tangentes.

La donnée d'une direction Δ détermine un seul t, (modulo π) tel que $\vec{u}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ dirige Δ, d'où deux tangentes D_t et $D_{t+\pi}$, qui ne seront pas distinctes si $p(t)+p(t+\pi) = 0$, donc la condition pour que ces tangentes soient distinctes est que $p(t)+p(t+\pi)$ soit non nul. Or, si on utilise l'exercice 13.16, on sait qu'il en est toujours ainsi puisque $p+p'' > 0$.

On sait ensuite que le rayon de courbure en M_t est $p(t)+p''(t)$, (voir exercice 15.3).

En posant $f(t) = (p(t)+p''(t)) - (p(t+\pi)+p''(t+\pi))$, on étudie la différence des rayons de courbure en deux points où les tangentes sont parallèles.

On a une fonction 2π, périodique, telle que $f(\pi) = -f(0)$.

Donc soit $f(0) = f(\pi) = 0$, mais alors en M_0 et M_π les rayons de courbures sont égaux ; soit $f(0) \neq 0$, la fonction f, continue, prenant des valeurs de signes opposés en 0 et π s'annule, d'où l'existence de c entre 0 et π tel que $f(c) = 0$, et des rayons de courbures égaux en M_c et $M_{c+\pi}$, points distincts car situés sur les tangentes distinctes M_c et $M_{c+\pi}$.

15.16. On a une cubique, (expression polynomiale de degré 3 en x et y), l'origine étant point double, (partie de plus bas degré 2).

Si on coupe par une droite d'équation $y = tx$, on aura déjà $x = 0$ racine double de l'équation aux abscisses, qui est :

$$x^3(1+t^3) - 3atx^2 = 0.$$

Il reste donc, après simplification par x^2, l'équation $x(1+t^3) = 3at$.

Donc pour $t \neq -1$, D_t recoupe C en un troisième point de coordonnées : $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$ et $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

Si t varie dans $\mathbb{R}$, la droite D_t pivote autour de l'origine, et on obtient ainsi une paramétrisation de la courbe C, car la droite D_∞ (« $t = \infty$ »)

correspond à l'axe des y, or si $x = 0$, sur C, on a $y = 0$, mais ce point est obtenu si t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Étude de l'arc paramétré : $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

On a $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x = 0 = \lim\limits_{t \to \pm\infty} y$, avec $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \pm\infty$, puisque $\dfrac{y}{x} = t$: l'origine est point d'arrêt avec un arc tangent à l'axe des ordonnées.

En écrivant $(1+t^3) = (1+t)(1-t+t^2)$, il est clair que :

$$\lim_{t \to -1^{\pm}} x = \mp\infty, \text{ et comme } y = tx, \quad \lim_{t \to -1^{\pm}} y = \pm\infty.$$

Comme $\dfrac{y}{x}$ tend vers -1, on forme :

$$y + x = \frac{3at(t+1)}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{3at}{1-t+t^2},$$

d'où $\lim\limits_{t \to -1} y + x = -a$.

Pour placer la courbe C par rapport à l'asymptote D d'équation :

$y = -x-a$, on forme $v(t) = y + x + a$, d'où :

$$v(t) = \frac{3at}{1-t+t^2} + \frac{a(1-t+t^2)}{1-t+t^2} = \frac{a(t^2+2t+1)}{1-t+t^2} = \frac{a(1+t)^2}{1-t+t^2},$$

expression qui reste positive pour tout $t \neq -1$: l'arc est au-dessus de D.

On a :

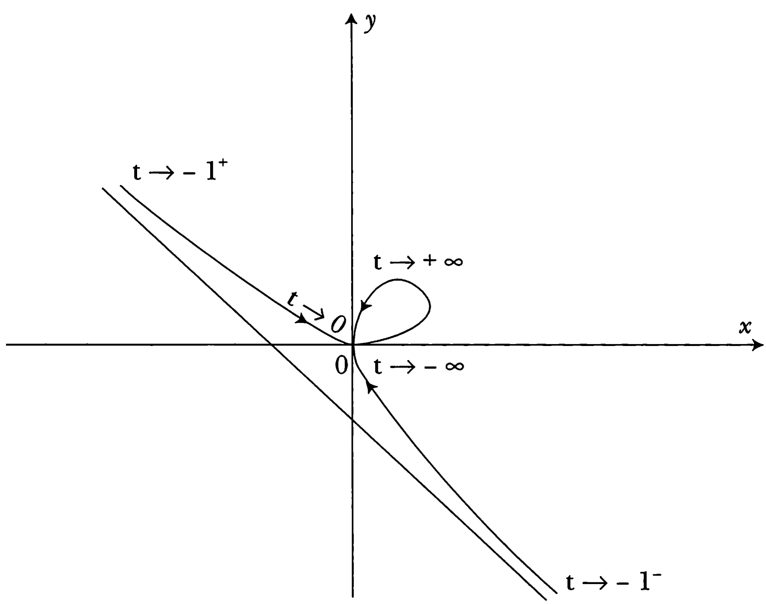
$$x'(t) = \frac{3a}{(1+t^3)^2}(1+t^3-3t^3) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \text{ et :}$$

$$y'(t) = \frac{3a}{(1+t^3)^2}(2t+2t^4-3t^4) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

d'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		0		$2^{-\frac{1}{3}}$		$2^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
x'		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a2^{2/3}$	$\searrow$	$a2^{1/3}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a2^{1/3}$	$\nearrow$	$a2^{2/3}$	$\searrow$	0
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

et le schéma :



La boucle est parcourue lorsque t croît de 0 à $+\infty$, en étant « à gauche », donc l'aire est encore l'intégrale curviligne :

$$S = \frac{1}{2} \int_{\text{boucle}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x .$$

On paramètre en t, et :

$$\begin{aligned} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) &= \frac{(3a)^2}{(1+t^3)^3}[t(2t-t^4) - t^2(1-2t^3)] \\ &= \frac{9a^2}{(1+t^3)^3}t^2(1+t^3) = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}, \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{S} = \dfrac{3a^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}.$

15.17. L'arc pourrait s'étudier en paramétriques, (courbe du quatrième degré avec l'origine pour point triple : on pose $y = tx$ d'où $x = \ldots$), mais une étude en coordonnées polaires est plus commode. Avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a immédiatement l'équation polaire $r = 2a\sin\theta\cos2\theta$.

Comme r est 2π périodique, mais que $r(\theta+\pi) = -r(\theta)$, il y a une « antipériode » : on obtient toute la courbe pour θ variant dans un intervalle d'amplitude π.

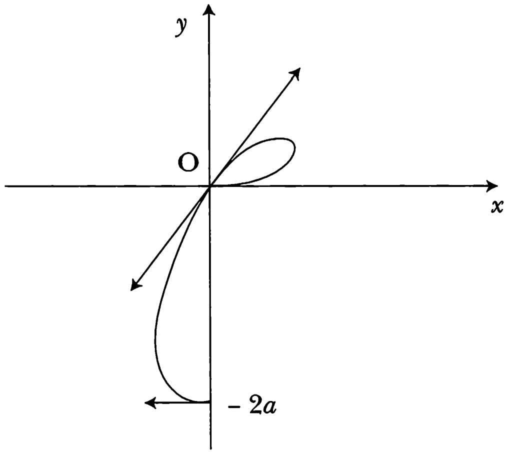
Puis $r(-\theta) = -r(\theta)$: il y a symétrie par rapport à Oy. On étudie Γ pour θ variant de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

Sur cet intervalle, r s'annule pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, d'où les tangentes à l'origine. On a $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2a$, puis on trouve :

$$\begin{aligned} r'(\theta) &= 2a(\cos\theta\cos2\theta - 2\sin\theta\sin2\theta) \\ &= 2a(\cos\theta\cos2\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta) = 2a\cos\theta(1-6\sin^2\theta), \end{aligned}$$

d'où $r'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$: la tangente à Γ pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ est perpendiculaire à OM, M étant ici sur l'axe des ordonnées.

On a, schématiquement la moitié de Γ, à compléter par symétrie par rapport à Oy.



L'aire cherchée est donc égale à :

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\sin^2\theta\cos^2 2\theta d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)(1+\cos 4\theta)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2\theta+\cos 4\theta-\frac{1}{2}(\cos 6\theta+\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{3}{2}\cos 2\theta+\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 6\theta\right)d\theta$$

$$= a^2\left[\theta-\frac{3}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta-\frac{1}{12}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}a^2.$$

15.18. Avec $\mathrm{OM}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$, on a $\dfrac{d\mathrm{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 12t^2 \end{pmatrix}$, d'où $\frac{dM}{dt} \wedge \frac{d^2M}{dt^2} = \begin{pmatrix} 12t^4 \\ -16t^3 \\ 6t^2 \end{pmatrix}$, vecteur non nul pour $t \neq 0$,

et parallèle à $V = \begin{pmatrix} 6t^2 \\ -8t \\ 3 \end{pmatrix}$, donc une équation du plan osculateur sera :

$$6t^2(X - t^2) - 8t(Y - t^3) + 3(Z - t^4) = 0, \text{ ou encore :}$$

$$f(t) = 6t^2X - 8tY + 3Z - t^4 = 0.$$

Pour $t = 0$, $\frac{dM}{dt}(0) = 0$; $\frac{d^2M}{dt^2}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{d^3M}{dt^3}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$,

d'où une direction du « deux-espace osculateur » qui est l'orthogonal de $\frac{d^2M}{dt^2}(0) \wedge \frac{d^3M}{dt^3}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$: le plan osculateur a donc pour équation $Z = 0$ dans ce cas, et l'expression générale est valable.

Le plan osculateur π_t contient M, point de paramètre u sur Γ, si et seulement si on a u solution de :

$$6t^2u^2 - 8tu^3 + 3u^4 - t^4 = 0,$$

et l'étude de la position, (locale) d'un arc par rapport à un plan, permet de savoir que, le plan étant osculateur, $u = t$ est racine d'ordre trois au moins, de cette équation polynomiale en u, dont la somme des racines vaut $\frac{8t}{3}$. La quatrième racine sera t' avec $\frac{8t}{3} = 3t + t'$, d'où $t' = -\frac{t}{3}$.

Pour $t = 0$, le plan π_0, d'équation $Z = 0$, passe par $M(u)$ si et seulement si $u^4 = 0$, on obtient 0 comme « quatrième racine ».

Pour des t_i, $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, distincts, les points $M(t_i)$ seront coplanaires si et seulement si il existe (u, v, w, h) dans $\mathbb{R}^4$, avec $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$, tels que l'équation :

$\mathscr{E}$: $\quad ut^2 + vt^3 + wt^4 + h = 0$,

admette les t_i pour racines.

Mais avec $t = -3t'$, ceci équivaut à dire que l'équation :

$\mathscr{F}$: $\quad 9ut^2 - 27vt^3 + 81wt^4 + h = 0$,

admet pour racines les valeurs $-\dfrac{t_i}{3}$, ce qui traduit la coplanairité des points $M'(t_i)$.

De plus, si $ux + vy + wz + h = 0$ est une équation d'un plan contenant les $M(t_i)$, $9ux - 27vy + 81wz + h = 0$ en est une du plan contenant les $M'(t_i)$.

15.19. Si on pose $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - x^2 + y$, on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 + 1$, cette dérivée partielle n'étant jamais nulle, le Théorème des fonctions implicites s'applique au voisinage de tout point $A(a, b)$ de l'ensemble Γ défini par l'équation implicite $f(x, y) = 0$, et détermine localement une équation $y = \varphi(x)$ de Γ, qui est donc un arc, de classe C^∞ en fait, comme f.

Le rayon de courbure $\mathscr{R}$ d'un arc d'équation cartésienne $y = \varphi(x)$ étant $\mathscr{R} = \dfrac{(1 + \varphi'^2)^{3/2}}{\varphi''}$, il nous reste à déterminer $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$, ce qui s'obtient en dérivant l'identité, (locale en 0) : $f(x, \varphi(x)) = 0$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x) = 0, \text{ puis :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \varphi(x))(\varphi')^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'' = 0.$$

En $x = 0$, $\varphi(0) = 0$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$,

d'où $\varphi'(0) = 0$.

Puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2$, d'où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y\text{, donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0\,.$$

Il en résulte que $\varphi''(0)$ vérifie la relation :

$$-2 + \varphi''(0) = 0\text{, d'où } \varphi''(0) = 2 \text{ et } \mathscr{R} = \frac{1}{2}\,.$$

15.20. On peut considérer l'arc Γ comme un arc d'équation implicite : $\cos(x+y) - \sin(x-y) - 1 = 0$, mais il semble indiqué de faire une rotation du repère de $\frac{\pi}{4}$ par exemple.

La matrice de passage est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, et son inverse, égale à sa transposée, conduit à :

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}},\ Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}},$$

d'où dans ce nouveau repère, une équation de Γ :

$$\cos X\sqrt{2} + \sin Y\sqrt{2} - 1 = 0\text{, ou } \sin Y\sqrt{2} = 1 - \cos X\sqrt{2}\,,$$

ce qui conduit, au voisinage de l'origine, à une équation cartésienne :

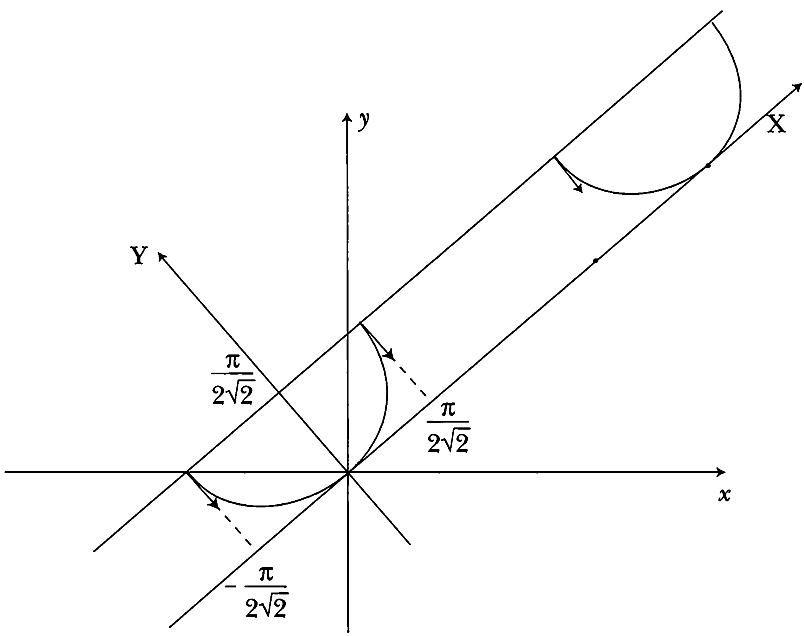
$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arcsin}(1 - \cos X\sqrt{2})\,.$$

On a alors $Y'(X) = \dfrac{\sin X\sqrt{2}}{\sqrt{1-(1-\cos X\sqrt{2})^2}}$, d'où $Y'(0) = 0$: l'arc est tangent à l'axe des X, (donc à la première bissectrice du repère initial), avec Y qui reste positif, puisque $1 - \cos X\sqrt{2}$ reste positif : on n'a pas d'inflexion.

On peut d'ailleurs remarquer que la relation est paire en X : il y a symétrie par rapport à OY.

On peut d'ailleurs étudier globalement l'arc Γ. La fonction est paire en X, n'est définie que si $1-\cos X\sqrt{2} \in [-1, 1]$, ce qui équivaut à $\cos X\sqrt{2} \geqslant 0$, soit $X \in \left[-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$ modulo $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

Pour X croissant de 0 à $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, Y croît de 0 à $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, (on a $Y' \geqslant 0$), et si X tend vers $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}^{-}$, Y ' tend vers $+\infty$: on a un point d'arrêt et une demi-tangente parallèle à OY, d'où le schéma suivant.



15.21. En notant φ l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$, $\vec{i}$ unitaire orientant l'axe des x, et avec $\vec{T} = \frac{dm}{ds}$, les composantes de $\vec{T}$ sont :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \text{ et } \frac{dy}{ds} = \sin\varphi.$$

De plus $\mathscr{R} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = 1+s^2$ ici, donc $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}s}{1+s^2}$, ce qui s'intègre en $\varphi = \mathrm{Arc}\tan s + \varphi_0$.

Le choix d'un φ_0 quelconque revient à effectuer une rotation à partir de l'arc considéré pour $\varphi_0 = 0$, aussi on continue avec $\varphi = \mathrm{Arc}\tan s$, donc $s = \tan\varphi$ et $1+s^2 = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$.

On a alors $\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$, d'où $\mathrm{d}x = \cos\varphi\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$ et $\mathrm{d}y = \sin\varphi\mathrm{d}s = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

Ceci s'intègre en : $\begin{cases} x = \ln\left|\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + x_0, \\ y = \dfrac{1}{\cos\varphi} + y_0. \end{cases}$

Laissons de côté x_0 et y_0, (à une translation près), et avec $t = \tan\dfrac{\varphi}{2}$ décrivant $\mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = e^x.$$

Si $t \in]-1, 1[$, $\dfrac{1+t}{1-t}$ est positif, donc vaut e^x,

d'où $t(1+e^x) = e^x - 1$ et $t = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, et ensuite :

$$y = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1+\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}{1-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} = \frac{2(e^{2x}+1)}{4e^x},$$

$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x \text{ : on a une chainette.}$$

Pour $|t| > 1$, on aura $\dfrac{1+t}{1-t} = -e^x$, ce qui conduit à $t = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

$$\text{et à } y = \frac{1+\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)^2}{1-\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)^2} = \frac{2(e^{2x}+1)}{-4e^x} = -\operatorname{ch}x :$$

c'est la symétrique de la chainette précédente.

Les solutions sont donc toutes les courbes déduites de la chainette d'équation $y = \operatorname{ch}x$ par déplacement et antidéplacement.

15.22. On introduit le vecteur unitaire $\vec{u}(\theta)$ de composantes $\cos\theta$ et $\sin\theta$, ainsi que $\vec{v}(\theta)$, unitaire directement perpendiculaire.

Avec $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(\theta) = f(\theta)\vec{u}(\theta)$, on a $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\vec{u} + f(\theta)\vec{v}$,

car $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{v}(\theta)$, donc si V est l'angle $\left(\vec{u}, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}\theta}\right)$, on a $\tan \mathrm{V} = \dfrac{f}{f'}$, d'où en différentiant :

$$(1+\tan^2\mathrm{V})\mathrm{dV} = \frac{f'^2 - ff''}{f'^2}\mathrm{d}\theta = \frac{f^2+f'^2}{f'^2}\mathrm{dV}.$$

En notant $\varphi = \theta + \mathrm{V}$ l'angle $\left(\mathrm{O}x, \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}\theta}\right)$, on a donc :

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{dV} = \left(1 + \frac{f'^2 - ff''}{f^2+f'^2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{f^2+2f'^2-ff''}{f^2+f'^2}\mathrm{d}\theta.$$

Comme $\mathrm{d}s = (f^2+f'^2)^{1/2}\mathrm{d}\theta$, on obtient l'expression :

$$\mathscr{R} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(f^2+f'^2)^{3/2}}{f^2+2f'^2-ff''} = (f^2+f'^2)^{1/2} \text{ ici ;}$$

d'où l'équation différentielle :

$$f^2 + f'^2 = f^2 + 2f'^2 - ff'' \text{, ou encore } f'^2 - ff'' = 0,$$

que doit vérifier f.

C'est encore $\left(\dfrac{f}{f'}\right)' = 0$, soit $\dfrac{f}{f'} = $ constante.

Mais la relation $\dfrac{f'}{f} = a =$ constante en θ, conduit à $f(\theta) = be^{a\theta}$, a et b constantes, (équation linéaire du premier ordre). On a donc des spirales logarithmiques.

15.23. On sait que l'abscisse curviligne, si l'arc est orienté suivant les θ croissants, ce que je supposerai, vérifie la relation :

$$ds = (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} d\theta.$$

Ici, on a $\rho^2 = 2as$, donc $2a ds = 2\rho\rho' d\theta$, ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\rho\rho' = a(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2},$$

vérifiée par la fonction ρ.

L'orientation de l'arc suivant les θ décroissants conduirait à :

$$\rho\rho' = -a(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2},$$

et on peut considérer les deux cas en disant que l'on a :

$$\rho^2\rho'^2 = a^2\rho^2 + a^2\rho'^2,$$

ou encore $\rho'^2(\rho^2 - a^2) = a^2\rho^2$.

On doit avoir $\rho^2 \geqslant a^2$, et l'équation s'écrit :

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\rho} d\rho = \pm\, a d\theta.$$

Pour chercher une primitive du premier membre, on posera :

$\rho = a\operatorname{ch} u$, donc $d\rho = a\operatorname{sh} u\, du$, d'où :

$$\begin{aligned}\int\frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}d\rho}{\rho} &= \int\frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u}a\operatorname{sh}u du\\ &= a\int\frac{\operatorname{sh}^2u}{\operatorname{ch}^2u}d(\operatorname{sh}u)\\ &= a\int\frac{\operatorname{sh}^2u+1-1}{\operatorname{sh}^2u+1}d(\operatorname{sh}u)\\ &= a(\operatorname{sh}u-\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}u)).\end{aligned}$$

Comme $\rho^2-a^2 = a^2\operatorname{sh}^2u$, on a $\operatorname{sh}u = \pm\dfrac{(\rho^2-a^2)^{1/2}}{a}$, d'où finalement les arcs Γ, de coordonnées polaires ρ et θ liées par la relation :

$$(\rho^2-a^2)^{1/2}-\operatorname{Arctan}\frac{(\rho^2-a^2)^{1/2}}{a} = \pm a(\theta-\theta_0).$$

Sans garantie !

15.24. On va chercher l'arc sous forme d'arc paramétré $x(t)$, $y(t)$, t variant dans un intervalle I.

En notant X et Y les coordonnées d'un point quelconque du plan, et x, y celles de M sur Γ on aura les équations suivantes :

$$(X-x)y'-(Y-y)x' = 0,$$

pour la tangente en M à Γ, et :

$$Xy+Yx = 0,$$

pour la symétrique de (OM) par rapport à Ox.

Ce système aura une solution, (donc T existera) si et seulement si $y'x+x'y\neq 0$, et on trouve alors :

$$X = x\frac{xy'-x'y}{x'y+y'x}\ ;\ Y = y\frac{yx'-y'x}{x'y+xy'},$$

pour solution.

L'aire du triangle OMT est alors, (interprétation du produit vectoriel), la moitié de la norme de $\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{OT}$, si on considère le plan dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, d'où :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left|\frac{yx'-xy'}{x'y+xy'}\right|\cdot\left\|\begin{matrix}x & x\\ y & -y\end{matrix}\right\| = \left|\frac{xy(xy'-yx')}{x'y+xy'}\right|.$$

Le cas d'une aire constante, nulle, correspond à $xy' - yx' = 0$, soit

$\left(\frac{y}{x}\right)' = 0$, d'où $y = kx$: l'arc Γ est porté par une droite passant par O, (dans ce cas T est en O, le triangle est aplati).

On cherche des solutions avec $\mathscr{A}$ non nulle, et $x'y + y'x$ qui ne s'annule pas. Mais alors $(xy)' = x'y + y'x$ ne s'annulant pas, est de signe constant, (si on suppose l'arc Γ de classe C^1), donc en posant $(xy)(t) = u$, la fonction $t \rightsquigarrow u(t)$ est strictement monotone et inversible : on peut calculer t fonction de u, u variant dans l'intervalle image de I par $t \rightsquigarrow x(t)y(t)$.

On a alors $x'y + y'x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, et on cherche x et y fonctions de u, telles que :

$$u\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = k,\ k \text{ dans } \mathbb{R}^*,$$

(ce qui permet d'éliminer la valeur absolue).

C'est encore : $u\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) = k$, notée (E).

Comme $y = \frac{u}{x}$, on a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{x} - \frac{u}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$, donc (E) s'écrit encore :

$$u\left(1 - \frac{2u}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right) = k, \text{ d'où l'on tire :}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}u}{2u} - \frac{k\mathrm{d}u}{2u^2},$$

expression licite, car la non nullité de k entraîne $u \neq 0$, donc aussi $x \neq 0$.

Mais alors $x(u) = \lambda\sqrt{|u|}e^{\frac{k}{2u}}$, d'où, avec $y = \frac{u}{x}$:

$$y(u) = \frac{\varepsilon}{\lambda}\sqrt{|u|}e^{-\frac{k}{2u}},$$

avec ε signe de u, lorsque u décrit un intervalle J situé dans $]-\infty, 0[$ ou dans $]0, +\infty[$.

15.25. On peut remarquer que si Γ admet en M une tangente parallèle à Oy, on aura $m = \mathrm{Q}$, donc on devra avoir $\overline{\mathrm{O}m} = 0$, soit M sur O$y$.

Il en résulte déjà que tout arc Γ de support contenu dans l'axe des y est solution.

Cherchons maintenant une solution Γ ne coupant pas l'axe des y, la tangente à Γ étant partout non parallèle à Oy, on peut, localement, chercher Γ par son équation cartésienne, (si $x(t), y(t)$) est un paramétrage de Γ régulier, on a $x'^2 + y'^2 \neq 0$ et $x' \neq 0$: on peut localement tirer x fonction de t, ceci parce que la tangente n'est pas parallèle à Oy ici).

L'équation de MQ devient $\mathrm{Y} - y = y'(\mathrm{X} - x)$,

d'où l'abscisse $\mathrm{X_Q}$ de Q : $\mathrm{X_Q} = x - \dfrac{y}{y'}$.

La relation $\overline{\mathrm{O}m} = a \cdot \overline{m\mathrm{Q}}$ équivaut donc à l'équation différentielle :

$$x = a\left(x - \frac{y}{y'} - x\right) = -a\frac{y}{y'},$$

ou encore :

$$xy' + ay = 0,$$

équation linéaire du premier ordre, de solution générale :

$$y = \frac{\lambda}{x^a}, \lambda \text{ constante non nulle.}$$

Il reste à étudier les raccords possibles entre un segment de l'axe des y et un arc d'équation $y = \lambda x^{-a}$. Par exemple, si $a = -\dfrac{1}{2}$ on peut raccorder la demi-droite $x = 0$, $y \leqslant 0$, et tout arc d'équation $y = \lambda\sqrt{x}$.

15.26. En notant φ l'angle $(\mathrm{O}x, \vec{\mathrm{T}})$, avec $\vec{\mathrm{T}}$ vecteur tangent unitaire orienté, on a :

$$\mathscr{R} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \sqrt{a^2 - s^2}, \text{ d'où } \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \mathrm{d}\varphi, \text{ ce qui conduit à la}$$

relation $\varphi = \varphi_0 + \mathrm{Arcsin}\dfrac{s}{a}$.

On sait qu'en posant $\varphi = \varphi_0 + u(s)$, les équations différentielles :

$$\mathrm{d}x = \cos\varphi \mathrm{d}s = (\cos\varphi_0)\cos u(s)\mathrm{d}s - \sin\varphi_0 \sin u(s)\mathrm{d}s, \text{ et}$$

$$\mathrm{d}y = \sin\varphi \mathrm{d}s = (\sin\varphi_0)\cos u(s)\mathrm{d}s + \cos\varphi_0 \sin u(s)\mathrm{d}s,$$

conduisent à la solution générale :

$$\begin{cases} x - x_0 = \cos\varphi_0 \int \cos u(s)\mathrm{d}s - \sin\varphi_0 \int \sin u(s)\mathrm{d}s \\ y - y_0 = \sin\varphi_0 \int \cos u(s)\mathrm{d}s + \cos\varphi_0 \int \sin u(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

déduite de la solution particulière :

$$\mathrm{X} = \int \cos u(s)\mathrm{d}s \; ; \; \mathrm{Y} = \int \sin u(s)\mathrm{d}s,$$

par une rotation d'angle φ_0, suivie d'une translation de vecteur $x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.

On peut donc se contenter d'une solution particulière, les autres s'en déduisant par déplacement, lié au choix de φ_0, puis de x_0 et y_0.

On a alors intérêt à intégrer par rapport à φ, en prenant

$s = a\sin\varphi$ et, avec $\mathrm{d}s = a\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$, on a :

$\mathrm{d}x = a\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}y = a\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$,

soit encore :

$$\mathrm{d}x = \frac{a}{2}(1 + \cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi, \; \mathrm{d}y = \frac{a}{2}\sin 2\varphi d\varphi,$$

ce qui conduit à la solution particulière :

$$x = \frac{a}{4}(2\varphi + \sin 2\varphi) \; ; \; y = -\frac{a}{4}\cos 2\varphi.$$

En posant $2\varphi = \pi + t$, on obtient : $x - \frac{a\pi}{4} = \frac{a}{4}(t - \sin t)$ et $y = \frac{a}{4}\cos t$ d'où $y - \frac{a}{4} = -\frac{a}{4}(1 - \cos t)$, courbe déduite de la cycloïde C : $\mathrm{X} = \frac{a}{4}(t - \sin t)$, $\mathrm{Y} = -\frac{a}{4}(1 - \cos t)$ par translation.

Les solutions sont toutes les cycloïdes déduites de C par déplacement.

15.27. La « courbe » Γ est l'intersection de deux nappes régulières en tout point, un hyperboloïde à une nappe, H, d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, de révolution autour de Oz, et d'un cylindre C, de révolution et d'axe Oy. Les guillemets sont là car il nous faudra justifier l'aspect arc paramétré pour Γ.

Soit $m_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de Γ. En fait Γ est définie par la relation $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)) = (0, 0)$, avec :
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ et $g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 5$.

Si en m_0, la matrice jacobienne de F est de rang deux, le Théorème des fonctions implicites permettra de dire que localement en m_0, l'appartenance de m à Γ équivaut à connaître deux coordonnées en fonction de la troisième, d'où un arc paramétré.

Or le rang de la matrice jacobienne est exactement le rang des formes différentielles $df(m_0)$ et $dg(m_0)$, donc aussi celui des vecteurs gradients, vecteurs normaux en m_0 aux plans tangents aux nappes.

Si ces plans tangents sont non confondus, on a donc localement un arc paramétré, et la tangente à Γ en m_0 devant être dans chacun d'eux sera leur intersection.

Allons-y pour les calculs.

Plan tangent à H : $2x_0(X - x_0) + 2y_0(Y - y_0) - 2z_0(Z - z_0) = 0$.

Plan tangent à C : $2x_0(X - x_0) + 2z_0(Z - z_0) = 0$.

Les trois mineurs de la matrice jacobienne sont : $-x_0y_0$; y_0z_0 ; $2x_0z_0$.

S'ils sont nuls tous les trois, on aura $x_0y_0 = 0$.

Premier cas. $x_0 = 0$, on doit aussi avoir $y_0z_0 = 0$.

Or $z_0 = 0$ est exclu, $(x_0^2 + z_0^2 = 5)$, d'où $y_0 = 0$ et $-z_0^2 = 1$: exclu.

Deuxième cas. $y_0 = 0$, on doit avoir $x_0z_0 = 0$, on a vu que $x_0 = 0$ conduit à une absurdité, il faudrait donc que $z_0 = 0$, mais alors $m_0 \in H \cap C \Rightarrow x_0^2 = 1$ et $x_0^2 = 5$: exclu.

On a donc, pour tout m_0 de Γ, deux plans tangents distincts, et une tangente D à Γ en m_0, d'équations :

$$\begin{cases} Xx_0 + Yy_0 - Zz_0 - 1 = 0 & ,\ (\text{car } x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1)\ ; \\ Xx_0 + Zz_0 - 5 = 0 & ,\ (\text{car } x_0^2 + z_0^2 = 5). \end{cases}$$

Plan osculateur en A : (1, 2, 2).

Comme z reste localement positif, on a $z^2 = 5 - x^2$, d'où $z = \sqrt{5 - x^2}$; puis avec $z^2 = 5 - x^2$ injecté dans l'équation de H, on a $y^2 + 2x^2 = 6$, d'où, (y localement positif en A), $y = \sqrt{6 - 2x^2}$, et Γ devient un arc paramétré :

$$\overrightarrow{Om}\left|\begin{array}{l} x \\ \sqrt{6-2x^2} \\ \sqrt{5-x^2} \end{array}\right., \text{ dans un voisinage de A.}$$

On n'a pas besoin de plus qu'un voisinage pour calculer :

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}}\left|\begin{array}{l} 1 \\ -2x(6-2x^2)^{-1/2} \\ -x(5-x^2)^{-1/2} \end{array}\right., \quad \frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}x^2}\left|\begin{array}{l} 0 \\ -2(6-2x^2)^{-1/2}-4x^2(6-2x^2)^{-3/2} \\ -(5-x^2)^{-1/2}-x^2(5-x^2)^{-3/2} \end{array}\right.,$$

d'où en A :

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}}(1)\left|\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right., \text{ et } \overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}x^2}}(1)\left|\begin{array}{l} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{8} \end{array}\right.,$$

et une équation du plan osculateur, (passant par A, dirigé par les deux premiers vecteurs dérivés indépendants) :

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-2 & Z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -12 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, tous calculs faits conduit à :

$$-X+5Y-12Z+15 = 0,$$

mais des erreurs sont possibles, d'autant plus qu'il m'est déjà arrivé de trouver un autre résultat. Où est l'erreur ? Ici ? Avant ?... À vous de juger !

15.28. Le premier vecteur dérivé étant non nul, car on a :

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}}\left|\begin{array}{l} -a\sin t \\ a\cos t \\ a\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right., \text{ et } \overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}}\left|\begin{array}{l} -a\cos t \\ -a\sin t \\ a\,\mathrm{ch}\,t \end{array}\right.,$$

avec $\left\|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 = a^2(1+\mathrm{sh}^2 t) > 0$, la tangente se paramètre en :

$$\begin{cases} x = a\cos t - \lambda \sin t, \\ y = a\sin t + \lambda \cos t, \\ z = a\,\mathrm{ch}\,t + \lambda\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

On peut calculer le vecteur :

$$\vec{\mathrm{K}}(t) = \frac{1}{a^2}\cdot\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}} \wedge \overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}t^2}} : \left| \begin{array}{l} \cos t\,\mathrm{ch}\,t + \sin t\,\mathrm{sh}\,t \\ -\cos t\,\mathrm{sh}\,t + \sin t\,\mathrm{ch}\,t, \\ 1 \end{array}\right.$$

il est non nul, donc il est orthogonal au plan osculateur, qui a pour direction $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}, \overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}}\right)$.

L'équation du plan osculateur P_t en $m(t)$ est donc :

$$(x - a\cos t)(\cos t\,\mathrm{ch}\,t + \sin t\,\mathrm{sh}\,t) + (y - a\sin t)(-\cos t\,\mathrm{sh}\,t + \sin t\,\mathrm{ch}\,t) + z - a\,\mathrm{ch}\,t = 0,$$

soit encore, le terme constant valant :

$$-a\,\mathrm{ch}\,t(\cos^2 t + \sin^2 t) - a\cos t\sin t\,\mathrm{sh}\,t + a\sin t\cos t\,\mathrm{sh}\,t - a\,\mathrm{ch}\,t = -2a\,\mathrm{ch}\,t,$$

une équation qui se réduit à :

$$x(\cos t\,\mathrm{ch}\,t + \sin t\,\mathrm{sh}\,t) + y(-\cos t\,\mathrm{sh}\,t + \sin t\,\mathrm{ch}\,t) + z - 2a\,\mathrm{ch}\,t = 0.$$

Le carré de la distance de $\mathrm{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ à ce plan vaut :

$$\frac{(\alpha(\cos t\,\mathrm{ch}\,t + \sin t\,\mathrm{sh}\,t) + \beta(-\cos t\,\mathrm{sh}\,t + \sin t\,\mathrm{ch}\,t) + \gamma - 2a\,\mathrm{ch}\,t)^2}{\cos^2 t\,\mathrm{ch}^2 t + \sin^2 t\,\mathrm{sh}^2 t + \cos^2 t\,\mathrm{sh}^2 t + \sin^2 t\,\mathrm{ch}^2 t + 1},$$

ou encore, le dénominateur valant $\mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t + 1 = 2\mathrm{ch}^2 t$, une expression réduite à :

$$\frac{(\alpha(\cos\mathrm{ch}\,t + \sin t\,\mathrm{sh}\,t) + \beta(-\cos t + \mathrm{sh}\,t + \sin t\,\mathrm{ch}\,t) + \gamma - 2a\,\mathrm{ch}\,t)^2}{2\mathrm{ch}^2 t} = d^2.$$

Avec du flair, on constate que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ conduit à $d^2 = 2a^2$, donc les plans osculateurs à l'arc Γ sont tangents à la sphère S centrée en O, de rayon $a\sqrt{2}$.

Pour trouver alors $h(t)$, projection de O sur le plan osculateur P_t, (donc point de contact de S est de P_t), on pose :

$$\overrightarrow{Oh(t)} = \lambda\overrightarrow{K(t)} \qquad 18,$$

et λ, paramètre de $h(t)$ est tel que :

$$\lambda(\cos t\,\mathrm{ch}t + \sin t\,\mathrm{sh}t)^2 + \lambda(-\cos t\,\mathrm{sh}t + \sin t\,\mathrm{ch}t)^2 + \lambda - 2a\,\mathrm{ch}t = 0,$$

d'où, compte tenu des calculs faits, $2\lambda\mathrm{ch}^2 t - 2a\,\mathrm{ch}t = 0$,

et $\lambda = \dfrac{a}{\mathrm{ch}t}$, qui donne le paramétrage :

$$x = \frac{a}{\mathrm{ch}t}(\cos t\,\mathrm{ch}t + \sin t\,\mathrm{sh}t),\ y = \frac{a}{\mathrm{ch}t}(-\cos t\,\mathrm{sh}t + \sin t\,\mathrm{ch}t) \text{ et } z = \frac{a}{\mathrm{ch}t},$$

de cet arc.

15.29. On suppose l'arc donné par une équation cartésienne $y = f(x)$, de dérivée non nulle pour que la tangente soit non parallèle à l'axe des abscisses.

L'équation de la tangente est : $Y - y = y'(X - x)$, et celle de la normale : $Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$.

Les abscisses X_T et X_N des points d'intersection de la tangente, et de la normale, avec l'axe des abscisses sont donc :

$$X_T = x - \frac{y}{y'} \text{ et } Y_N = x + yy',$$

et la condition cherchée se traduit par $X_T + X_N = 0$, soit par l'équation différentielle :

$$2x + yy' - \frac{y}{y'} = 0.$$

Le fait qu'il s'agisse de géométrie n'exclut pas la rigueur : l'équation s'écrit encore :

$$(E):\quad yy'^2 + 2xy' - y = 0,$$

et, pour $y \neq 0$, c'est une équation du second degré en y', de discriminant réduit $x^2 + y^2$.

Donc, sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, (E) se ramène localement à deux équations du type $y' = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$, auxquelles on peut appliquer le Théorème de Cauchy Lipschitz : par tout point de Ω il passera deux courbes solutions.

Sur Ω, on peut écrire (E) sous la forme :

$2\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{y'} - y'$, car y' ne s'annule pas, sinon y s'annulerait,

et poser $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = t$, pour intégrer en fonction de t, cette équation homogène en x et y.

On a $2x = \left(\dfrac{1}{t} - t\right)y$, d'où deux expressions de $\mathrm{d}x$:

$$2\mathrm{d}x = 2\frac{\mathrm{d}y}{t} \text{ et } 2\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{t} - t\right)\mathrm{d}y - y\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)\mathrm{d}t,$$

ce qui conduit à :

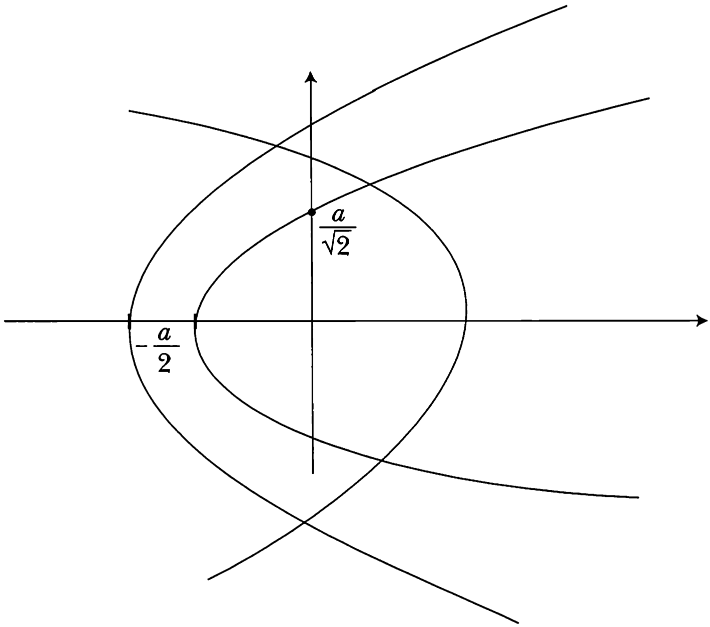
$$\frac{2}{t}\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{t} - t\right)\mathrm{d}y - y\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)\mathrm{d}t, \text{ ou encore :}$$

$$\frac{1+t^2}{t}\mathrm{d}y = -\frac{1+t^2}{t^2}y\,\mathrm{d}t, \text{ soit :}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On a donc comme solution $y = \dfrac{a}{t}$, donc $2x = \dfrac{a}{t}\left(\dfrac{1}{t} - t\right)$ donne une équation implicite des solutions, avec $t = \dfrac{a}{y}$, en : $2x = \dfrac{y^2}{a} - a$.

Il s'agit d'une famille de paraboles, d'axe l'axe des abscisses. En ces points la tangente est verticale, y' n'existe pas. Par ailleurs pour $a > 0$, les paraboles ont leur concavité tournée vers les $x > 0$, et pour $a < 0$ vers les $x < 0$, avec une abscisse de sommet respectivement négative puis positive : il est facile de voir que par tout point de Ω il passe deux arcs de parabole, comme le montre le schéma sommaire suivant.



Par ailleurs, en écrivant l'équation des paraboles sous la forme

$$y^2 = 2a\left(x + \frac{a}{2}\right) = 2p\mathrm{X} \text{ avec } \mathrm{X} = x - \frac{a}{2}, \text{ on a } p = a,$$

d'où, le sommet ayant pour abscisse $-\frac{a}{2}$, le foyer aura pour abscisse $-\frac{a}{2} + \frac{p}{2} = 0$: toutes nos paraboles ont pour foyer l'origine, et on retrouve une propriété classique des paraboles.

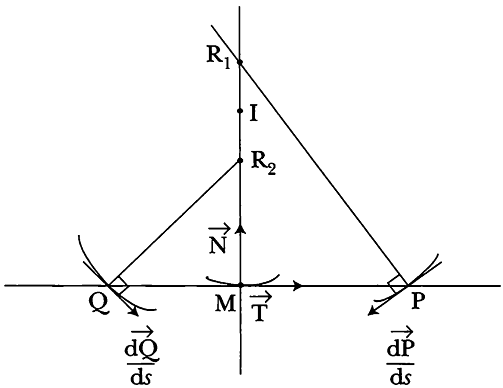
15.30. On prend comme repère un repère d'origine M, de vecteurs de base $\vec{\mathrm{T}}(s)$ et $\vec{\mathrm{N}}(s)$. En notant $\mathscr{R}(s)$ le rayon de courbure de Γ en M, on a :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{dP}}}{\mathrm{d}s} = \vec{\mathrm{T}}(1 + \lambda') + \frac{\lambda}{\mathscr{R}}\vec{\mathrm{N}} \text{ et } \frac{\overrightarrow{\mathrm{dQ}}}{\mathrm{d}s} = \vec{\mathrm{T}}(1 - \lambda') - \frac{\lambda}{\mathscr{R}}\vec{\mathrm{N}}$$

Dans le repère considéré, la normale en P à Γ_1 a pour équation :

$$(X-\lambda)(1+\lambda')+Y\frac{\lambda}{\mathscr{R}} = 0,$$

(on traduit l'orthogonalité de $\overrightarrow{PR}$ et de $\dfrac{\overrightarrow{dP}}{ds}$, si R parcourt cette normale), d'où l'ordonnée $\mathscr{R}(1+\lambda')$, du point d'intersection R_1, de la normale à Γ_1 en P et de la normale à Γ en M.



De même, la normale en Q à Γ_2 passe par $Q(-\lambda, 0)$, et elle est orthogonale à $\dfrac{\overrightarrow{dQ}}{ds}$, d'où son équation :

$$(X+\lambda)(1-\lambda')-\frac{\lambda}{\mathscr{R}}Y = 0,$$

et l'ordonnée $\mathscr{R}(1-\lambda')$, de son point d'intersection avec la normale en M à Γ.

Mais alors, I, milieu de R_1R_2 a pour ordonnée $\frac{1}{2}\mathscr{R}(1+\lambda'+1-\lambda')$, soit $\mathscr{R}$, et l'égalité $\overrightarrow{MI} = \mathscr{R}\vec{N}$ nous montre que I est le centre de courbure en M à Γ.

15.31. Prenons l'hyperbole H par son équation :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dans un repère orthonormé associé à ses axes de symétrie.

Un point $M(X, Y)$ sera sur l'ensemble C cherché, si et seulement si par M, passent deux droites, de pentes t et t', tangentes à H, et telles que $tt' = -1$, avec un cas particulier à examiner, si $t = 0$, mais c'est tout de suite fait car l'hyperbole n'a pas de tangente parallèle à l'axe focal.

Soit donc D_t d'équation :

$$y - Y = t(x - X),$$

t sera pente d'une tangente à H, si l'équation aux abscisses des points d'intersection de D_t et de H :

$$b^2x^2 - a^2(tx + Y - tX)^2 - a^2b^2 = 0,$$

admet une racine double.

Cette équation s'ordonne encore en :

$$(b^2 - a^2t^2)x^2 - 2a^2t(Y - tX)x - a^2(b^2 + (Y - tX)^2) = 0,$$

et son discriminant réduit vaut :

$$\begin{aligned}\delta &= a^4t^2(Y - tX)^2 + a^2(b^2 - a^2t^2)(b^2 + (Y - tX)^2),\\ &= (Y - tX)^2(a^4t^2 + a^2b^2 - a^4t^2) + a^2b^4 - a^4b^2t^2,\\ &= a^2b^2[t^2X^2 - 2tXY + Y^2 - a^2t^2 + b^2],\\ &= a^2b^2(t^2(X^2 - a^2) - 2tXY + Y^2 + b^2).\end{aligned}$$

Les coordonnées (X, Y) doivent donc être telles que, en écrivant $\delta = 0$, on doit avoir des racines en t, (sinon, où est la tangente de pente t), avec $t't'' = -1$ pour parler de droites perpendiculaires.

On doit donc avoir :

$$(XY)^2 - (X^2 - a^2)(Y^2 + b^2) \geqslant 0, \text{ soit encore :}$$

$$a^2b^2 - b^2X^2 + a^2Y^2 \geqslant 0, \text{ ou } \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \leqslant 1 \ :$$

M doit être dans la partie du plan, limitée par l'hyperbole, et qui ne contient pas les foyers ; (sinon, pas de tangente passant par M) ; de plus il faut que :

$$t't'' = \frac{Y^2 + b^2}{X^2 - a^2} = -1, \text{ soit encore que :}$$

$$X^2 + Y^2 = a^2 - b^2.$$

Ceci détermine un cercle, à condition d'avoir $a \geqslant b > 0$.

Ce cercle, centré en O, de rayon $\sqrt{a^2-b^2}<a$, est bien à l'extérieur de l'hyperbole : c'est la courbe orthoptique cherchée, qui n'existe donc que si $a \geqslant b$, ce qui correspond à un angle entre les asymptotes à l'hyperbole inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

En effet, les asymptotes à l'hyperbole ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$, donc elles font un angle de $2\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}$, angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\frac{b}{a} \leqslant 1$.

Pour l'hyperbole équilatère, la courbe orthoptique est réduite à l'origine, et les « tangentes » sont les asymptotes.

15.32. Soit l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = 0$.

On se donne la droite $D = (M_1, M_2)$ par son équation normale :

$D_\theta : x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$,

et on va traduire l'orthogonalité de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$, avec M_1 et M_2 points d'intersection de $\mathscr{E}$ et de D_θ. Si x_1, y_1 et x_2, y_2 sont les coordonnées de ces points, on doit donc écrire que :

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

et on a juste besoin d'écrire l'équation aux abscisses, (et celle aux ordonnées) des points d'intersection. Pas de calcul, pas de résolution : c'est merveilleux.

Équation aux abscisses :

$$b^2x^2 + \frac{a^2}{\sin^2\theta}(p - x\cos\theta)^2 - a^2b^2 = 0,$$

ou encore, en remultipliant par $\sin^2\theta$, ce qui fait disparaître le cas particulier de θ nul modulo π :

$$x^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) - 2pxa^2\cos\theta + a^2p^2 - a^2b^2\sin^2\theta = 0,$$

donc $x_1x_2 = \dfrac{a^2p^2 - a^2b^2\sin^2\theta}{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}$.

Est-il besoin d'écrire l'équation aux ordonnées pour s'apercevoir qu'on va permuter a et b, ainsi que $\cos\theta$ et $\sin\theta$, pour obtenir :

$$y_1y_2 = \frac{b^2p^2 - a^2b^2\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \ ?$$

Si vous n'en êtes pas persuadé, faites le calcul !

On doit donc avoir $p(\theta)$ tel que :

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{(a^2+b^2)p^2 - a^2b^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 0, \text{ d'où :}$$

$$p^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Mais alors, l'enveloppe des droites D_θ est toute trouvée, c'est le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$: il n'est pas nécessaire de dériver par rapport à θ.

15.33. a) On peut, comme en 15.32, partir d'une équation normale de $D_\theta = (M, N)$, chercher la somme et le produit des abscisses de M et N, puis la somme et le produit des ordonnées de M et N, pour traduire :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0,$$

avec, si A a pour coordonnées $\left(\dfrac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$, M : (x_1, y_1) et N : (x_2, y_2), la relation :

$$\left(x_1 - \frac{\beta^2}{2p}\right)\left(x_2 - \frac{\beta^2}{2p}\right) + (y_1 - \beta)(y_2 - \beta) = 0,$$

qui s'exprime à l'aide de x_1x_2, $x_1 + x_2$, y_1y_2 et $y_1 + y_2$.

Mais ici il y a beaucoup de fonctions symétriques. Alors, pour une fois, ayons une démarche plus descriptive.

Soient y et y' les ordonnées de M et N, elles sont distinctes, (une parallèle à l'axe ne coupe la parabole qu'en un point), et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ équivaut à :

$$\frac{1}{4p^2}(y^2 - \beta^2)(y'^2 - \beta^2) + (y - \beta)(y' - \beta) = 0, \text{ ou encore :}$$

$$(y - \beta)(y' - \beta)[(y + \beta)(y' + \beta) + 4p^2] = 0.$$

On peut considérer le cas de $y = \beta$, (ou $y' = \beta$), comme une limite, (A, M) devenant tangente à la parabole en A, et dans ce cas (A, N) normale en A à la parabole, d'où (M, N) normale en A à la parabole en ce cas.

On suppose $y \neq \beta$ et $y' \neq \beta$, et les ordonnées sont liées par la relation :

$$(1) \qquad (y + \beta)(y' + \beta) + 4p^2 = 0 = \beta^2 + 4p^2 + yy' + \beta(y + y').$$

Écrivons, le plus symétriquement possible, l'équation de (M, N), droite passant par M : $\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$ et N : $\left(\frac{y'^2}{2p}, y'\right)$.

Ce sera, sous forme de déterminant, en multipliant par $2p$ la deuxième et la troisième ligne :

$$0 = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ y^2 & 2py & 2p \\ y'^2 & 2py' & 2p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ (y - y')(y + y') & 2p(y - y') & 0 \\ y'^2 & 2py' & 2p \end{vmatrix},$$

soit, après simplification par $y - y'$, non nul :

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ y + y' & 2p & 0 \\ y'^2 & 2py' & 2p \end{vmatrix} = 4p^2 X - 2p(y + y')Y + (y + y')2py' - 2py'^2 = 0,$$

ou :

$$4p^2 X - 2p(y + y')Y + 2pyy' = 0.$$

Or $yy' = -\beta^2 - 4p^2 - \beta(y + y')$, d'après (1).

On va donc prendre comme paramètre pour la droite (M, N), ni y, ni y', mais $y+y'$, (tiens tiens, à $\frac{1}{2}$ près, c'est le milieu, pas de jaloux !) et, avec $t = y+y'$, on a une équation :

D_t : $4p^2X - 2ptY - 2p(\beta^2 + 4p^2 + \beta t) = 0$,

que l'on dérive par rapport à t en :

D'_t : $-2pY - 2p\beta = 0$,

d'où un système qui se résoud en $Y = -\beta$, et :

$$4p^2X + 2pt\beta - 2p\beta^2 - 8p^3 - 2p\beta t = 0,$$

donc $X = 2p + \frac{\beta^2}{2p}$, et $Y = -\beta$: <u>les droites (M, N) pivotent autour du point $f(A)$ de coordonnées $2p + \frac{\beta^2}{2p}$, et $-\beta$.</u>

b) Si A varie sur $\mathscr{P}$, β décrit $\mathbb{R}$, donc $f(A)$ décrit la parabole Q d'équation : $X = 2p + \frac{Y^2}{2p}$, ou encore :

$$Y^2 = 2p(X - 2p),$$

c'est une parabole déduite de $\mathscr{P}$ par la translation de vecteur $2p\vec{i}$.

On peut vérifier par le calcul que la normale en A à $\mathscr{P}$ passe par $f(A)$, mais on avait déjà remarqué au a) qu'il en était ainsi.

Vérification : les composantes en A : $\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$, du vecteur tangent sont $\left(\frac{\beta}{p}, 1\right)$, donc l'équation de la normale est :

$$\left(X - \frac{\beta^2}{2p}\right)\frac{\beta}{p} + (Y - \beta) = 0,$$

et pour les coordonnées de $f(A)$ on a :

$$\left(2p + \frac{\beta^2}{2p} - \frac{\beta^2}{2p}\right)\frac{\beta}{p} + (-\beta - \beta) = 2\beta - 2\beta = 0 :$$

$f(A)$ est bien sur la normale en A à $\mathscr{P}$.

CHAPITRE XVI

Nappes paramétrées

Les nappes paramétrées dans $\mathbb{R}^3$ s'étudient en tant que telles, mais aussi en tant que supports d'arcs paramétrés. Enfin elles sont l'objet de calculs d'aires, de volumes..., questions traitées au chapitre suivant.

En ce qui concerne les nappes, il faut savoir que pour des nappes de classe C^1, au voisinage d'un point régulier, les trois modes de représentation sont équivalents, à savoir :

1°) *en équation implicite :* $f(x, y, z) = 0$, ce qui donne une équation du plan tangent :

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0,$$

le vecteur gradient de f étant orthogonal au plan tangent, (voir 16.6 par exemple) ;

2°) *en représentation paramétrique :*

$x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, pour (u, v) dans une partie de $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$ étant alors non nul, (point régulier), et orthogonal au plan tangent, (voir 16.16) ;

3°) *en équation cartésienne :* $z = f(x, y)$, (ou y fonction de x et z, ou x fonction de y et z). Dans ce cas le plan tangent n'est jamais parallèle à l'axe ayant le même nom que la variable isolée.

Il faut savoir, suivant le type de problème posé, choisir le mode de représentation de la nappe.

Par exemple, pour **reconnaître une nappe conique**, on cherchera si elle a une équation implicite du type :

$$f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) = 0,$$

avec f fonction homogène en u, v, w, et u, v, w formes affines indépendantes en x, y, z. Le point A tel que $u(x, y, z) = v(x, y, z) = w(x, y, z) = 0$ est alors sommet du cône, (exercices 16.8, 16.19).

Une nappe S **sera de révolution**, si on peut lui trouver, avec :

$$u(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \text{, et :}$$

$$v(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \text{, avec } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$$

une équation implicite du type $f(u, v) = 0$, car si $m_0(x_0, y_0, z_0)$ est sur S, le cercle Γ d'axe Δ passant par A : (a, b, c) et dirigé par $\vec{V}$: (α, β, γ), et passant par m_0 a pour équations :

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 \text{ et,} \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta, \end{cases}$$

donc tout point de Γ est tel que :

$$f(u(x, y, z), v(x, y, z)) = f(u(x_0, y_0, z_0), v(x_0, y_0, z_0)) = 0 \;:$$

l'équation est vérifiée et Γ est sur S.

Voir en 16.5, 16.15, 16.17, 16.18 des questions sur les nappes de révolution.

Une nappe est dite conoïdale, si dans un repère convenable, elle a une équation du type $f(x, y, z) = 0$, f étant homogène en deux variables. Ne vous étonnez pas de trouver des droites sur de telles nappes, elles sont réglées, (exercice 16.9).

On appelle **nappe réglée** une nappe pouvant être définie comme une famille de droites, et on peut les reconnaître à l'existence d'un paramétrage où l'un des paramètres intervient de manière affine.

Bien évidemment il faut savoir reconnaître les différentes quadriques, (exercices 16.4, 16.11, 16.20) en se rappelant qu'en plus des cylindres et des cônes de directrice une conique, les hyperboloïdes à une nappe et les paraboloïdes hyperboliques sont des quadriques réglées, et même doublement (voir 16.20).

Une nappe sera cylindrique, si on peut lui trouver une équation implicite du type $f(u, v) = 0$, avec u et v formes affines en x, y, z, indépendantes.

En effet dans un repère tel que $X = u(x, y, z)$ et $Y = v(x, y, z)$ représentent des coordonnées, l'équation $f(X, Y) = 0$ étant indépendante de Z, dès qu'un point m_0 sera sur la nappe, la parallèle à l'axe des Z passant par m_0 y sera aussi. Voir en 16.6, 16.12, 16.14 et 16.22 des exercices sur les nappes cylindriques.

Passons maintenant aux arcs sur les nappes.

Si une nappe S est paramétrée par $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ et $z = h(u, v)$, un arc Γ sur S sera obtenu quand on se donnera u et v fonctions d'un paramètre t, d'où la recherche d'arcs particuliers sur les nappes, recherche se traduisant par une équation différentielle liant les dérivées de u et v par rapport à un paramètre t inconnu, ce qui en fait tout le charme.

C'est ainsi que l'on cherchera des arcs dont le *plan osculateur est tangent à la nappe,* (voir 16.1, 16.21) : il s'agit des asymptotiques de la nappe ; ou bien des arcs dont *le plan osculateur est normal à la nappe* (16.2), là ce sont les géodésiques.

On peut aussi chercher à résoudre des conditions diverses, (exercices 16.12, 16.14), signalons toutefois la recherche des *loxodromies* d'angle α d'une nappe de révolution, c'est-à-dire les courbes sur la nappe d'angle α en chaque point avec la méridienne qui y passe, (voir 16.23), l'angle des courbes étant celui des tangentes.

De même, si sur une nappe S, on considère une famille de courbes (Γ_λ), fonctions d'un paramètre, on appellera *trajectoires orthogonales* aux (Γ_λ), les courbes C_μ, si elles existent, telles qu'en tout point de $C_\mu \cap \Gamma_\lambda$, les vecteurs tangents aux deux courbes soient orthogonaux.

Voyez en 16.24 un exercice de ce type. On peut aussi remarquer que les loxodromies d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'une nappe de révolution, sont les trajectoires orthogonales des méridiennes : ce sont les cercles dits « parallèles » de la nappe.

Si les (Γ_λ) sont les intersections de la nappe S et des plans de direction P_0 fixée, leurs trajectoires orthogonales sont ce qu'on appelle les lignes de plus grande pente relatives à la direction P_0. Un peu de promenade en montagne vous fait très vite comprendre, par les pieds, ce qu'est une ligne de plus grande pente.

Quelques remarques en vrac.

On peut se donner une nappe par une *équation tangentielle* : c'est un peu comme se donner une courbe plane comme enveloppe d'une famille de droites, voir 16.16.

Le choix du repère, respectant au mieux les données d'un problème est important pour simplifier les calculs, de même qu'un temps de réflexion pour déterminer la meilleure méthode. (Voir 16.15).

Ne pas oublier que l'utilisation d'un repère mobile pour exploiter une égalité vectorielle conduisant à une équation différentielle par exemple, peut beaucoup simplifier les calculs. Mais il faut alors tenir compte des dérivées des vecteurs de base par rapport aux paramètres, ce qui est facile s'ils sont unitaires dans un plan de direction fixe. Il y a une analogie avec le type de raisonnement basé sur la droite d'Euler pour un arc plan. Ce type de méthode s'impose souvent en coordonnées cylindriques, donc pour les nappes de révolution, ou cylindriques, voir 16.12, 16.14.

Un détail permettant d'éviter bien des calculs lors d'un changement de repère orthonormé faisant passer d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à une nouvelle base orthonormée aussi $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, connue surtout par le vecteur $\vec{K} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. On a conservation de la norme, donc $X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et la matrice de passage, P, étant orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$, donc la troisième colonne de P, connue par $\vec{K}$, donne la troisième ligne de P^{-1}, d'où $Z = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

Ceci permet parfois de trouver une équation dans le nouveau repère, surtout pour des nappes de révolution ! Voir 16.17.

Ne pas oublier l'existence des cônes de sommet donné, circonscrits à une nappe, ou des cylindres de direction donnée circonscrits à une nappe, ainsi que les contours apparents associés. Il s'agit bien souvent, en paramétrant affinement des droites, de traduire le caractère « droite tangente » par une racine double. Les calculs se font particulièrement bien pour les quadriques, (voir 16.28).

Énoncés

16.1. Soit la nappe S d'équation $z = x^2 - y^2$ dans un repère orthonormé. Courbes sur S de plan osculateur tangent à la nappe.

16.2. Soit la nappe S de A espace affine euclidien de dimension trois, paramétrée par :

$$(t, \theta) \rightsquigarrow (x = e^{-t}\cos\theta, y = e^{-t}\sin\theta, z = e^{-t}).$$

Trouver les arcs Γ de S tels que le plan osculateur en chaque point soit plan normal à la nappe en ce point.

16.3. Plus courte distance de l'origine à la nappe S d'équation implicite $xyz = a$, $a > 0$.

16.4. Dans l'espace euclidien de dimension trois rapporté à un repère orthonormé, on considère la surface S d'équation :

$$(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - 2abxy - 2bcyz - 2cazx = h,$$

avec a, b, c, h réels et $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Nature de S ?

16.5. Montrer que la nappe S d'équation :

$$(x - y)(x - z) + (y - z)(y - x) + (z - x)(z - y) + x - y = 0,$$

est de révolution. Axe de la nappe, et nature de la nappe.

16.6. Équation du cylindre de direction $(1, 1, 1)$ et de directrice la courbe d'équations :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

16.7. Existence de sphères contenant le cercle C d'équations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

et tangentes à la droite D d'équations $x = z + 4$, $y = 2z + 3$.

16.8. On considère la nappe S d'équation $(x + y + z)^2 - 4yz = 0$ dans un repère orthonormé.

Nature de S.

Angle des plans tangents à S contenant la droite D d'équations $x = 2y$, $x = -z$.

16.9. L'espace de dimension trois est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ x, y, z)$. Soit A le point de coordonnées $(0, a, 0)$, $(a > 0)$, et P le plan d'équation $z = x$.

Une droite variable D passe par A et reste située dans le plan P. Soit Δ la perpendiculaire commune à D et Oz.

a) Caractériser les droites Δ.

b) Trouver l'équation cartésienne de la nappe S engendrée par Δ.

16.10. Soit dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, un disque Δ d'axe D. Une droite L rencontre l'axe D et le disque. Nature de la nappe engendrée par la révolution du cercle Γ, bord de Δ, autour de L.

16.11. Soit la nappe S d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = a^2$, avec $a > 0$. On note Σ l'ensemble des projetés de O sur les plans tangents à S.

a) Reconnaître S.

b) Étudier Σ.

c) Calculer le volume intérieur à Σ.

16.12. Soit la nappe Σ d'équation $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, et la courbe C d'équations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) = 0. \end{cases}$$

Trouver les courbes Γ tracées sur Σ, telles que les tangentes en tout point de Γ rencontrent C.

16.13. Soient a, c, λ des réels tels que $0 < c < \lambda < a$. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les nappes :

$$S_1 :\quad y^2(z^2 + x^2) - c^2x^2 - a^2z^2 = 0,$$

$$S_2 :\quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Montrer que l'intersection de ces deux nappes se réduit à quatre droites et qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents aux deux nappes sont perpendiculaires.

16.14. Soit un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et la courbe L de représentation paramétrique :

$$x = \sin t \cos t,\ y = \sin^2 t\ ;\ z = \tan t.$$

Équation du cylindre C, de directrice L, de génératrices dirigées par $\vec{k}$.

Déterminer les courbes Γ sur C, telles que la tangente en chaque point de Γ soit orthogonale à OA, si A est le point d'intersection de cette tangente et du plan $z = 0$.

Lieu des points A.

16.15. Soit Γ une conique non dégénérée de foyer F. On la fait tourner autour de son axe focal, ce qui engendre une nappe de révolution Σ. Soit S le cône de sommet F ayant pour directrice une section plane de Σ. Montrer que S est de révolution.

16.16. Trouver une nappe S de $\mathbb{R}^3$, paramétrée par (u, v), régulière, et telle que le plan tangent au point de paramètres (u, v) ait pour équation :

$$u^2 x + v^2 y + (1 - u - v)^2 z = 1.$$

16.17. Équation cartésienne de la nappe de révolution engendrée par la rotation de la courbe Γ :

$$z = 0,\ x^3 + y^3 + 3axy = 0,$$

autour de la droite D d'équations $x = y = z$.

16.18. Dans un repère orthonormé, un arc Γ a pour équations :

$$z = mx \text{ et } \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Méridienne de la nappe de révolution d'axe Oz ayant Γ pour courbe directrice.

16.19. Nature de la nappe d'équation $z^2 = 2xy$. Volume du solide D défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z^2 \leqslant 2xy\ ;\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1\}.$$

16.20. Soit la nappe S : $x^2+y^2-z^2-1=0$, P son plan tangent en un point. Montrer que $P \cap S$ est formé de deux droites.

16.21. Trouver sur la nappe paramétrée S :

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = r,$$

les arcs Γ de classe C^2 le long desquels le plan osculateur est tangent à la nappe.

16.22. Trouver un arc Γ de classe C^2, sur le cylindre C :

$x^2+y^2 = a^2$, (équation dans un repère orthonormé), birégulier et tel que la binormale à Γ le long de Γ, rencontre la droite D d'équations $x = a,\ y = 0$.

16.23. Trouver les loxodromies d'une sphère, d'angle α quelconque.

16.24. Quelle est la nature de la nappe S d'équation $pz = xy$?

Quelle est la nature des courbes Γ_λ intersections de S et des plans d'équation $x = \lambda$?

Trouver leurs trajectoires orthogonales sur S.

16.25. On se donne, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé l'arc Γ d'équations $z = 0$, $x^4+y^4 = 1$, et la droite D d'équations $x = y = z$.

Équation de la nappe de révolution d'axe D s'appuyant sur l'arc Γ.

Équation d'une méridienne.

16.26. Équation du cylindre de directrice Γ, tel que la droite Δ soit une génératrice, avec :

$$\Delta : \begin{cases} x = y, \\ x = z, \end{cases} \quad \text{et } \Gamma : \begin{cases} z = 0, \\ x^2+y^2-2ax = 0. \end{cases}$$

16.27. Soit la nappe S d'équation :

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2-z^2).$$

a) Montrer qu'elle est de révolution et bornée.

b) Méridienne de cette nappe.

c) Volume du solide limité par S.

16.28. Nature de la nappe S d'équation $x^2 + y^2 - 2pz = 0$, $(p > 0)$, dans un repère orthonormé.

Soit A : (α, β, γ) un point « extérieur » à S. Cône circonscrit à S de sommet A.

Contour apparent de point de vue A.

16.29. Arcs de classe C^1, sur la nappe d'équation $x^2 + y^2 = 2az$, $(a > 0)$ tels que les tangentes à l'arc fassent un angle α donné avec l'axe des z.

16.30. Nature de la nappe S d'équation : $2xy - xz + 2yz = 0$, dans un repère orthonormé.

Quel est son intersection avec le plan d'équation $x + y + z = 0$.

La nappe S contient-elle des cercles ?

16.31. Soient les droites $\Delta_0 : (x = 0, z = a)$, et $\Delta_1 : (y = 0, z = -a)$ dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer la surface engendrée par les projections orthogonales de O sur les droites coupant Δ_0 et Δ_1.

Soit Σ cette nappe. Sections de Σ par les plans d'équation $z =$ constante.

Solutions

16.1. La nappe est régulière, (équation $z = f(x, y)$), c'est un hyperboloïde hyperbolique, nappe doublement réglée. En tout point il passe deux droites, chacune ayant pour plan osculateur ... tout plan la contenant, donc pourquoi pas le plan tangent : ce sont des solutions au problème posé. Si on sait qu'en un point régulier d'une nappe il passe 0 ou 2 asymptotiques, (et oui, c'est cela qu'on cherche), le problème est résolu.

Pour faire plus sérieux, on va calculer..., en supposant la nappe paramétrée en x, y et $z = x^2 - y^2$.

On a : $\dfrac{\partial m}{\partial x}\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{matrix}\right.$, $\dfrac{\partial m}{\partial y}\left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{matrix}\right.$, $\dfrac{\partial m}{\partial x}\wedge\dfrac{\partial m}{\partial y}\left|\begin{matrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{matrix}\right.$

On cherche ensuite x et y fonctions de t, telles que l'arc Γ obtenu ait pour plan osculateur le plan tangent, ce qui équivaut à $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}$ perpendiculaires à $\dfrac{\partial m}{\partial x}\wedge\dfrac{\partial m}{\partial y}$. C'est évident pour $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, (vecteur du plan tangent), or on a :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left|\begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 2x\dot{x} - 2y\dot{y} \end{matrix}\right. , \quad \frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\left|\begin{matrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 + 2x\ddot{x} - 2y\ddot{y} \end{matrix}\right. ,$$

et il reste la condition

$$-2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} + 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 + 2x\ddot{x} - 2y\ddot{y} = 2(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0,$$

soit $(\dot{x} - \dot{y})(\dot{x} + \dot{y}) = 0$, d'où l'on tire $x - y = c$ ou $x + y = c$, c constante, mais alors on a les courbes, paramétrées en x :

D_c : $x, y = x - c, z = 2xc - c^2$, ou

Δ_c : $x, y = -x + c, z = 2xc - c^2$.

Comme x intervient de manière affine on retrouve ... deux droites.

16.2. On cherche donc ce qu'on appelle les géodésiques de la nappe qui est un demi-cône, car le paramétrage équivaut à la donnée de $z > 0$ et de l'équation $z^2 = x^2 + y^2$.

On peut paramétrer ce cône par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r$ dans $]0, +\infty[$, et chaque demi-droite D_θ, (θ fixé, r variant) ayant pour plan osculateur tout plan la contenant, pourra avoir le plan normal le long de D_θ au cône comme plan osculateur, (il est constant le long de D_θ) donc c'est une solution.

Pour chercher d'autres solutions, on va chercher, sur D_θ, un point associé à r fonction de θ tel que l'arc obtenu convienne, c'est-à-dire tel que $\vec{K} = \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial r}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial \theta}}$ soit dans la direction $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\frac{dm}{d\theta}}, \overrightarrow{\frac{d^2m}{d\theta^2}}\right)$ du plan osculateur. C'est un produit mixte nul à écrire.

On a : $$\overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial r}} \left| \begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{array} \right. \wedge \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial \theta}} \left| \begin{array}{l} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{array} \right. = \vec{K} \left| \begin{array}{l} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{array} \right. .$$

Puis, avec r fonction de θ, on aura

$$\overrightarrow{\frac{dm}{d\theta}} \left| \begin{array}{l} \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \\ \dot{r} \end{array} \right. , \text{ et } \overrightarrow{\frac{d^2m}{d\theta^2}} \left| \begin{array}{l} \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta - r\cos\theta \\ \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta, \\ \ddot{r} \end{array} \right.$$

et on doit avoir la condition

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta & \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta - r\cos\theta \\ \sin\theta & \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta & \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \\ -1 & \dot{r} & \ddot{r} \end{vmatrix} = 0.$$

En notant C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de ce déterminant, on remplace C_2 par $C_2 - \dot{r}\,C_1$ et C_3 par $C_3 - (\ddot{r} - r)C_1$ la condition :

$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & -2\dot{r}\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta & 2\dot{r}\cos\theta \\ -1 & 2\dot{r} & 2\ddot{r}-r \end{vmatrix} = 0$, que l'on développe par rapport à la troisième ligne en :

$$-(-2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + 2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta) - 2\dot{r}(2\dot{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)) + (2\ddot{r}-r)r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

soit encore $2r\ddot{r} - 4\dot{r}^2 - r^2 = 0$.

Pour $r \neq 0$, l'équation différentielle s'écrit encore :

$2\left(\frac{\ddot{r}}{r}\right) - 4\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 - 1 = 0$, or la fonction $g = \frac{\dot{r}}{r}$ est telle que $\dot{g} = \frac{\ddot{r}}{r} - \left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2$ d'où $\frac{\ddot{r}}{r} = \dot{g} + g^2$ et l'équation différentielle :

$2\dot{g} + 2g^2 - 4g^2 - 1 = 2\dot{g} - 2g^2 - 1 = 0.$

Elle est incomplète : $\frac{dg}{g^2 + \frac{1}{2}} = d\theta$, d'où

$$\sqrt{2}\ \text{Arctg}\ \sqrt{2}g = \theta - \theta_0,\ \text{soit}\ g = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{tg}\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{r}}{r},$$

ce qui conduit à : $\ln|r| = -\ln\left|\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{2}}\right)\right| + \text{constante},$

ou à $r = \dfrac{\lambda}{\cos\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{2}}}$, (avec $r > 0$, ne l'oublions pas).

16.3. Point n'est nécessaire d'avoir une idée de l'allure de la nappe pour calculer le minimum de la fonction f définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{xy}\right)^2,$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

Vu la présence de x^2+y^2, on peut passer en polaires, l'application $(r,\theta) \rightsquigarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$ représentant ici un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^* \times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi droite $x>0$, $y = 0$, ce qui n'est pas gênant car sur la nappe S on a $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$.

On considère donc $\varphi(r,\theta) = r^2 + \dfrac{4a^2}{r^4 \sin^2 2\theta}$, que l'on étudie pour $r>0$ et $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vu les symétries de la nappe par rapport aux axes de coordonnées.

On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\dfrac{16a^2 \sin 2\theta \cos 2\theta}{r^4 \sin^4 2\theta}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 2r - \frac{16a^2}{r^5 \sin^2 2\theta},$$

donc, pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, un point critique correspond à $\cos 2\theta = 0$, soit $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, d'où $r^6 = 8a^2$, et $r = \sqrt{2}a^{1/3}$.

Comme pour un θ fixé, la fonction $r \rightsquigarrow \varphi(r,\theta)$ passe par un minimum valant $\dfrac{3a^{2/3}}{(\sin^2 2\theta)^{1/3}}$ lorsque $r = \dfrac{\sqrt{2}a^{1/3}}{\sin^{1/3} 2\theta}$, et que cette valeur $m(\theta) = \dfrac{3a^{2/3}}{(\sin^2 2\theta)^{1/3}}$ est elle-même minimale lorsque $\sin^2 2\theta = 1$, soit ici, si $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, on a un minimum valant $3a^{2/3}$ pour le carré de la distance, atteint si $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $r = \sqrt{2}a^{1/3}$, donc pour $x = y = a^{1/3}$, (d'où aussi $z = a^{1/3}$), et aussi pour les points symétriques par rapport aux axes de coordonnées.

On pouvait aussi déterminer les points « critiques » en exprimant la proportionnalité des différentielles de $u(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ et de

$v(x, y, z) = xyz - a$, (problème d'extrema liés), ce qui conduit au système :

$$\frac{yz}{2x} = \frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z}, \text{ ce qui équivaut à :}$$

$y^2 z = x^2 z$ et $xz^2 = xy^2$, et, comme $x \neq 0$ et $z \neq 0$, donne $x^2 = y^2 = z^2$.

En utilisant les symétries, on retrouve le point $A(a^{1/3}, a^{1/3}, a^{1/3})$ situé à la distance $d = \sqrt{3a^{2/3}}$ de l'origine, et ses symétriques par rapport aux axes de coordonnées, mais il reste à justifier que l'on a un minimum de la distance.

16.4. On peut encore écrire l'équation de S sous la forme :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx) = h,$$

soit encore :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = h,$$

et sous cette forme, on reconnaît l'équation d'une nappe de révolution, d'axe D, droite passant par l'origine, (centre de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 =$ constante), et perpendiculaire au plan P d'équation $ax + by + cz = 0$.

En effet, si $m_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, tout point $m(x, y, z)$ tel que :

① : $x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, et,

② : $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$,

est alors sur S ; or ① est l'équation d'une sphère de centre O et ② l'équation d'un plan perpendiculaire à D, donc ① et ② sont les équations d'un cercle d'axe D.

Il reste à savoir si cette nappe est vide ou non. Pour cela, on change de repère en prenant $\vec{K} = \dfrac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, unitaire dirigeant D, on prend $\vec{I}$ unitaire orthogonal à $\vec{K}$, or $b\vec{i} - a\vec{j}$ est orthogonal à $\vec{K}$, donc

$\vec{I} = \dfrac{b\vec{i} - a\vec{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ peut convenir, et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$ complétera notre repère orthonormé.

On trouve $\vec{J} = \dfrac{ac\vec{i} + bc\vec{j} - (a^2 + b^2)\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Dans ce nouveau repère orthonormé, la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ vaut $X^2 + Y^2 + Z^2$, et comme la matrice de passage est orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$ donc la troisième colonne de P donne Z en fonction de x, y, z, (troisième ligne de P^{-1}), d'où $Z = \dfrac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

L'équation de S devient :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (a^2 + b^2 + c^2)Z^2 = h\text{, ou encore :}$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{h}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il en résulte que, pour $h < 0$, S est vide ; si $h = 0$, S est réduite à l'axe D, $(O, \vec{K})$; et si $h > 0$, on a un cylindre de révolution d'axe D et de rayon $\sqrt{\dfrac{h}{a^2 + b^2 + c^2}}$.

16.5. Si on développe l'équation de S, on obtient :

$$x^2 - yx - zx + yz + y^2 - xy - zy + zx + z^2 - zy - xz + xy + x - y = 0,$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) + x - y = 0.$$

Les $-xy$, $-yz$, $-zx$ sont des « doubles produits » incitant à introduire $-\frac{1}{2}(x + y + z)^2$, d'où une équation s'écrivant :

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + x - y = 0.$$

On n'a pas une relation du type $f(u, v) = 0$, avec u en « équation de sphère » et v forme affine, mais, les plans d'équations $x+y+z = 0$ et $x-y = 0$ étant orthogonaux, on peut faire un changement de coordonnées associé au changement de base orthonormé, obtenu en posant :

$$\vec{K} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}} \; ; \vec{J} = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}, \text{ et } \vec{I} = \vec{K} \wedge \vec{I}.$$

La matrice P de passage étant orthogonale, $P^{-1} = {}^t P$ conduit à des nouvelles coordonnées X, Y, Z avec :

$$Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \text{ et } Z = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}.$$

Comme $x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2$, dans ce nouveau repère, la nappe S a pour équation :

$$\frac{3}{2}(X^2+Y^2+Z^2)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}Z)^2+\sqrt{2}Y = 0,$$

ou encore : $X^2+Y^2+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}Y = 0$.

Sous cette forme, on reconnaît une nappe cylindrique, de génératrices rectilignes parallèles à OZ, de courbe directrice, dans le plan perpendiculaire à l'axe, XOY, le cercle centré en Ω : $\left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

On a donc un cylindre de révolution, d'axe dirigé par la droite passant par Ω, de vecteur directeur $\vec{V} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ dans l'ancien repère, et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

16.6. La courbe directrice C, intersection d'un plan et d'une sphère, est un cercle, (en repère orthonormé).

Un point M(X, Y, Z) sera sur le cylindre $\mathcal{S}$ cherché si et seulement si la droite D passant par M, de vecteur directeur $\vec{V} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ rencontre C, donc, si et seulement si il existe un paramètre réel λ tel que le point de coordonnées $X+\lambda$, $Y+\lambda$ et $Z+\lambda$ soit sur C.

C'est équivalent à l'existence de λ tel que :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} X+Y+2\lambda = 0 \text{ et,} \\ (X+\lambda)^2+(Y+\lambda)^2+(Z+\lambda)^2 = 1. \end{cases}$$

Mais (I) implique que $\lambda = -\dfrac{X+Y}{2}$, et qu'alors (X, Y, Z) vérifient la relation :

$$\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2+\left(\frac{Y-X}{2}\right)^2+\left(Z-\frac{X+Y}{2}\right)^2 = 1\text{, ou encore :}$$

$$(\mathrm{II})\qquad 2(X-Y)^2+(2Z-X-Y)^2-4 = 0.$$

Réciproquement, si (II) est vérifiée, en écrivant II sous la forme :

$$\left(X-\frac{X+Y}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{X+Y}{2}\right)^2+\left(Z-\frac{X+Y}{2}\right)^2 = 1,$$ et en posant $\lambda = -\dfrac{X+Y}{2}$, on obtient le système (I) vérifié par les coordonnées X, Y et Z de M.

Donc le cylindre $\mathscr{S}$ admet l'équation implicite (II).

16.7. L'exercice est facile à résoudre. Toutes les sphères contenant C sont centrées sur l'axe de ce cercle, donc en un point M_λ de coordonnées $(0, 1, \lambda)$, et il reste à trouver λ pour que la droite D paramétrée par $x = z+4$, $y = 2z+3$, $z = z$ soit tangente à S_λ, sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2y-2\lambda z-1 = 0,$$

ce qui se traduit par une racine double dans l'équation :

$$(z+4)^2+(2z+3)^2+z^2-2(2z+3)-2\lambda z-1 = 0.$$

On ordonne en :

$$6z^2+(16-2\lambda)z+18 = 0,$$

d'où $\delta = (8-\lambda)^2-108$.

On veut la nullité de ce discriminant, ce qui est obtenu pour :

$\lambda-8 = \pm\,(3\cdot 36)^{1/2}$ soit $\lambda = 8\pm 6\sqrt{3}$: ce sont les deux ordonnées des centres des deux sphères solutions.

16.8. L'équation de S est homogène en x, y, z, donc S est une nappe conique, de sommet O, et c'est en plus une quadrique.

On peut, pour résoudre cet exercice, chercher *l'équation tangentielle du cône*, c'est-à-dire la relation liant u, v, w, h pour que le plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ soit tangent au cône.

Pour cela, en $m_0 : (x_0, y_0, z_0)$ différent du sommet, sur le cône d'équation $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent est orthogonal à $\mathrm{grad} f(m_0)$, d'où une équation :

$$2(x - x_0)(x_0 + y_0 + z_0) + (y - y_0)(2(x_0 + y_0 + z_0) - 4z_0) \\ + (z - z_0)(2(x_0 + y_0 + z_0) - 4y_0) = 0,$$

de ce plan tangent, qui s'ordonne, après simplification par 2, en :

$$(x_0 + y_0 + z_0)x + y(x_0 + y_0 - z_0) + z(x_0 - y_0 + z_0) - x_0(x_0 + y_0 + z_0) \\ - y_0(x_0 + y_0 + z_0) + 2y_0z_0 - z_0(x_0 + y_0 + z_0) + 2y_0z_0 = 0.$$

Le terme constant est nul car il s'écrit :

$$-(x_0 + y_0 + z_0)^2 + 4y_0z_0 \quad \text{et} \quad m_0 \in \mathrm{S}.$$

On obtient donc l'équation :

$$x(x_0 + y_0 + z_0) + y(x_0 + y_0 - z_0) + z(x_0 - y_0 + z_0) = 0,$$

donc un plan tangent à S a une équation du type :

$$ux + vy + wz = 0,$$

u, v, w étant tels qu'il existe (x_0, y_0, z_0) sur $\mathrm{S} - \{0\}$, avec :

$$\frac{u}{x_0 + y_0 + z_0} = \frac{v}{x_0 + y_0 - z_0} = \frac{w}{x_0 - y_0 + z_0} = \alpha \neq 0.$$

En posant $\beta = x_0 + y_0 + z_0$, on a encore :

$$u = \alpha\beta, \ v = \alpha(\beta - 2z_0) \ \text{et} \ w = \alpha(\beta - 2y_0),$$

d'où l'on tire la relation :

$$4y_0z_0 = (x_0 + y_0 + z_0)^2 = \beta^2 = \left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{v}{\alpha} - \frac{u}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\alpha} - \frac{u}{\alpha}\right),$$

la dernière égalité venant de :

$$(2y_0)(2z_0) = \left(\beta - \frac{v}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{w}{\alpha}\right) = \left(\frac{u}{\alpha} - \frac{v}{\alpha}\right)\left(\frac{u}{\alpha} - \frac{w}{\alpha}\right).$$

Donc, comme $\alpha \neq 0$, la relation $u^2 = (v - u)(w - u)$ lie u, v, w pour que le plan d'équation $ux + vy + wz = 0$ soit tangent à S.

Il y a équivalence, car si cette relation est vérifiée, en posant $\alpha = 1$, et en résolvant le système de Cramer :

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = u \\ x_0 + y_0 - z_0 = v \\ x_0 - y_0 + z_0 = w, \end{cases}$$

on a $v - u = -2z_0$ et $w - u = -2y_0$, donc $u^2 = (v-u)(w-u)$ traduit l'appartenance de m_0 à S, et $ux + vy + wz = 0$ est l'équation du plan tangent en m_0.

Les plans contenant D ont des équations du type :

$$x - 2y - \lambda(x+z) = 0,$$

(avec $\lambda = \infty$ pour le plan $x + z = 0$).

Donc $P_\lambda : (1-\lambda)x - 2y - \lambda z = 0$, sera tangent à S si et seulement si on a λ tel que :

$$(1-\lambda)^2 = (-2-1+\lambda)(-\lambda-1+\lambda) = 3-\lambda,$$

soit encore :

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, d'où $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$ comme solutions.

Les équations des deux plans tangents sont donc :

$P_{-1} : 2x - 2y + z = 0$

$P_2 : \ -x - 2y - 2z = 0,$

ces plans sont orthogonaux aux vecteurs $V_{-1} : (2, -2, 1)$ et $V_2 : (-1, -2, -2)$ avec $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = -2 + 4 - 2 = 0$, donc ils sont orthogonaux.

16.9. Les droites D pivotent autour de A, dans le plan P : on peut prendre comme équations des droites D des équations du type :

$$\begin{cases} x = z \\ y - a = \lambda x, \end{cases}$$

ce qui caractérise la droite D_λ, (avec $D_\infty : x = 0$ et $x = z$ soit $D_\infty =$ l'axe des y).

Un vecteur directeur $\overrightarrow{V_\lambda}$ de D_λ est alors le produit vectoriel $\vec{V} \wedge \overrightarrow{W}$ avec :

$$\vec{V}\left|\begin{array}{l}1\\0\\-1\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \vec{W}\left|\begin{array}{l}\lambda\\-1\\0\end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \vec{V_\lambda}\left|\begin{array}{l}-1\\-\lambda\\-1\end{array}\right. .$$

a) La perpendiculaire commune, Δ_λ, entre D_λ et Oz, est une droite horizontale. Si elle coupe Oz en $M : (0, 0, \mu)$, elle coupe alors D_λ au point N de cote μ, d'où $x = \mu$ et $y = a + \lambda\mu$, donc les coordonnées de N sont $(\mu, a + \lambda\mu, \mu)$ et un vecteur directeur, $\overrightarrow{MN}$ de Δ aura pour composantes $(\mu, a + \lambda\mu, 0)$.

La droite Δ_λ sera alors perpendiculaire commune si et seulement si $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{V_\lambda} = 0$, soit $-\mu - \lambda(a + \lambda\mu) = 0$, ce qui correspond à $\mu = \dfrac{-a\lambda}{1+\lambda^2}$.

Les composantes de $\overrightarrow{MN}$ deviennent : $\left(\dfrac{-a\lambda}{1+\lambda^2}, \dfrac{a}{1+\lambda^2}, 0\right)$, donc Δ est aussi dans le plan d'équation $x = -\lambda y$, d'où les équations :

$$\begin{cases} x = -\lambda y \\ z = \dfrac{-a\lambda}{1+\lambda^2}, \end{cases}$$

de la perpendiculaire commune Δ_λ.

Pour $\lambda = \infty$, on trouverait $y = 0$ et $z = 0$, soit l'axe des x qui est bien la perpendiculaire commune de Oz et de $Oy = D_\infty$.

b) Si λ varie, tout point de Δ_λ, pour tout λ, se trouve sur la nappe d'équation :

$$z\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = a\frac{x}{y}, \text{ ou } z(x^2 + y^2) - ayx = 0,$$

obtenue en « éliminant » λ.

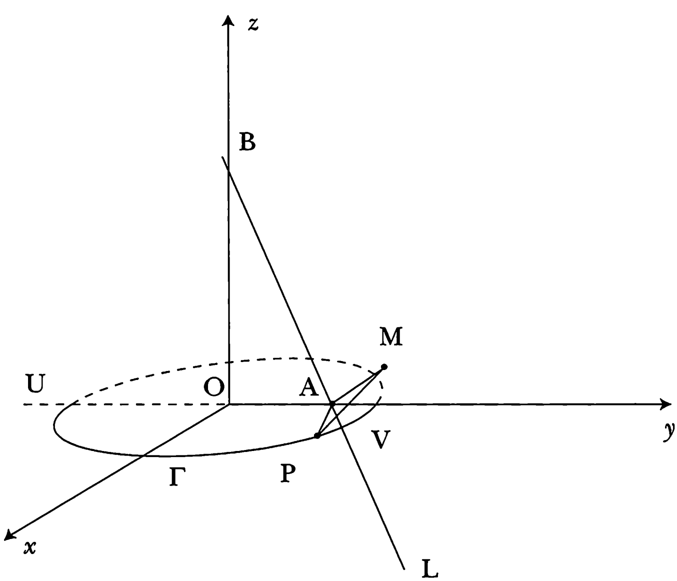
Réciproquement, tout point d'ordonnée $y \neq 0$ de cette nappe est tel qu'en posant $\lambda = -\frac{x}{y}$, on ait $z\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right) = a\frac{x}{y}$, soit $z = \frac{-a\lambda}{1+\lambda^2}$: le point est sur une Δ_λ.

Pour $y = 0$, on doit avoir $zx^2 = 0$ et si $z = 0$ donne Δ_∞, les conditions $y = 0$ et $x = 0$ donnent l'axe des z qui n'est pas une Δ_λ, mais tout point de l'axe des z étant sur une Δ_λ, l'axe des z est sur la nappe S cherchée.

Donc S est bien d'équation $z(x^2+y^2)-axy = 0$, elle est conoïdale, (homogène en x, y).

16.10. Prenons un repère orthonormé tel que l'axe Oz soit l'axe D du disque Δ, Δ étant situé dans le plan $z = 0$.

On peut supposer que L rencontre Δ en un point A situé sur Oy, et D en B. On prendra donc pour coordonnées : A : $(0, a, 0)$ et B : $(0, 0, b)$, avec $b > 0$ et $0 \leqslant a \leqslant$ R, R étant le rayon du disque.



Un point M (X, Y, Z) est alors sur la nappe engendrée par la rotation de Γ autour de L si et seulement si il existe P sur Γ tel que P et M soient sur un cercle d'axe L, ce qui équivaut à P et M sur une sphère Σ centrée en A et à l'orthogonalité de la droite (PM) et de L, (P et M étant alors sur le cercle intersection de Σ et du plan orthogonal à L passant par P, (ou M).

Donc M est sur la nappe S cherchée si et seulement si il existe θ dans $[0, 2\pi]$ tel qu'avec P : $(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$, on ait $AP^2 = AM^2$ et $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{V} = 0$, si $\vec{V}$ dirige L.

On a pour composantes : $\overrightarrow{AM}$: $(X, Y-a, Z)$;

$\overrightarrow{PM}(X - R\cos\theta, Y - R\sin\theta, Z)$; $\overrightarrow{AP}$: $(R\cos\theta, R\sin\theta - a, 0)$ et

$\vec{V}$: $(0, -a, b)$, d'où les conditions :

$$\begin{cases} X^2 + (Y-a)^2 + Z^2 = R^2\cos^2\theta + (R\sin\theta - a)^2 = R^2 + a^2 - 2aR\sin\theta, \\ -a(Y - R\sin\theta) + bZ = 0. \end{cases}$$

La deuxième donne $aR\sin\theta = aY - bZ$, d'où les conditions :

①: $\quad -aR \leqslant aY - bZ \leqslant aR$,

et l'élimination de θ qui conduit à l'équation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aY = R^2 - 2(aY - bZ), \text{ soit encore :}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2bZ + b^2 = R^2 + b^2, \text{ ou :}$$

$$X^2 + Y^2 + (Z-b)^2 = R^2 + b^2.$$

La nappe S est donc la portion de sphère, centrée en B, de rayon $\sqrt{R^2 + b^2}$, (donc contenant Γ), comprise entre les deux plans perpendiculaires à L, d'équations :

$$aY - bZ = aR \text{ et } aY - bZ = -aR,$$

ces plans passant respectivement par V : $(0, R, 0)$ et U : $(0, -R, 0)$.

Le fait que toute la portion de sphère convienne se vérifie facilement : si M_0 : (X_0, Y_0, Z_0) est sur cette portion de sphère, on a : $-aR \leqslant aY_0 - bZ_0 \leqslant aR$, donc il existe θ_0 dans $[0, \pi]$ tel que $aY_0 - bZ_0 = aR\sin\theta_0$, et comme $X_0^2 + Y_0^2 + (Z_0 - b)^2 = R^2 + b^2$, on a encore :

$X_0^2+Y_0^2+Z_0^2-2bZ_0 = R^2$, avec $-2bZ_0 = -2aY_0+2aR\sin\theta_0$, d'où :

$X_0^2+Y_0^2+Z_0^2-2aY_0+2aR\sin\theta_0 = R^2$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} X_0^2+(Y_0-a)^2+Z_0^2 &= R^2+a^2-2aR\sin\theta_0 \\ &= R^2\cos^2\theta_0+(R\sin\theta_0-a)^2 : \end{aligned}$$

on a $AM_0 = AP_0$ et $\overrightarrow{P_0M_0}\cdot\vec{V} = 0$, avec $P_0 : (R\cos\theta_0, R\sin\theta_0, 0)$ sur Γ, donc M_0 vérifie bien les conditions du départ.

16.11. a) La nappe S est une quadrique. Si on écrit l'équation implicite de S sous la forme :

$$y^2+z^2 = x^2-a^2,$$

on reconnaît l'équation d'un hyperboloïde à deux nappes, de révolution autour de Ox, les sections par des plans $x = k$ étant des cercles pour $|k| \geqslant a$, vides si $|k| < a$.

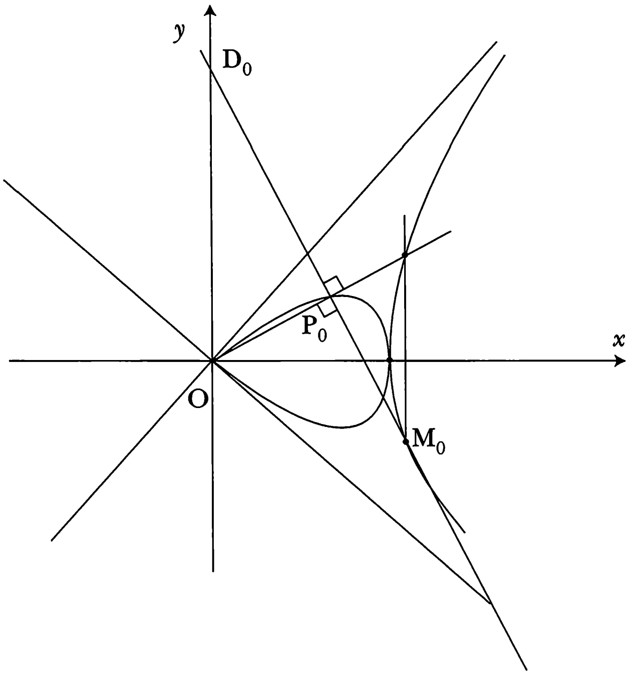
b) Tout plan contenant Ox est plan de symétrie pour l'hyperboloïde S. Soit P un tel plan, H l'hyperbole intersection et M_0 sur H : le plan tangent π_0 à S en M_0 contiendra la tangente D_0 à l'hyperbole, et sera perpendiculaire à P le long de D_0, puisque P est plan de symétrie. Donc le projeté de O sur π_0 sera le projeté P_0 de O sur D_0, puisqu'alors OP_0 sera perpendiculaire à deux droites de π_0 : D_0 et la perpendiculaire à P passant par P_0.

On étudie donc le problème dans le plan xOy, et même avec la branche d'hyperbole associée à la condition $x > 0$. Par rotation autour de Ox et symétrie par rapport au plan yOz, on obtiendra Σ, nappe de révolution autour de Ox.

Dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a l'hyperbole H d'équation $x^2-y^2 = a^2$, hyperbole équilatère.

En $M_0(x_0, y_0)$, la tangente a pour équation $xx_0-yy_0 = a^2$, (règle de dédoublement des termes), et un point de la perpendiculaire à la tangente passant par O ayant des coordonnées du type $x = tx_0$, $y = -ty_0$, t sera le paramètre du projeté cherché, P_0, si on a :

$$t(x_0^2+y_0^2) = a^2,$$



d'où les coordonnées :

$$x = \frac{a^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2} \text{ et } y = \frac{-a^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2},$$

du point P_0, x_0 et y_0 étant liés par la relation $x_0^2 - y_0^2 = a^2$.

La présence du facteur $\dfrac{a^2}{x_0^2 + y_0^2}$ peut inciter à passer en polaires. Pour cela, soit (r_0, θ_0) les coordonnées polaires de M_0 sur H on a :

$$(r_0 \cos\theta_0)^2 - (r_0 \sin\theta_0)^2 = a^2, \text{ soit } r_0^2 \cos 2\theta_0 = a^2.$$

Pour P_0, les coordonnées sont : $\left(\dfrac{a^2}{r_0}\cos\theta_0, -\dfrac{a^2}{r_0}\sin\theta_0\right)$, d'où un angle polaire θ valant $-\theta_0$, et $r = \dfrac{a^2}{r_0}$: l'équation polaire du lieu de P_0

devient : $\dfrac{a^4}{r^2}\cos 2\theta = a^2$, ou encore $r^2 = a^2\cos 2\theta$, (le point $r = 0$, obtenu pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, correspondant en fait à la projection de O sur les asymptotes à l'hyperbole).

En coordonnées implicites, l'équation de l'arc Γ ensemble des points P_0 sera donc, à partir de $r^4 = a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)$:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

et, dans la rotation autour de Ox, l'arc Γ engendre la nappe Σ d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2-z^2)$, puisque y^2 donne y^2+z^2.

c) Le volume cherché est le double de celui de la partie de Σ située dans le demi-espace $x \geqslant 0$.

En revenant à la méridienne Γ dans le plan xOy, pour x fixé, l'intersection de Σ et du plan d'abscisse x est un disque de rayon y, d'où un volume :

$$V = 2\int_0^a \pi y^2 \mathrm{d}x.$$

Si on veut paramétrer en fonction de θ variant de 0 à $\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$x = r\cos\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, d'où :

$$\mathrm{d}x = a\left(\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta - \sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{-a}{\sqrt{\cos 2\theta}}(\sin 2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta) = -\frac{a\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta,$$

et comme x croît de 0 à a si θ décroît de $\dfrac{\pi}{4}$ à 0, on aura, avec $y^2 = r^2\sin^2\theta = a^2\cos 2\theta\sin^2\theta$:

$$V = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \pi(a^2\cos 2\theta\sin^2\theta)\left(\frac{-a\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta}\sin^2\theta\sin 3\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

On a $\sin 3\theta = \mathrm{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

$$= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$

donc $\sqrt{\cos 2\theta}\sin^2\theta(3-4\sin^2\theta)(\sin\theta d\theta)$ peut inciter à poser $u = \cos\theta$, d'où :

$$V = 2\pi a^3 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2u^2-1}(1-u^2)(1-4u^2)du.$$

Si vous n'êtes pas fatigué, vous pouvez poser $\sqrt{2}u = \mathrm{ch}\varphi$, d'où, avec $\alpha = \mathrm{Arg\ ch}\ \sqrt{2} = \ln(1+\sqrt{2})$, une intégrale :

$$V = 2\pi a^3 \int_\alpha^0 \mathrm{sh}\varphi\left(1-\frac{\mathrm{ch}^2\varphi}{2}\right)(1-2\mathrm{ch}^2\varphi)\frac{\mathrm{sh}\varphi}{\sqrt{2}}d\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3 \int_0^\alpha \mathrm{sh}^2\varphi(-2\mathrm{ch}^4\varphi + 5\mathrm{ch}^2\varphi - 2)d\varphi.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3 \int_0^\alpha (-2\mathrm{sh}^2\varphi\mathrm{ch}^4\varphi + 5\mathrm{sh}^2\varphi\mathrm{ch}^2\varphi - 2\mathrm{sh}^2\varphi)d\varphi.$$

Vous pouvez alors :

1°) arrêter,

2°) linéariser : $(\mathrm{sh}\varphi\mathrm{ch}\varphi)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{sh}^2 2\varphi$

$$= \frac{1}{8}(\mathrm{ch}4\varphi - 1)\ ;$$

$$2\mathrm{sh}^2\varphi = \mathrm{ch}2\varphi - 1\ ;$$

$$\mathrm{sh}^2\varphi\mathrm{ch}^4\varphi = \mathrm{ch}^2\varphi(\mathrm{sh}^2\varphi\mathrm{ch}^2\varphi)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{ch}2\varphi+1}{2}\right)(\mathrm{ch}4\varphi - 1)$$

$$= \frac{1}{16}(\mathrm{ch}2\varphi\mathrm{ch}4\varphi + \mathrm{ch}4\varphi - \mathrm{ch}2\varphi - 1)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{ch}6\varphi + \mathrm{ch}2\varphi}{2} + \mathrm{ch}4\varphi - \mathrm{ch}2\varphi - 1\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{ch}6\varphi}{2} + \mathrm{ch}4\varphi - \frac{\mathrm{ch}2\varphi}{2} - 1\right)$$

et obtenir, sauf erreur, une expression à intégrer valant :

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{ch}6\varphi}{2}+\mathrm{ch}4\varphi-\frac{\mathrm{ch}2\varphi}{2}-1\right)+\frac{5}{8}(\mathrm{ch}4\varphi-1)-\mathrm{ch}2\varphi+1$$

$$=-\frac{1}{16}\mathrm{ch}6\varphi+\frac{1}{2}\mathrm{ch}4\varphi-\frac{15}{16}\mathrm{ch}2\varphi+\frac{1}{2},\text{ et obtenir...}$$

$$V=\pi a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{6}\right),$$

mais alors là, sans aucune garantie.

On peut parvenir à ce résultat en utilisant un logiciel de calcul formel, du moins je l'espère, ce qui est dans l'air du temps.

16.12. La nappe Σ est un cylindre d'axe Oz et en introduisant, dans le repère orthonormé O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, le vecteur $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, un point de la nappe est donné par une expression :

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{u}(\theta)+z(\theta)\vec{k}.$$

On cherche alors la fonction $\theta \rightsquigarrow z(\theta)$ pour que l'arc Γ obtenu convienne.

On a $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = a\overrightarrow{v(\theta)}+z'(\theta)\vec{k}$, avec $\overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$, et la tangente en M à Γ est paramétrée par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}+\lambda\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = a\vec{u}+\lambda a\vec{v}+(z+\lambda z')\vec{k}.$$

Cette tangente coupe le plan $z = 0$ si et seulement si z' est non nul, ($\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$ non parallèle au plan de C), et c'est pour $\lambda = -\dfrac{z}{z'}$, d'où le point P tel que :

$$\overrightarrow{OP} = a\vec{u}-\frac{az}{z'}\vec{v}.$$

Comme le repère $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé dans le plan du cercle C, l'appartenance de P à C équivaut à la relation :

$$a^2\left(1+\frac{z^2}{z'^2}\right) = a^2+b^2,$$

soit encore à $\frac{z^2}{z'^2} = \frac{b^2}{a^2}$, d'où $\frac{z'}{z} = \pm\frac{a}{b}$ et $z(\theta) = \mu e^{\frac{a}{b}\theta}$, ou $z(\theta) = \nu e^{-\frac{a}{b}\theta}$,

μ et ν étant des constantes arbitraires.

Les solutions sont donc les arcs paramétrés :

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z(\theta) = \mu e^{\frac{a}{b}\theta} \text{ ou } z = \nu e^{-\frac{a}{b}\theta}.$$

16.13. L'équation de S_1 est homogène en x et z : c'est une nappe conoïdale ; quant à S_2, comme $\lambda^2-a^2<0$ et $\lambda^2-c^2>0$, c'est un hyperboloïde à une nappe. Les deux nappes sont donc réglées.

Posons $a^2-\lambda^2 = \alpha^2$ et $\lambda^2-c^2 = \gamma^2$, les points communs aux deux nappes vérifient les équations :

$$\begin{cases} y^2(x^2+z^2)-c^2x^2-a^2z^2 = 0, \\ -\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\lambda^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1. \end{cases}$$

Considérons-les comme des équations en x^2, y^2 et z^2, et modifions la première pour tenir compte des relations $c^2 = \lambda^2-\gamma^2$ et $a^2 = \lambda^2+\alpha^2$. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} y^2(x^2+z^2)-\lambda^2x^2+\gamma^2x^2-\lambda^2z^2-\alpha^2z^2 = 0, \text{ et} \\ y^2-\lambda^2 = \dfrac{\lambda^2}{\alpha^2\gamma^2}(\gamma^2x^2-\alpha^2z^2), \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (y^2-\lambda^2)(x^2+z^2)+\gamma^2x^2-\alpha^2z^2 = 0, \\ y^2-\lambda^2 = \dfrac{\lambda^2}{\alpha^2\gamma^2}(\gamma^2x^2-\alpha^2z^2) = 0, \end{cases}$$

système équivalent à :

$$\begin{cases} (y^2-\lambda^2)(x^2+z^2)+\dfrac{\alpha^2\gamma^2}{\lambda^2}(y^2-\lambda^2) = 0, \\ (y^2-\lambda^2) = \dfrac{\lambda^2}{\alpha^2\gamma^2}(\gamma^2x^2-\alpha^2z^2). \end{cases}$$

La première relation se factorise en :

$(y^2-\lambda^2)\left(x^2+z^2+\dfrac{\alpha^2\gamma^2}{\lambda^2}\right) = 0$, et le deuxième facteur ne s'annulant pas, finalement les coordonnées des intersections de S_1 et S_2 vérifient les relations :

$$\begin{cases} y^2-\lambda^2 = 0, \\ \gamma^2x^2-\alpha^2z^2 = 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc des quatre droites d'équations :

$$\begin{cases} y = \lambda \\ \gamma x = \alpha z \end{cases} ; \begin{cases} y = \lambda \\ \gamma x = -\alpha z \end{cases} ; \begin{cases} y = -\lambda \\ \gamma x = \alpha z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = -\lambda \\ \gamma x = -\alpha z \end{cases} .$$

Soit $m_0(x_0, y_0, z_0)$ commun aux deux nappes. Les vecteurs gradients, normaux aux plans tangents en ce point sont respectivement :

$\overrightarrow{V_1}$: $(2x_0(y_0^2-c^2), 2y_0(x_0^2+z_0^2), 2z_0(y_0^2-a^2))$, et

$\overrightarrow{V_2}$: $\left(-\dfrac{2x_0}{\alpha^2}, \dfrac{2y_0}{\lambda^2}, \dfrac{2z_0}{\gamma^2}\right)$,

et on a :

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} = -\frac{x_0^2}{\alpha^2}(y_0^2-c^2)+\frac{y_0^2}{\lambda^2}(x_0^2+z_0^2)+\frac{z_0^2}{\gamma^2}(y_0^2-a^2),$$

avec $y_0^2 = \lambda^2$ et $\alpha^2z_0^2 = \gamma^2x_0^2$, ne l'oublions pas.

On a donc $y_0^2-c^2 = \lambda^2-c^2 = \gamma^2$ ici, et $y_0^2-a^2 = \lambda^2-a^2 = -\alpha^2$, d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2} &= -x_0^2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+x_0^2+z_0^2+z_0^2\left(-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)\\ &= x_0^2\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)+z_0^2\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)\\ &= \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2\gamma^2}(\alpha^2z_0^2-\gamma^2x_0^2) = 0,\end{aligned}$$

d'où l'orthogonalité des plans tangents.

16.14. L'arc L est obtenu pour t dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les fonctions x, y et z étant π périodiques, z n'étant pas définie pour $t = \frac{\pi}{2}$, modulo π.

On a $x^2+y^2 = \sin^2 t = y$, pour un point M quelconque de l'arc L, or $P(X, Y, Z)$ est sur le cylindre C si et seulement si la droite parallèle à Oz, passant par P rencontre L, donc si et seulement si il existe t tel que $X = \sin t\cos t$ et $Y = \sin^2 t$, ce qui équivaut à avoir $X^2+Y^2 = Y$, ou $X^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Le cylindre cherché est de révolution, d'axe l'axe du cercle d'équations $z = 0$, $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de directrice également ce cercle.

Pour chercher un arc Γ sur le cylindre C, on a intérêt à introduire les vecteurs :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j} \text{ et } \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}.$$

On peut alors paramétrer un arc Γ de C par :

$$\overrightarrow{OM} = \overline{Om}\vec{u}(\theta)+z(\theta)\vec{k},$$

avec m projection orthogonale de M sur le plan $z = 0$.

L'équation polaire du cercle de base étant $r^2 = r\sin\theta$, ou encore $r = \sin\theta$, l'arc Γ est paramétré par :

$$\overrightarrow{OM} = \sin\theta \cdot \vec{u}(\theta) + z(\theta)\vec{k}\text{, d'où :}$$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \cos\theta \cdot \vec{u} + \sin\theta \cdot \vec{v} + z'\vec{k}.$$

La tangente en M à Γ est paramétrée, avec λ réel par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \lambda\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = (\sin\theta + \lambda\cos\theta)\vec{u} + \lambda(\sin\theta)\vec{v} + (z + \lambda z')\vec{k}.$$

Cette tangente coupe le plan $z = 0$ en A si et seulement si elle est non parallèle à ce plan, ce qui suppose $z' \neq 0$, et c'est pour $\lambda = -\frac{z}{z'}$, d'où :

$\overrightarrow{OA} = \left(\sin\theta - \frac{z}{z'}\cos\theta\right)\vec{u} - \frac{z}{z'}\sin\theta \cdot \vec{v}$, et il reste à traduire l'orthogonalité de $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$ et de $\overrightarrow{OA}$, donc la nullité du produit scalaire. C'est obtenu si :

$$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{z}{z'}\cos\theta\right) - \frac{z}{z'}\sin^2\theta = 0,$$

soit encore si et seulement si $\frac{z}{z'} = \cos\theta\sin\theta$.

L'équation différentielle $z'\cos\theta\sin\theta - z = 0$ s'intègre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ ou sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, sous la forme :

$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{\sin 2\theta},$$

on obtient $\ln|z| = \ln|\tan(\theta)| + \text{constante}$,

d'où $z = a\tan\theta$, la constante n'étant pas la même *a priori* pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ ou $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Si on veut un arc continu, on prendra la même constante, d'où des arcs Γ paramétrés par :

$x = \sin\theta\cos\theta$; $y = \sin^2\theta$, $z = a\tan\theta$, avec $a \neq 0$ pour avoir $z' \neq 0$.

Le cas $a = 0$ conduit à $z = z' = 0$ et A n'existe pas.

Il reste alors à trouver le lieu de A, qui se paramètre, compte tenu de $\frac{z}{z'} = \cos\theta\sin\theta$, par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta)\vec{u} - \cos\theta\sin^2\theta\vec{v}\\ &= \sin^3\theta\cdot\vec{u} - \cos\theta\sin^2\theta\vec{v}\\ &= \sin^3\theta(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}) - \cos\theta\sin^2\theta(-\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j})\\ &= 2\sin^3\theta\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin^2\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cdot\vec{j}.\end{aligned}$$

C'est encore, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'arc paramétré par :

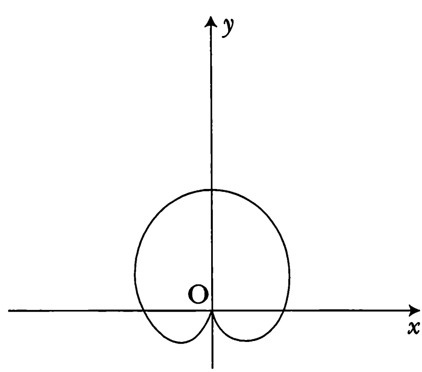
$$\overrightarrow{OA} = \sin2\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)\vec{i} - \cos2\theta\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)\vec{j}.$$

En posant $\theta' = 2\theta - \frac{\pi}{2}$, on a $\sin2\theta = \cos\theta'$,

$\cos2\theta = -\sin\theta'$, d'où, avec $\theta' \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, une paramétrisation en :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1+\sin\theta'}{2}(\cos\theta'\cdot\vec{i} + \sin\theta'\cdot\vec{j})$$

ou une équation polaire $\rho = \frac{1+\sin\theta'}{2}$, ce qui correspond à une cardioïde.



16.15. On va prendre le repère orthonormé d'origine F, tel que la conique Γ, d'excentricité e, soit dans le plan xOz, en ayant l'axe des z pour axe focal, et la droite $z = -p$ pour directrice associée à F.

Dans le plan xOz, un point M est sur Γ si et seulement si son projeté H sur la directrice D est tel que $MF^2 = e^2 MH^2$, d'où l'équation :

$$x^2 + z^2 = e^2(z+p)^2,$$

de Γ dans le plan xOz.

Faire tourner Γ autour de Oz, conduit à une nappe de révolution, d'équation, en coordonnées cylindriques :

$$r^2 + z^2 = e^2(z+p)^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ ou encore :}$$

$$x^2 + y^2 + z^2(1-e^2) - 2e^2pz - e^2p^2 = 0.$$

Si le plan P, de la section plane, a pour équation :

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

avec $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$, (on peut imposer $u^2 + v^2 + w^2 = 1$), un point Q(X, Y, Z) sera sur le cône S si et seulement si il existe λ réel tel que M défini par $\overrightarrow{FM} = \lambda\overrightarrow{FQ}$ soit sur $\Sigma \cap P$, soit encore *si et seulement si il existe λ tel que* :

$$\begin{cases} \lambda(uX + vY + wZ) + h = 0, \\ \lambda^2(X^2 + Y^2 + Z^2(1-e^2)) - 2e^2p\lambda Z - e^2p^2 = 0. \end{cases}$$

L'élimination de λ entre ces deux relations donnera une équation implicite de la nappe S, équation qui devra permettre de reconnaître une nappe de révolution.

Si $h = 0$, le plan P contient F, sommet du cône, donc les génératrices de S sont les droites de P qui pivotent autour de F : la nappe S est le plan P lui-même, qui est de révolution autour de la perpendiculaire à P en F.

Si $h \neq 0$, on doit avoir $uX + vY + wZ \neq 0$ pour que Q soit sur S, et alors $\lambda = -\dfrac{h}{uX + vY + wZ}$, et l'équation de S, obtenue en éliminant plutôt $\dfrac{1}{\lambda}$ dans :

$$X^2+Y^2+Z^2-e^2\left(Z^2+2p\frac{Z}{\lambda}+\frac{p^2}{\lambda^2}\right) = X^2+Y^2+Z^2-e^2\left(Z+\frac{p}{\lambda}\right)^2 = 0,$$

s'écrit :

$$X^2+Y^2+Z^2-e^2\left(Z-\frac{p}{h}(uX+vY+wZ)\right)^2 = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît une nappe de révolution d'axe la droite Δ passant par F, perpendiculaire au plan π d'équation $puX+pvY+(pw-h)Z = 0$.

En effet, si on prend un nouveau repère d'origine F, orthonormé, d'axe des z' dirigé par $\frac{\vec{W}}{\|\vec{W}\|}$ avec $\vec{W}$ de composantes $pu, pv, pw-h$ dans l'ancien repère, les coefficients $\frac{pu}{\|\vec{W}\|}, \frac{pv}{\|\vec{W}\|}, \frac{pw-h}{\|\vec{W}\|}$ sont ceux de la dernière colonne de la matrice de passage R, donc aussi ceux de la dernière ligne de $R^{-1} = {}^tR$, et en notant x', y', z' les coordonnées dans ce nouveau repère orthonormé, on a d'une part $z' = \frac{1}{\|\vec{W}\|}(puX+pvY+(pw-h)Z)$, et d'autre part $X^2+Y^2+Z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$, par conservation de la norme, d'où l'équation :

$$x'^2+y'^2+z'^2-\|\vec{W}\|^2\frac{e^2}{h^2}z'^2 = 0,$$

du cône S dans ce nouveau repère, ou encore :

$$x'^2+y'^2 = z'^2\left(\|\vec{W}\|^2\frac{e^2}{h^2}-1\right),$$

ce qui montre que les sections par les plans $z' = \text{constante}$ sont des cercles, la condition $\|\vec{W}\|^2 e^2 - h^2 > 0$ traduisant en fait l'existence de la section plane de Σ par P.

16.16. Si on suppose les coordonnées x, y, z d'un point M de la nappe, fonctions de classe C^1 de u et v, le plan tangent en M à la nappe régulière, a sa direction engendrée par les vecteurs $\overrightarrow{\dfrac{\partial m}{\partial u}}$ et $\overrightarrow{\dfrac{\partial m}{\partial v}}$.

Avec $\vec{V} = u^2\vec{i} + v^2\vec{j} + (1-u-v)^2\vec{k}$, vecteur normal au plan P dont on se donne l'équation, P sera le plan tangent en M si et seulement si on a $M \in P$ et $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\dfrac{\partial m}{\partial u}} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\dfrac{\partial m}{\partial v}} = 0$, ce qui traduit le fait que P passe par M en ayant la direction que doit avoir tout plan tangent qui se respecte.

Les fonctions x, y et z, (fonctions de u et v), doivent donc vérifier les trois relations :

(1) $\quad u^2x + v^2y + (1-u-v)^2z = 1,$

(2) $\quad u^2\dfrac{\partial x}{\partial u} + v^2\dfrac{\partial y}{\partial u} + (1-u-v)^2\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0,$

(3) $\quad u^2\dfrac{\partial x}{\partial v} + v^2\dfrac{\partial y}{\partial v} + (1-u-v)^2\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0.$

En dérivant (1) par rapport à u, et compte tenu de (2), on obtient :

$$2ux - 2(1-u-v)z = 0,$$

et en la dérivant par rapport à v, compte tenu de (3), il vient :

$$2vy - 2(1-u-v)z = 0.$$

On doit donc avoir $ux = vy = (1-u-v)z$. Si on note λ cette valeur commune, reportée dans (1), on a :

$$u\lambda + v\lambda + (1-u-v)\lambda = 1, \text{ d'où } \lambda = 1,$$

ce qui conduit à la représentation paramétrique :

$$x = \frac{1}{u},\ y = \frac{1}{v},\ z = \frac{1}{1-u-v}, \text{ de la nappe.}$$

Comme on a procédé par implications, (on a dérivé (1)), il faut vérifier si la solution convient. On a :

$$\overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial u}} \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{u^2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{(1-u-v)^2} \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial v}} \begin{vmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{v^2} \\ \dfrac{1}{(1-u-v)^2} \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial v}} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2(1-u-v)^2} \\ \dfrac{1}{u^2(1-u-v)^2} \\ \dfrac{1}{u^2v^2} \end{vmatrix}$$

donc les composantes de $\vec{W} = u^2v^2(1-u-v)^2\overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial v}}$ sont :

$$u^2, v^2, (1-u-v)^2,$$

et l'équation du plan tangent en m devient :

$$\left(x - \frac{1}{u}\right)u^2 + \left(y - \frac{1}{v}\right)v^2 + \left(z - \frac{1}{1-u-v}\right)(1-u-v)^2 = 0,$$

soit encore :

$$u^2x + v^2y + (1-u-v)^2z - u - v - 1 + u + v = 0 :$$

c'est bien l'équation de l'énoncé.

16.17. Le plus simple est de prendre un nouveau repère orthonormé $(O ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, avec $\vec{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ qui dirige la droite D.

En prenant pour $\vec{I}$ le vecteur $\vec{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, on aura :

$$\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Soient (X, Y, Z) les coordonnées dans ce nouveau repère, d'un point M de coordonnées (x, y, z) dans l'ancien repère, on a :

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}},$$

$$y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}},$$

$$z = \frac{-2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}},$$

donc les équations de Γ dans le nouveau repère sont :

$$\begin{cases} Z = \sqrt{2}Y, \\ \left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} - \frac{X}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3a\left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{X}{\sqrt{2}}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} - \frac{X}{\sqrt{2}}\right) = 0. \end{cases}$$

Cette dernière équation s'écrit encore :

$$2\left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}}\right)^3 + 6\left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}}\right)\frac{X^2}{2} + 3a\left(\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}}\right)^2 - 3a\frac{X^2}{2} = 0.$$

Avec $Z = \sqrt{2}Y$, cette équation se simplifie. On a :

$\frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Y = \frac{3}{\sqrt{6}}Y = \sqrt{\frac{3}{2}}Y$, donc l'équation devient :

$$3\sqrt{\frac{3}{2}}Y^3 + 3\sqrt{\frac{3}{2}}YX^2 + \frac{9a}{2}Y^2 - 3a\frac{X^2}{2} = 0,$$

et après simplification par $\frac{3}{2}$, on obtient les équations de Γ :

$$\begin{cases} Z = \sqrt{2}Y \\ \sqrt{6}Y^3 + \sqrt{6}YX^2 + 3aY^2 - aX^2 = 0, \end{cases}$$

dans le nouveau repère.

Un point $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ sera sur la nappe de révolution S cherchée si et seulement si, en notant H_1 et P_1 les intersections du plan $Z = Z_1$ avec l'axe des Z et Γ respectivement, on a $H_1M_1^2 = H_1P_1^2$.

On a $H_1 : (0, 0, Z_1)$, donc $H_1M_1^2 = X_1^2 + Y_1^2$. Quant aux coordonnées de P_1, elles seront du type (X, Y, Z_1), avec X et Y tels que : $\sqrt{2}Y = Z_1$, donc $Y = \frac{Z_1}{\sqrt{2}}$, et :

$$\sqrt{6}Y^3 + \sqrt{6}YX^2 + 3aY^2 - aX^2 = 0, \text{ d'où :}$$

$$X^2(\sqrt{6}Y - a) + \sqrt{6}Y^3 + 3aY^2 = 0.$$

C'est encore : $X^2(a - \sqrt{6}Y) = Y^2(3a + \sqrt{6}Y)$, donc $\sqrt{6}Y = a$ est exclu, le deuxième membre n'étant alors pas nul.

On a $X^2 = \dfrac{Z_1^2}{2}\dfrac{(3a + \sqrt{3}Z_1)}{(a - \sqrt{3}Z_1)}$ et $Y^2 = \dfrac{Z_1^2}{2}$,

et l'équation de la nappe S devient, dans le nouveau repère

$$X_1^2 + Y_1^2 = \frac{Z_1^2}{2}\left(\frac{3a + \sqrt{3}Z_1}{a - \sqrt{3}Z_1} + 1\right) = \frac{Z_1^2}{2}\left(\frac{4a}{a - \sqrt{3}Z_1}\right),$$

ou encore :

$$(a - \sqrt{3}Z_1)(X_1^2 + Y_1^2) - 2aZ_1^2 = 0.$$

Pour repasser dans l'ancien repère, et compte tenu de l'égalité $x^2 + y^2 + z^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$, (conservation de la norme), on écrit l'équation de S sous la forme :

$$(a - \sqrt{3}Z)(X^2 + Y^2 + Z^2) + \sqrt{3}Z^3 - 3aZ^2 = 0,$$

et comme la dernière ligne de la matrice $P^{-1} = {}^tP$, (P matrice de passage) est la dernière colonne de P, on a

$$Z = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}.$$

L'équation de S est donc :

$$(a - x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{(x + y + z)^3}{3} - a(x + y + z)^2 = 0,$$

dans l'ancien repère.

16.18. L'arc Γ est l'intersection d'un cylindre elliptique de génératrices parallèles à Oz et d'un plan contenant Oy, non parallèle à Ox : c'est une ellipse. Elle peut se paramétrer par :

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos\theta), \\ y = b\sin\theta, \\ z = ma(1 + \cos\theta). \end{cases}$$

Un point $M(X, Y, Z)$ sera sur la nappe S de révolution autour de Oz engendrée par Γ si et seulement si le plan de cote Z coupe Γ en un point $m(x, y, z)$, tel que :

$$z = Z \text{ et } x^2 + y^2 = X^2 + Y^2.$$

Comme z varie de 0 à $2ma$, (on suppose $a > 0$ et $m > 0$), on doit donc avoir $Z \in [0, 2ma]$, d'où $\cos\theta = \dfrac{Z - ma}{ma}$, et la condition, pour θ associé :

$$a^2(1 + \cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta = X^2 + Y^2,$$

qui s'écrit encore, en coordonnées cylindriques :

$$\frac{Z^2}{m^2} + \left(b^2 - \frac{b^2}{m^2a^2}(Z - ma)^2\right) = X^2 + Y^2 = r^2.$$

La méridienne est donc donnée par :

$0 \leqslant Z \leqslant 2ma$, et

$$r^2 = Z^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2m^2}\right) + \frac{2b^2}{ma}Z,$$

dans un plan $(O\ ;\ r, Z)$.

Il s'agit donc d'une portion :

d'hyperbole si $a > b$;

de parabole si $a = b$;

d'ellipse si $a < b$, quoique, dans ce dernier cas, on puisse se demander si on n'a pas l'ellipse entière. Eh bien non.

On peut mettre l'équation en (r, Z) de la conique sous forme canonique. On a :

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2m^2}\left(Z^2 - \frac{2b^2am}{b^2 - a^2}Z\right) + r^2 = 0, \text{ ou encore :}$$

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2m^2}\left(Z - \frac{b^2am}{b^2 - a^2}\right)^2 + r^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2},$$

et sous cette forme, on a forcément :

$$\frac{b^2-a^2}{a^2m^2}\left(Z-\frac{b^2am}{b^2-a^2}\right)^2 \leqslant \frac{b^4}{b^2-a^2}, \text{ soit :}$$

$$\left|Z-\frac{b^2am}{b^2-a^2}\right| \leqslant \frac{b^2am}{b^2-a^2}\ , \text{ ou :}$$

$$-\frac{b^2am}{b^2-a^2} \leqslant Z-\frac{b^2am}{b^2-a^2} \leqslant \frac{b^2am}{b^2-a^2},$$

et Z doit être tel que :

$$0 \leqslant Z \leqslant 2am\frac{b^2}{b^2-a^2},$$

pour décrire toute l'ellipse. La cote maximum est donc $2am \cdot \frac{b^2}{b^2-a^2}$ sur l'ellipse, c'est supérieur à $2am$, cote maximum permise sur la nappe de révolution. Il faut donc se contenter d'un arc d'ellipse.

16.19. L'équation étant homogène, la nappe est conique de sommet O. Elle est symétrique par rapport à xOy, (paire en z) et la section par un plan $z =$ constante est une hyperbole équilatère, dégénérée en les deux axes, des x et des y, pour $z = 0$.

Le solide D est donné par les conditions $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant 1$ et $|z| \leqslant \sqrt{2xy}$. Par symétrie par rapport à xOy, on gardera la condition $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{2xy}$, et en intégrant d'abord, pour (x, y) dans $\Omega = \{(x, y)\ ;\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, \sqrt{y} \leqslant 1-\sqrt{x}\}$, par rapport à z, on a :

$$V = 2\iint_\Omega \left(\int_0^{\sqrt{2xy}} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$= 2\int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{2xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x,$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^3 \mathrm{d}x,$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{x} - 3x + 3x^{\frac{3}{2}} - x^2\right)\mathrm{d}x,$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{6}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{90} = \frac{2\sqrt{2}}{45} \text{ unités de volume.}$$

16.20. La nappe S est un hyperboloïde à une nappe. On sait, (ou on doit savoir) que ce type de quadrique est doublement réglée, donc par m point de S passent deux droites distinctes D et Δ. Les tangentes en m à Δ et D sont Δ et D, qui sont donc dans le plan tangent en m à S, m étant point régulier sur S.

Comme enfin l'intersection de P et de S est une conique, c'est l'hyperbole dégénérée formée de ces deux droites : d'où $P \cap S = D \cup \Delta$.

Je vais redétailler un peu tout cela, le raisonnement pouvant aussi se faire pour un paraboloïde hyperbolique, nappe également doublement réglée.

Soit $m(\alpha, \beta, \gamma)$ sur S. On ne peut pas avoir $\alpha = \beta = \gamma = 0$, l'équation $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ n'étant pas alors vérifiée. Donc le vecteur gradient de f en m, de composantes $2\alpha, 2\beta, -2\gamma$ n'est pas nul : m est régulier sur S et on a un plan tangent P, d'équation :

$$\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) - \gamma(z-\gamma) = 0,$$

ou encore, comme $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1$:

$$\alpha x + \beta y - \gamma z - 1 = 0.$$

Pour chercher l'intersection de S et de P, on peut effectuer un changement de repère de façon que $\alpha x + \beta y - \gamma z$ soit proportionnel à une nouvelle coordonnée, Z par exemple, si bien que le plan P aura une équation Z = constante dans ce repère, disons $Z = h$.

Comme x, y et z seront des formes linéaires, (ou affines si on change aussi d'origine) en X, Y, Z, l'équation en X, Y, Z de S dans ce nouveau repère sera du second degré en X, Y, Z, notons la $\varphi(X, Y, Z) = 0$, et, dans le plan $P : Z = h$, la courbe $\Gamma = P \cap S$ aura pour équation $\varphi(X, Y, h) = 0$.

Dans le cas général d'une nappe quelconque, elle serait formée de droites si elle se factorise en facteurs du premier degré.

Ici, φ est du second degré, donc Γ est une conique, non vide car elle contient m.

Si on montre que par m il passe deux droites sur S, ces deux droites seront leurs propres tangentes, et la réunion de ces deux droites étant dans $P \cap S$, et étant une conique, (dégénérée mais conique quand même) ce sera $P \cap S$.

On écrit l'équation de S sous la forme :

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2, \text{ ou } (x-z)(x+z) = (1-y)(1+y),$$

et on considère les droites D_λ :

$$\begin{cases} x - z = \lambda(1-y) \\ \lambda(x+z) = 1+y. \end{cases}$$

Si m, (α, β, γ) est tel que $\beta \neq 1$, avec $\lambda = \dfrac{\alpha-\gamma}{1-\beta}$, la première équation est vérifiée par m, ainsi que la deuxième qui donne :

$$\frac{\alpha-\gamma}{1-\beta}(\alpha+\gamma) = 1+\beta, \text{ ou encore } \alpha^2 - \gamma^2 = 1 - \beta^2, \text{ ce qui est vrai.}$$

Donc m est sur D_λ, qui est une droite car le vecteur :

$$\overrightarrow{V_\lambda} = \begin{vmatrix} 1 \\ \lambda \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \lambda \\ -1 \\ \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 \\ -2\lambda \\ -(1+\lambda^2) \end{vmatrix}$$ est non nul, et cette droite est contenue dans S, l'équation de S étant vérifiée.

Si $\beta = 1$, on a $\alpha^2 - \gamma^2 = 0$, donc $\alpha = \gamma$ ou $\alpha = -\gamma$, et m est sur l'une des deux droites d'équations : ($y = 1$ et $x = z$), ou ($y = 1$ et $x = -z$), elles aussi dans S.

On peut aussi considérer les droites Δ_μ d'équations :

$$\begin{cases} x - z = \mu(1+y) \\ \mu(x+z) = 1-y, \end{cases}$$

de vecteur directeur $\overrightarrow{W_\mu} = \begin{vmatrix} 1 \\ -\mu \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \mu \\ 1 \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mu^2+1 \\ -2\mu \\ 1+\mu^2 \end{vmatrix}$,

non nul : ce sont des droites de S.

Pour $\beta \neq -1$, le point m est sur Δ_μ, pour $\mu = \dfrac{\alpha-\gamma}{1+\beta}$, et pour $\beta = -1$, on a $\alpha^2 = \gamma^2$, donc m est sur l'une des deux droites d'équations :

$(y = -1, x = z)$ ou $(y = 1, x = -z)$, toutes les deux étant contenues dans S.

Il reste à vérifier si les droites de chaque famille contenant m sont distinctes.

Pour cela on peut calculer $\overrightarrow{V_\lambda} \wedge \overrightarrow{W_\mu}$, et, sauf erreur, on trouve :

$$\overrightarrow{V_\lambda} \wedge \overrightarrow{W_\mu} = \begin{vmatrix} -2(\lambda+\mu)(1+\lambda\mu) \\ 2(\lambda+\mu)(\mu-\lambda) \\ 2(\mu+\lambda)(1-\lambda\mu) \end{vmatrix}$$

Compte tenu de $\lambda = \dfrac{\alpha-\gamma}{1-\beta}$, si $\beta \neq 1$ et $\mu = \dfrac{\alpha-\gamma}{1+\beta}$ pour $\beta \neq -1$, on peut dire que, pour $\beta \neq 1$ et $\beta \neq -1$, on a :

$$\lambda + \mu = (\alpha-\gamma)\left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1+\beta}\right) = \frac{2(\alpha-\gamma)}{1-\beta^2} \neq 0 \text{ car}$$

$\beta^2 \neq 1 \Rightarrow \alpha^2 \neq \gamma^2$, d'où $\overrightarrow{V_\lambda} \wedge \overrightarrow{W_\mu}$ parallèle au vecteur de composantes $1+\lambda\mu$, $\lambda-\mu$, $-1+\lambda\mu$, vecteur non nul car on ne peut pas avoir à la fois $\lambda\mu = 1$ et $\lambda\mu = -1$.

Pour $\beta^2 \neq 1$, on a donc $P \cap S$ formé de deux droites distinctes. Pour $\beta = 1$, ou $\beta = -1$, il faudrait reprendre les calculs, mais on peut les éviter ici en remarquant que la nappe S est de révolution autour de Oz.

Si on effectue une rotation autour de Oz, le point m est image par cette rotation d'un point m' correspondant à $\beta' \neq 1$ et $\beta' \neq -1$ si l'angle de la rotation est assez petit. En m' le plan tangent coupe S suivant deux droites distinctes : il en sera de même en m.

16.21. (Cet exercice est à rapprocher de l'exercice 16.2, où, avec $r = e^{-t}$, on cherche des plans osculateurs normaux à la nappe.)

On suppose donc r et θ fonctions de classe C^2 d'un paramètre t inconnu, et avec $\vec{k}$ vecteur normal au plan tangent, on doit avoir $\overrightarrow{\dfrac{dM}{dt}}$ et $\overrightarrow{\dfrac{d^2M}{dt^2}}$ orthogonaux à $\vec{k}$, et indépendants, pour répondre à la question, avec un plan osculateur vraiment déterminé.

Sur la nappe on a :

$$\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial r}} : \left| \begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{array} \right. \text{ et } \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial \theta}} : \left| \begin{array}{l} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{array} \right., \text{ d'où } \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial r}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial \theta}} \left| \begin{array}{l} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{array} \right.,$$

donc tout point différent de l'origine est régulier sur la nappe, avec un plan tangent orthogonal à $\vec{k}$: $(\cos\theta, \sin\theta, -1)$.

Il est évident que $\overrightarrow{\dfrac{dM}{dt}} = \overrightarrow{\dfrac{\partial M}{\partial r}}\dot{r} + \overrightarrow{\dfrac{\partial M}{\partial \theta}}\dot{\theta}$ est orthogonal à $\vec{k}$, les deux vecteurs $\overrightarrow{\dfrac{\partial M}{\partial r}}$ et $\overrightarrow{\dfrac{\partial M}{\partial \theta}}$ l'étant.

Puis, $$\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}} = \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial r}}\ddot{r} + \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial \theta}}\ddot{\theta} + \overrightarrow{\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}}(\dot{r})^2 + 2\overrightarrow{\frac{\partial^2 M}{\partial r \partial \theta}}\dot{r}\dot{\theta} + \overrightarrow{\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2}}(\dot{\theta})^2$$

sera orthogonal à $\vec{k}$ si et seulement si $\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}}(\dot{r})^2 + 2\overrightarrow{\dfrac{\partial^2 M}{\partial r \partial \theta}}\dot{r}\dot{\theta} + \overrightarrow{\dfrac{\partial^2 M}{\partial \theta^2}}(\dot{\theta})^2$ l'est.

$$\text{On a : } \overrightarrow{\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}} = 0, \quad \overrightarrow{\frac{\partial^2 M}{\partial r \partial \theta}} = \left| \begin{array}{l} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{array} \right. ; \quad \overrightarrow{\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2}} = \left| \begin{array}{l} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.,$$

$$\text{d'où } \vec{k} \cdot \overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}} = \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2\sin\theta(\dot{r}\dot{\theta}) - r\cos\theta(\dot{\theta})^2 \\ 2\cos\theta(\dot{r}\dot{\theta}) - r\sin\theta(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= -r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2.$$

Comme on sait qu'il faut $r \neq 0$ pour avoir un point régulier sur la nappe, il nous reste $\dot{\theta} = 0$, soit θ = constante : les courbes cherchées sont en fait les génératrices rectilignes du cône S, (si on leur adjoint l'origine), mais leur plan osculateur n'est pas défini en fait : il est tout plan les contenant ! Voir 16.2.

16.22. Rappelons que pour un arc Γ birégulier, la binormale en un point M de Γ est la perpendiculaire en M au plan osculateur.

Elle est donc dirigée par $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}} \wedge \overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}$, si ces vecteurs sont indépendants, t paramétrant l'arc.

On peut ici paramétrer Γ par : $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = f(\theta)$, f fonction cherchée, sauf si Γ contient une partie de génératrice, mais dans ce cas l'arc n'est pas birégulier.

La binormale en M coupe D en Q si et seulement si, avec A de coordonnées $(a, 0, 0)$ sur D, on a $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{\frac{dM}{d\theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{d^2M}{d\theta^2}}$ dépendants.

Comme $\overrightarrow{AQ}$ est proportionnel à $\vec{k}$, on va traduire la nullité du produit mixte $\left(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{\frac{dM}{d\theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{d^2M}{d\theta^2}}, \vec{k}\right)$.

On a :

$$\overrightarrow{AM} : \begin{vmatrix} a(\cos\theta - 1) \\ a\sin\theta \\ f(\theta) \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{\frac{dM}{d\theta}} : \begin{vmatrix} -a\sin\theta \\ a\cos\theta \\ f' \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{\frac{d^2M}{d\theta^2}} : \begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ f'' \end{vmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}\theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{M}}{\mathrm{d}\theta^2}} \left| \begin{array}{l} a\cos\theta f'' + a\sin\theta f' \\ -a\cos\theta f' + a\sin\theta f'' \\ a^2 \end{array} \right. ,$$

et la condition cherchée, sous forme de déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} a(\cos\theta - 1) & a\cos\theta f'' + a\sin\theta f' & 0 \\ a\sin\theta & -a\cos\theta f' + a\sin\theta f'' & 0 \\ f(\theta) & a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne, après simplification par a^2, et en ordonnant :

$$f'(\cos\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta) + f''(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0,$$

ou encore :

$$f''\sin\theta + (1 - \cos\theta)f' = 0.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre en f', qui s'intègre sur tout intervalle où $\sin\theta$ ne s'annule pas, en :

$$f'(\theta) = \lambda e^{\int \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta}$$

Recherche d'une primitive : avec $t = \tan\frac{\theta}{2}$, d'où $2\mathrm{d}t = (1 + t^2)\mathrm{d}\theta$, et $\dfrac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} = \dfrac{1 - t^2 - (1 + t^2)}{2t} = -t$, on a :

$$\int \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int \frac{(-t)2\mathrm{d}t}{1 + t^2} = -\ln(1 + t^2),$$

$$= -\ln\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right) = -\ln\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \ln\cos^2\frac{\theta}{2},$$

d'où $f'(\theta) = \lambda\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\lambda}{2}(\cos\theta + 1)$,

et $f(\theta) = \dfrac{\lambda}{2}\sin\theta + \text{constante}.$

Les solutions sont donc obtenues pour les fonctions du type :

$$f(\theta) = \mu\sin\theta + z_0,$$

les arcs étant biréguliers puisque la troisième composante, a^2, de $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} \wedge \frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}$ n'est pas nulle.

16.23. Une sphère S, de centre O, de rayon $a > 0$, est de révolution autour de toute droite passant par son centre. Les loxodromies seront donc stables par toute rotation d'axe un diamètre de la sphère. On cherche les loxodromies relatives à l'axe Oz, en paramétrant la sphère par :

$$\begin{cases} x = a\cos t\cos\theta, \\ y = a\cos t\sin\theta, \\ z = a\sin t, \end{cases}$$

pour (t, θ) dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$.

En un point $m(t, \theta)$ de S, la méridienne est la courbe obtenue pour t variant, θ étant constant. Donc un vecteur tangent à la méridienne sera :

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} -\sin t\cos\theta, \\ -\sin t\sin\theta, \\ \cos t, \end{array} \right.$$

alors qu'un vecteur tangent à un arc quelconque peut être noté :

$$\overrightarrow{dm} \left| \begin{array}{l} -\sin t\cos\theta dt - \cos t\sin\theta d\theta, \\ -\sin t\sin\theta dt + \cos t\cos\theta d\theta, \\ \cos t dt, \end{array} \right.$$

la notation différentielle signifiant que pour l'instant, on n'a pas encore choisi si t sera fonction de θ, ou l'inverse, à moins que t et θ ne soient fonctions d'un troisième paramètre.

Les loxodromies d'angle α correspondent donc à la relation :

$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{dm})^2 = \|\vec{V}\|^2 \|\overrightarrow{dm}\|^2 \cos^2\alpha$, donc ici à :

$$[(\sin^2 t(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2 t)\mathrm{d}t$$
$$+ (\sin t \cos t \cos\theta \sin\theta - \sin t \cos t \sin\theta \cos\theta)\mathrm{d}\theta]^2$$
$$= 1 \cdot (\mathrm{d}t^2 + \cos^2 t \mathrm{d}\theta^2)\cos^2\alpha,$$

ou encore :

$$\mathrm{d}t^2 = \cos^2\alpha(\mathrm{d}t^2 + \cos^2 t \mathrm{d}\theta^2),$$

ce qui équivaut à :

$$\sin^2\alpha \mathrm{d}t^2 = \cos^2\alpha \cos^2 t \mathrm{d}\theta^2.$$

Si $\cos\alpha = 0$, on trouve $t =$ constante : c'est de la géographie, les « cercles parallèles » sont les trajectoires orthogonales aux cercles méridiens, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Écartons ce cas : on doit intégrer, avec $\varepsilon = 1$ ou -1, l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(\cos t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \tan\alpha .$$

En fait elle est à variable séparée et il s'agit d'une recherche de primitive : $\theta = \theta_0 + \varepsilon \tan\alpha \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Comme la constante θ_0 correspond à une rotation autour de Oz, puis pour $\theta_0 = 0$, le passage de $\varepsilon = 1$ à $\varepsilon = -1$ correspond à une symétrie par rapport au plan xOz, à une isométrie près conservant l'axe des z, on a toutes les loxodromies, pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, à partir du paramétrage :

$$\begin{cases} x = a\cos t \cos\left(\tan\alpha \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right), \\ y = a\cos t \sin\left(\tan\alpha \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right), \\ z = a\sin t. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$, on a le méridien particulier $x = a\cos t$, $y = 0$, $z = a\sin t$, donc on obtient tous les méridiens ce qui est cohérent avec la nature géométrique du problème posé.

16.24. La nappe S est un paraboloïde hyperbolique. Une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de Oz donne une équation du type :

$$2pz = X^2 - Y^2 .$$

Si on coupe S par un plan $x = \lambda$, on obtient une courbe Γ_λ, ayant deux équations implicites :

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ pz = \lambda y. \end{cases}$$

C'est donc une droite, intersection de deux plans, de vecteur directeur $\vec{V}$ avec :

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \lambda \\ -p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ p \\ \lambda \end{vmatrix}, \ p \text{ étant non nul.}$$

Pour chercher les trajectoires orthogonales aux droites Γ_λ, on suppose la nappe paramétrée en fonction de x et y, avec $z = \frac{1}{p}xy$, d'où pour x et y fonctions de t un vecteur tangent $\overrightarrow{W}(t)$ à une trajectoire orthogonale :

$$\overrightarrow{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}, \\ \dot{y}, \\ \frac{1}{p}(\dot{x}y + x\dot{y}), \end{vmatrix}$$

qui doit être orthogonal au vecteur tangent à la courbe Γ_λ passant par le point de paramètres x et y de la nappe, donc, (attention à la condition $x = \lambda$), au vecteur :

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} 0 \\ p \\ x \end{vmatrix} .$$

On doit donc avoir la relation :

$$p\dot{y} + \frac{1}{p}x(\dot{x}y + x\dot{y}) = 0,$$

ou, en choisissant x comme paramètre, d'où $\dot{x} = 1$, et en cherchant y fonction de x, une relation qui s'écrit :

$$(p^2 + x^2)y' + xy = 0 .$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, de solution générale :

$$y(x) = \frac{\mu}{\sqrt{p^2 + x^2}},$$

d'où les trajectoires orthogonales cherchées, qui sont les courbes paramétrées par :

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \dfrac{\mu}{\sqrt{p^2 + x^2}}, \\ z = \dfrac{\mu}{p}\dfrac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}}. \end{cases}$$

On peut remarquer que $y^2 + z^2 = \dfrac{\mu^2}{p^2 + x^2}\left(\dfrac{x^2}{p^2} + 1\right) = \dfrac{\mu^2}{p^2}$: ces courbes sont les intersections du paraboloïde S et d'une famille de cylindres de révolution d'axe Ox.

16.25. Un point M, de coordonnées x, y, z, sera sur la nappe S cherchée si et seulement si le cercle C d'axe D passant par M coupe Γ. Comme Γ est dans le plan $z = 0$, c'est donc un des points d'intersection de C et du plan $z = 0$ qui doit être sur Γ, (et les deux y seront).

Le cercle C a pour équations :

$$\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2 = x^2+y^2+z^2, \\ X-x+Y-y+Z-z = 0. \end{cases}$$

(Si P a pour coordonnées (X, Y, Z) on traduit $OP^2 = OM^2$ et $\overrightarrow{PM}$ orthogonal à D.)

Les intersections avec le plan horizontal sont donc les points de coordonnées $(X, Y, 0)$ avec :

$$\begin{cases} X+Y = x+y+z, \\ X^2+Y^2 = x^2+y^2+z^2. \end{cases}$$

On doit alors écrire que P est sur Γ, donc que $X^4+Y^4 = 1$.

Or $X^4+Y^4 = (X^2+Y^2)^2-2X^2Y^2$, et par ailleurs :

$$2XY = (X+Y)^2-X^2-Y^2$$

On a donc $2XY = (x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$, d'où la relation :

$$1 = (x^2+y^2+z^2)^2-\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]^2,$$

qui traduit l'appartenance de M à S. Cela s'arrange encore en :

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^4-2 = 0.$$

Si on prend un nouveau repère $(O\,;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, avec $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, on aura $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, (troisième colonne de la matrice orthogonale P donne la troisième ligne de P^{-1}), et :

$$x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2,$$

d'où, dans un tel repère, une équation de S sous la forme

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2+6Z^2(X^2+Y^2+Z^2)-9Z^4-2 = 0.$$

Dans un plan $(O\,;r, Z)$, avec $r^2 = X^2+Y^2$, une méridienne aura pour équation implicite :

$$(r^2+Z^2)^2+6Z^2(r^2+Z^2)-9Z^4-2 = 0.$$

16.26. La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{V}$: $(1, 1, 1)$. Elle coupe le plan du cercle Γ, $z = 0$, au point A de coordonnées $(0, 0, 0)$: A est bien sur Γ.

Le cylindre S cherché est l'ensemble des droites de vecteur directeur $\vec{V}$ passant par un point m : $(x, y, 0)$ de Γ.

Un tel point M a des coordonnées du type :

$$\begin{cases} X = x + \lambda, \\ Y = y + \lambda, \\ Z = \lambda, \end{cases}$$

et la relation $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, avec $x = X - Z$ et $y = Y - Z$, donne l'équation cherchée :

$$(X - Z)^2 + (Y - Z)^2 - 2a(X - Z) = 0,$$

du cylindre.

16.27. a) Si on écrit l'équation de la nappe sous la forme :

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + a^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2a^2x^2 = 0,$$

en posant $u = x^2 + y^2 + z^2$ et $v = x$, on a une équation du type :

$$\varphi(u, v) = 0, \text{ avec } \varphi(u, v) = u^2 + a^2u - 2a^2v^2.$$

C'est donc une nappe de révolution, d'axe perpendiculaire au plan d'équation $x = 0$, passant par l'origine, centre de la sphère d'équation $u =$ constante : l'axe de la nappe est l'axe des x.

De plus, en coordonnées sphériques, avec $x = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = \rho\cos\theta\sin\varphi$ et $z = \rho\sin\theta$, on a l'équation :

$$\rho^4 + a^2\rho^2 - 2a^2\rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi = 0, \text{ d'où :}$$

$$\rho^2 = a^2(2\cos^2\theta\cos^2\varphi - 1),$$

donc $\rho^2 \leqslant 3a^2$, et même, $\rho^2 \leqslant a^2$: la nappe est bornée.

b) La méridienne est, par exemple dans le plan $z = 0$, qui contient l'axe, la courbe Γ d'équation :

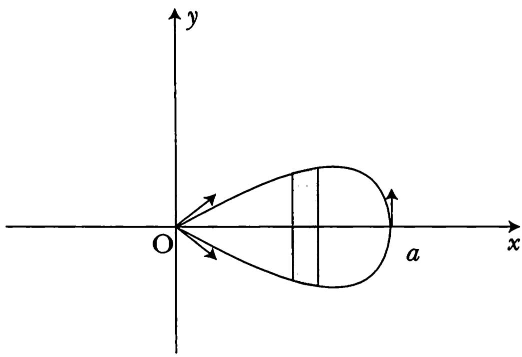
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

ou, en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan xOy :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta .$$

La courbe est obtenue pour θ variant dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, modulo π, elle est bornée, ce qui redonne une nappe bornée.

c) Par raison de symétrie par rapport au plan yOz, le volume sera le double de celui de la portion de solide située dans le demi espace $x \geqslant 0$.



Si on intègre, pour x fixé, en y et z, on a un disque de rayon $|y|$, donc d'aire πy^2, avec :

$$y^4 + y^2(2x^2 + a^2) + x^4 - a^2x^2 = 0 .$$

C'est un trinôme du second degré en y^2, de discriminant :

$$\Delta = (2x^2 + a^2)^2 - 4(x^4 - a^2x^2) = 8a^2x^2 + a^4 ,$$

donc en ne gardant que la racine positive, on a :

$$y^2 = \frac{-(2x^2 + a^2) + \sqrt{a^4 + 8a^2x^2}}{2}, \text{ ce qui donne :}$$

$$V = 2\int_0^a \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^a (\sqrt{a^4 + 8a^2x^2} - 2x^2 - a^2)\mathrm{d}x,$$

$$= -\pi\left(2\frac{a^3}{3} + a^3\right) + \pi a^2 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{8}{a^2}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer la dernière intégrale, on peut effectuer le changement de variable $\frac{2\sqrt{2}}{a}x = \operatorname{sh}t$, ou intégrer par parties puis utiliser une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ en $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

Faisons le changement de variable. On a $\mathrm{d}x = \frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{ch}t\mathrm{d}t$ d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \pi a^2\int_0^a\sqrt{1+\frac{8}{a^2}x^2}\,\mathrm{d}x = \pi a^2\int_0^{\operatorname{Arg\,sh}(2\sqrt{2})}\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{ch}^2t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi a^3}{2\sqrt{2}}\int_0^{\operatorname{Arg\,sh}2\sqrt{2}}\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2t+1)\mathrm{d}t = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\left[\frac{\operatorname{sh}2t}{2}+t\right]_0^{\operatorname{Arg\,sh}2\sqrt{2}}\\
&= \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}[2\sqrt{2}\sqrt{1+8}+\operatorname{Arg\,sh}2\sqrt{2}] = \pi a^3\left(\frac{3}{2}+\frac{\operatorname{Arg\,sh}2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right),
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\mathrm{V} = \pi a^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{\operatorname{Arg\,sh}2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right).$$

Comme cela fait deux fois que je trouve le même résultat, il y a une certaine présomption d'exactitude. Mais je n'en jurerai pas !

16.28. S est un paraboloïde elliptique, de révolution en fait autour de l'axe des z. Il est engendré par la rotation de la parabole d'équation $x^2 = 2pz$, (dans le plan xOz), autour de son axe focal, Oz, et son intérieur est la zone contenant le demi-axe Oz.

Soit A : (α, β, γ) un point extérieur à S, un point M : (x, y, z) sera sur le cône circonscrit à S, de sommet A, si et seulement si la droite (AM) est tangente à S. Comme on peut paramétrer affinement cette droite, elle sera tangente si et seulement si l'équation aux paramètres des points d'intersection, qui est de degré 2, a une racine double.

On paramètre (AM) par :

$$\mathrm{X} = \alpha+t(x-\alpha)\,,\ \mathrm{Y} = \beta+t(y-\beta)\,,\ \mathrm{Z} = \gamma+t(z-\gamma)\ ;$$

donc l'équation aux paramètres des points d'intersection devient :

$$t^2((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2)+2t(\alpha(x-\alpha)+\beta(y-\beta)-p(z-\gamma))$$
$$+\alpha^2+\beta^2-2p\gamma = 0.$$

Le discriminant réduit nul, cela donne :

$$(\alpha(x-\alpha)+\beta(y-\beta)-p(z-\gamma))^2-(\alpha^2+\beta^2-2p\gamma)((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2)=0$$

et c'est l'équation du cône circonscrit C cherché : on a bien une équation homogène en $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$.

La recherche du contour apparent Γ peut se faire en disant que $\Gamma = S\cap C$: les équations sont peu maniables.

On peut aussi dire qu'avec M : (x, y, z) sur S cette fois, la droite (AM) est tangente en M à S. Si on la paramètre par :

$$X = x+t(x-\alpha),\ Y = y+t(y-\beta) \text{ et } Z = z+t(z-\gamma),$$

on doit donc avoir $t = 0$ racine double de l'équation aux paramètres des points d'intersection de (AM) et de S.

Cette équation s'écrit cette fois :

$$t^2[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]+2t(x(x-\alpha)+y(y-\beta)-p(z-\gamma))$$
$$+x^2+y^2-2pz = 0,$$

et M de S sera sur le contour apparent Γ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2pz = 0, \\ x^2+y^2-pz-(\alpha x+\beta y-p\gamma) = 0. \end{cases}$$

La première traduit l'appartenance de M à S, et la deuxième, compte-tenu de $x^2+y^2-pz = pz$, s'écrit encore :

$\alpha x+\beta y-pz-p\gamma = 0$: c'est l'équation d'un plan, donc le contour apparent est ici une conique.

16.29. La nappe S est un paraboloïde de révolution autour de Oz. On le paramètre en coordonnées cylindriques par :

$$M : x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = \frac{r^2}{2a}.$$

On cherche un arc Γ, régulier de classe C^1, sur S, en se donnant r fonction de θ. On introduit par ailleurs un repère mobile en posant :

$$\overrightarrow{u(\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{v(\theta)} = \begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{u} + \frac{r^2}{2a}\vec{k}$, d'où :

$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = r'\vec{u} + r\vec{v} + \frac{rr'}{a}\vec{k}$, et la condition d'appartenance de M à une courbe cherchée devient :

$$\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} \cdot \vec{k}\right)^2 = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\|^2 \cos^2\alpha \text{, soit ici :}$$

$$\frac{(rr')^2}{a^2} = \left(r^2 + r'^2 + \frac{(rr')^2}{a^2}\right)\cos^2\alpha \text{, ou encore :}$$

$$\frac{r^2 r'^2}{a^2}\sin^2\alpha - r'^2\cos^2\alpha = r^2\cos^2\alpha .$$

Pour $\cos\alpha = 0$, on trouve $r' = 0$, $r =$ constante, ce qui donne $z =$ constante : on trouve les cercles « parallèles » dont les tangentes sont orthogonales à l'axe de la nappe.

Pour $\cos\alpha \neq 0$, l'équation s'écrit encore :

$$r'^2\left(\frac{r^2}{a^2}\tan^2\alpha - 1\right) = r^2 \text{, et conduit à l'équation différentielle :}$$

$$d\theta = \frac{\varepsilon}{a}(r^2\tan^2\alpha - a^2)^{1/2} \; \frac{dr}{r},$$

avec $\varepsilon = 1$ ou -1, et la condition $|r| > \frac{a}{|\tan\alpha|}$.

Comme $\frac{dr}{r} = \frac{rdr}{r^2}$, en posant $t^2 = r^2\tan^2\alpha - a^2$, avec $t > 0$, on a $2tdt = 2rdr\tan^2\alpha$, d'où l'équation :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta &= \frac{\varepsilon}{a}\ t\ \frac{t\mathrm{d}t}{\tan^2\alpha}\cdot\frac{\tan^2\alpha}{t^2+a^2}, \\ &= \frac{\varepsilon}{a}\frac{t^2+a^2-a^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{a}\left(1-\frac{a^2}{t^2+a^2}\right)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où :

$\theta = \theta_0+\varepsilon\left(\frac{t}{a}-\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}\right)$, avec $t = \sqrt{r^2\tan^2\alpha-a^2}$, soit finalement, non pas des arcs avec r fonction de θ, mais avec θ fonction de r, vérifiant :

$$\theta = \theta_0+\varepsilon\left(\frac{\sqrt{r^2\tan^2\alpha-a^2}}{a}-\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{r^2\tan^2\alpha-a^2}}{a}\right),$$

ε étant égal à 1 ou -1.

16.30. L'équation de S est homogène, donc S est un cône de sommet O.

Si on coupe par un plan parallèle à un plan de coordonnées, (par exemple $z = k$), on obtient une hyperbole équilatère d'équations :

$$\begin{cases} z = k, \\ 2xy-kx+2ky = 0, \end{cases}$$

les asymptotes, (ici $z = k$ et $y = \frac{k}{2}$ ou $z = k$ et $x = -k$), étant parallèles aux axes de coordonnées.

Si on coupe par le plan P : $x+y+z = 0$, passant par le sommet O du cône, et si la section n'est pas réduite à $\{O\}$, avec $M \in (S-\{O\})\cap P$, la droite (OM) est contenue dans le cône et dans P. On doit s'attendre à une droite double, deux droites distinctes, ou à $\{O\}$.

On peut écrire le système vérifié par les coordonnées de M, point de $S\cap P$, sous la forme :

$$\begin{cases} 2y(x+z)-xz = 0, \\ x+z+y = 0, \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x+y+z = 0, \\ 2y^2 + xz = 0. \end{cases}$$

Mais $4xz = (x+z)^2 - (x-z)^2$ est toujours vrai, donc avec $x+z = -y$, le système s'écrit encore, en multipliant par 4 la deuxième équation :

$$\begin{cases} x+y+z = 0, \\ 8y^2 + y^2 - (x-z)^2 = 9y^2 - (x-z)^2 = 0, \end{cases}$$

et en factorisant la dernière équation, on obtient les deux droites d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ 3y + x - z = 0 \end{cases}, \text{ ou } \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 3y - x + z = 0 \end{cases}.$$

Recherche de cercles sur la nappe.

Un point M est sur la nappe si et seulement si on a :

$$\Phi(\overrightarrow{OM}) = 2xy - xz + 2yz = 0 :$$

c'est dire que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est dans le cône isotrope de la forme quadratique ϕ.

Si un plan P, dont l'équation affine peut s'écrire :

$$f(\overrightarrow{OM}) = h = \text{constante},$$

avec f forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, est tel que $\Gamma = S \cap Q$ est un cercle, c'est que la restriction de la forme quadratique à la direction π du plan P admet une décomposition en carrés, dans une base orthonormée, avec deux coefficients égaux, et si μ est cette valeur commune, la restriction de ϕ à π est du type $\mu\overrightarrow{OM}^2$.

Autrement dit, sur $\pi = \text{Ker} f$ on doit avoir μ réel tel que la forme quadratique $\psi : \vec{X} \rightsquigarrow \phi(\vec{X}) - \mu\|\vec{X}\|^2$ soit nulle sur Ker f : cette forme quadratique doit donc se factoriser et f doit être l'un des facteurs.

On doit donc avoir ψ de rang 1 ou 2.

Si on note A la matrice symétrique de ϕ dans la base conique, $A - \mu I_3$ est celle de ψ, qui doit être de rang deux au plus, factorisable. Donc μ

doit être l'une des valeurs propres de A, et il restera à étudier la factorisation de ψ.

Ici, la matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de polynôme caractéristique :}$$

$$\chi_A(x) = -x^3 + \frac{9x}{4} - 1 = \frac{1}{4}(-4x^3 + 9x - 4).$$

En essayant les racines plus ou moins évidentes, en $\frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ rationnel irréductible, p divise 4 et q divise -4, ce qui conduit à voir que $\frac{1}{2}$ est racine. On a donc :

$$\chi_A(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right),$$

les valeurs propres sont donc $\frac{1}{2}$ et, $\frac{\sqrt{33}-1}{4}$ et $-\frac{\sqrt{33}+1}{4}$, et μ doit être une valeur propre.

Pour $\mu = \frac{1}{2}$, les valeurs propres de ψ, qui sont celles de $A - \frac{1}{2}I_3$, sont 0, $\frac{\sqrt{33}-3}{4}$ et $-\frac{\sqrt{33}+3}{4}$: ψ sera de rang deux, et c'est une différence de deux carrés, donc elle se factorise sous la forme fg avec f et g formes affines indépendantes dont les noyaux sont les directions des plans coupant S suivant un cercle.

Si $\mu = \frac{\sqrt{33}-1}{4}$, les valeurs propres non nulles de ψ sont $\frac{3-\sqrt{33}}{4}$ et $-\frac{\sqrt{33}}{2}$, toutes deux négatives : ψ ne se factorise pas.

Si $\mu = -\frac{\sqrt{33}+1}{4}$, les valeurs propres non nulles de ψ sont $\frac{3+\sqrt{33}}{4}$ et $\frac{\sqrt{33}}{2}$, toutes deux positives, là encore ψ ne se factorise pas.

Pour trouver les directions de plans, on va considérer ψ dans le repère de départ, on a :

$$\begin{aligned}
\psi(\overrightarrow{OM}) &= 2xy - xz + 2yz - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + x(2z - 4y)) + 2yz - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \\
&= -\frac{1}{2}(x + z - 2y)^2 + \frac{1}{2}(z - 2y)^2 + 2yz - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \\
&= \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}(x + z - 2y)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{3}y - x - z + 2y)(\sqrt{3}y + x + z - 2y).
\end{aligned}$$

Les plans $\mathscr{P}$ d'équations :

$x + z - (2 - \sqrt{3})y = h$, et $x + z - (2 + \sqrt{3})y = k$, avec $h \neq 0$, (et $k \neq 0$), sont donc les plans coupant le cône suivant un cercle. Si $h = 0$, ou $k = 0$, on a l'intersection réduite au sommet du cône.

16.31. Partons de M : (x, y, z) et cherchons des conditions pour que M soit sur la nappe Σ : ce sera le cas si et seulement si il existe un vecteur $\vec{V}$ non nul, de composantes (α, β, γ) tel que la droite D, passant par M, et dirigée par $\vec{V}$ soit :

1°) sécante avec Δ_0 et Δ_1,

2°) orthogonale à $\overrightarrow{OM}$.

La première condition peut se traduire par :
la cote du point d'intersection de D et du plan $X = 0$ est a, et :
la cote du point d'intersection de D et du plan $Y = 0$ est $-a$.

On paramètre D par :

$$\begin{cases} X = x + t\alpha, \\ Y = y + t\beta, \\ Z = z + t\gamma, \end{cases}$$

Cherchons l'intersection de D et du plan d'équation $X = 0$.

Si $\alpha \neq 0$, c'est pour $t = -\dfrac{x}{\alpha}$, la cote vaut alors $z - \dfrac{\gamma}{\alpha}x$, et on a la condition :

$$a\alpha = \alpha z - \gamma x\,,\ \text{ou}\ \alpha(a-z) + \gamma x = 0\,.$$

Si $\alpha = 0$, et si de plus $x = 0$, la droite D est dans le plan $X = 0$, donc elle coupe Δ_0, ou lui est parallèle. Et si $\gamma = 0$, la droite a des équations $X = \text{constante}$, $Z = \text{constante}$: elle est parallèle à Δ_0.

On peut donc dire que D « rencontre Δ_0 », (avec le parallélisme admis), si et seulement si on a :

$$\alpha(a-z) + \gamma x = 0\,.$$

De même, l'intersection de D et du plan $Y = 0$ est obtenue, pour $\beta \neq 0$, pour $t = -\dfrac{y}{\beta}$, d'où une cote $z - \dfrac{\gamma}{\beta}y$, et la condition :

$$-a\beta = \beta z - \gamma y\,,\ \text{ou}\ \beta(a+z) - \gamma y = 0\,,$$

avec, là encore, si $\beta = 0$, les cas $y = 0$ ou $\gamma = 0$ qui conduisent à D sécante ou parallèle à Δ_1.

Enfin, $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{V} = 0$ équivaut à $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, si bien que M est sur Σ si et seulement si on peut trouver un triplet (α, β, γ) non nul tel que :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ \alpha(a-z) + \gamma x = 0, \\ \beta(a+z) - \gamma y = 0, \end{cases}$$

ce qui revient à dire que ce système homogène en (α, β, γ) admet une solution non nulle, donc que son déterminant est nul.

C'est encore :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a-z & 0 & x \\ 0 & a+z & -y \end{vmatrix} = -x^2(a+z) - (a-z)(-y^2 - z(a+z)) = 0,$$

ou :

$$-x^2(a+z) + y^2(a-z) + z(a^2 - z^2) = 0\,,$$

équation implicite de Σ.

Si on coupe par un plan $z = h$, dans ce plan on a la courbe d'équation implicite :

$$x^2(a+h) - y^2(a-h) - h(a-h)(a+h) = 0 .$$

Si $h = 0$, il reste $a(x^2 - y^2) = 0$: on a les deux droites d'équations $x = y$, $z = 0$ et $x = -y$, $z = 0$.

Si $h = a$, il reste $x = 0$: c'est une droite, $(x = 0, z = a)$: on retrouve Δ_0.

Pour $h = -a$, on a $y = 0$ et $z = -a$: une droite, c'est Δ_1.

Pour $h \notin \{0, a, -a\}$, l'équation s'écrit :

$$\frac{x^2}{h(a-h)} - \frac{y^2}{h(a+h)} - 1 = 0 ,$$

et la nature de la conique dépend de la place de h par rapport à $-a$ et a.

Pour $h < -a$ ou $h > a$, on a l'ensemble $\varnothing$, les coefficients de x^2 et y^2 étant strictement négatifs.

Pour h dans $]-a, 0[$ on a $h(a-h) < 0$ et $-h(a+h) > 0$ c'est une hyperbole d'axe focal parallèle à Oy ;

pour h dans $]0, a[$, on a $h(a-h) > 0$ et $-h(a+h) < 0$: c'est une hyperbole d'axe focal parallèle à Ox cette fois.

CHAPITRE XVII

Formes différentielles, champs de vecteurs, intégrales multiples

Le calcul d'une intégrale curviligne : $\int_\Gamma \omega$, où ω est une forme différentielle de degré un, se fait en paramétrant l'arc Γ supposé de classe C^1 par morceaux, et si la forme ω est donnée par :

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z,$$

et l'arc paramétré par $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in [a, b]$, on a :

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t))f'(t) + Q(f, g, h)g'(t) + R(f, g, h)h'(t)]\mathrm{d}t.$$

Dans le cas d'un arc plan, R et h sont nuls.

Voyez en 17.12 un tel calcul, ainsi qu'en 17.14, 17.3.

Le plus souvent, les intégrales curvilignes sur des arcs plans se transforment en des intégrales doubles par la <u>*formule de Stockes ou de Green Riemann*</u> : cela dépend des auteurs :

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_\Omega (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

avec Ω partie bornée du plan, telle qu'on puisse lui appliquer la formule de Fubini, et Γ bord orienté de Ω, de façon que le domaine Ω soit « à gauche ». On note encore $\partial\Omega$ ce bord orienté.

Vous pouvez voir en 17.4, 17.5, 17.13 de tels calculs.

Il faut cependant se dire que bien souvent, le passage de l'intégrale curviligne à l'intégrale double, ou le passage réciproque, donnera des résultats, (voir 17.23, 17.24, 17.29), surtout dans des cas où l'on considère un domaine variable, et où l'on prend des limites.

Enfin, pour en terminer avec les intégrales curvilignes, ne pas oublier la possibilité de calculer l'aire d'un domaine Ω, de bord orienté $\partial\Omega$, par l'une des expressions :

$$S = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{\partial\Omega} x dy = -\int_{\partial\Omega} y dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x dy - y dx,$$

voire même :

$$S = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} r^2 d\theta .$$

Voir ainsi 17.11.

Signalons aussi le point de vue du physicien qui parlera de la circulation d'un champ de vecteurs, et qui remplacera l'expression forme exacte de degré un par champ de gradients, de circulation nulle sur un contour fermé, ou de circulation entre deux points A et B indépendante du chemin, comme le montre l'exercice 17.5. Voir aussi 17.30 et 17.31.

Dans le cas de la circulation d'un champ $V = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, le long d'un contour fermé Γ de l'espace, sur lequel s'appuie une nappe S, cette circulation est encore le flux du rotationnel de V à travers S. Ce résultat sert aux physiciens plus qu'au mathématicien. Attention aux questions d'orientation !

En ce qui concerne le calcul des intégrales doubles, le point de départ, c'est le *Théorème de Fubini* : si le domaine Ω sur lequel on calcule peut se définir de deux façons, par :

$$\Omega = \{(x, y) \; ; \; a \leqslant x \leqslant b \; ; \; \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}, \text{ ou :}$$

$$\Omega = \{(x, y) \; ; \; c \leqslant y \leqslant d \; ; \; \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\},$$

on aura :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

Dans cette formule, φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions bien honnêtes, sans difficultés et bizarreries.

Pour calculer une intégrale double on commence donc par représenter le domaine, pour voir s'il est plus facile d'intégrer d'abord en y ou en x, ceci dépendant de la fonction f mais aussi de la détermination des fonctions φ_1 et φ_2 ou ψ_1 et ψ_2.

Voir les exercices 17.1, 17.7, 17.8, 17.9, 17.16, 17.28...

Ne pas oublier les considérations de symétrie, si elles sont valables pour le domaine Ω et pour la fonction à intégrer en même temps ! Voir 17.1, 17.8, 17.17...

Enfin on peut avoir intérêt à fractionner le domaine Ω pour avoir des calculs plus simples, (17.10).

Le calcul d'une intégrale double se fait aussi par changement de variables : si on doit calculer $\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, et si on a un difféomorphisme $(x, y) = \phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$, tel que $\Omega = \phi(\mathrm{D})$, ϕ étant un difféomorphisme d'un ouvert contenant D sur un ouvert contenant Ω, on aura :

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_\mathrm{D} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot (\text{valeur absolue du jacobien de } \phi) \cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

le jacobien de ϕ étant le déterminant $\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$.

Cette valeur absolue vient de ce que, dans le calcul de l'intégrale double, on fait croître les variables, (x et y au départ, u et v ensuite) ce qui ne correspond pas forcément au transport de l'orientation du plan des (u, v) sur celle du plan des (x, y) par la différentielle, $\mathrm{d}\phi(u, v)$, qui a son déterminant de signe constant, difféomorphisme oblige.

Le changement le plus usuel est bien sûr celui en polaires, où le $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ donne $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ mais... uniquement si on a imposé $r > 0$.

Voir pour des changements de variable 17.15, 17.8, 17.10, 17.16, 17.17...

Il existe enfin la technique des **courbes de niveau**. Si le domaine Ω peut être la réunion des courbes C_k, d'équation implicite $u(x, y) = k$, pour k variant dans un intervalle $[a, b]$, et si, avec $\Omega_k = \bigcup_{r \in [a, k]} \mathrm{C}_r$, on sait calculer l'aire, $\mathscr{A}(k)$, de Ω_k, alors le calcul de :

$$\mathrm{I} = \iint_\Omega f(u(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

sera ramené à celui d'une intégrale simple.

En effet, si $\mathscr{A}(k)$ est une fonction dérivable en k, et si on pose :

$$\mathrm{I}(k) = \iint_{\Omega_k} f(u(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

on aura également $\mathrm{I}(k)$ dérivable et $\mathrm{I}'(k) = f(k)\mathscr{A}'(k)$ si la fonction $k \leadsto \mathscr{A}(k)$ est croissante, ($\mathrm{I}'(k) = -f(k)\mathscr{A}'(k)$ si elle est décroissante), d'où :

$$I = \int_a^b f(k)\mathscr{A}'(k)\mathrm{d}k\text{, (ou l'opposée).}$$

Voir l'exercice 17.27 à ce sujet.

Cette technique se généralise pour les intégrales triples, aux **nappes de niveau** : si une partie Ω est la réunion des nappes S_k d'équation implicite $f(x, y, z) = k$, pour k dans $[a, b]$, si le volume $\mathscr{V}(k)$ du domaine $\Omega_k = \bigcup_{r \in [a,k]} S_r$, est une fonction dérivable, croissante de k, on aura :

$$\iiint_\Omega \varphi(f(x, y, z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \varphi(k)\,\mathscr{V}'(k)\mathrm{d}k,$$

(et le résultat opposé si $k \rightsquigarrow \mathscr{V}(k)$ décroît). Voir 17.2.

En ce qui concerne le calcul des intégrales triples, il se fait lui aussi par application du **Théorème de Fubini**, (17.20, 17.32), ou par changement de variables, en n'oubliant pas la valeur absolue du jacobien.

Les changements les plus usuels sont en coordonnées cylindriques, avec un $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ devenu $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, (si $r > 0$), voir les exercices 17.18, 17.19, 17.21, 17.22..., ou en coordonnées sphériques, (voir 17.6), où $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ donne du $r^2\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, avec un paramètre φ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'autres sont possibles, (voir 17.41, 17.42).

<u>*Quelles sont les applications des intégrales doubles ou triples ?*</u>

Les calculs d'aires, de volumes (voir 17.18, 17.19, 17.20, 17.21, 17.22), mais aussi de masses, (17.36, 17.16), de centres de gravité, (17.37, 17.41), de moments d'inertie... sont les premières applications. Dans ces calculs, les considérations de symétrie sont primordiales.

Les intégrales doubles permettent aussi de définir les intégrales dites de surface, ou, d'un point de vue physicien, les flux des champs de vecteurs.

Si on a une nappe paramétrée S, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ pour (u, v) dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, nappe régulière, et, si dans le repère orthonormé on se donne un champ de vecteurs $\vec{V}$, le flux de ce champ à travers S orientée par ce paramétrage est :

$$\phi = \iint_\Omega \vec{V}(m(u, v)) \cdot \left(\overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial v}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

le point $m(u, v)$ décrivant la nappe.

Si on veut une « normale sortant », il faudra choisir le paramétrage pour obtenir la bonne orientation.

Voyez en 17.33 et 17.34 de tels calculs de flux. Il ne faut pas oublier non plus que, si S est le bord orienté d'une partie de $\mathbb{R}^3$, notée Ω, (et telle qu'on puisse lui appliquer le Théorème de Fubini), le flux du champ $\vec{V}$ à travers S est l'intégrale triple, sur Ω, de la divergence du champ, (voir 17.35).

Signalons enfin que, par définition, *l'aire d'une nappe S paramétrée* : $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, avec (u, v) dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, (paramétrage de classe C^1, régulier), est :

$$a(S) = \iint_{\Omega} \left\| \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial m}{\partial v}} \right\| du dv.$$

Le calcul des aires des nappes de révolution, et des volumes limités par de tels solides est grandement facilité par les **Théorèmes de Guldin**, (17.38, 17.39).

Enfin ne pas oublier non plus l'aspect linéaire de l'intégrale multiple, ce qui donne, si on calcule des aires de parties homothétiques dans une homothétie de rapport λ, un facteur multiplicatif λ^2, ou $|\lambda|^3$ pour des volumes, ce qui se généralise même dans $\mathbb{R}^p$ comme le montre l'exercice 17.43.

Que dire des **formes différentielles** : une propriété essentielle, le **lemme de Poincaré**. Si sur un ouvert étoilé, une forme différentielle est fermée, elle est exacte. Ou encore, si la dérivée de la forme différentielle ω est nulle, il existe une forme différentielle α dont la dérivée est ω. C'est ainsi que :

si une forme de degré 1, $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_i$, vérifie, $\forall i \neq j$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, il existe une fonction φ ayant ω pour différentielle. Si $n = 3$, en physique, on dira que si un champ de vecteurs est de rotationnel nul, c'est un champ de gradient.

Dans $\mathbb{R}^3$ toujours, dire que la forme de degré 2 :

$$\omega = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx,$$

est exacte, c'est dire que :

$$d\omega = (f'_z + g'_x + h'_y) dx dy dz = 0,$$

et sur un ouvert étoilé, il existe alors α forme de degré 1 de dérivée $d\alpha = \omega$.

Le physicien dira que si le champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{W} = g\vec{i} + h\vec{j} + f\vec{k},$$

est de divergence $g'_x + h'_y + f'_z$ nulle, c'est un champ de rotationnel.

Un moyen de mémoriser l'identification entre forme différentielle de degré 2 dans $\mathbb{R}^3$, et champ de vecteurs, est d'identifier dx, dy, dz avec $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, d'où un $dx \wedge dy$ qui correspond à $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, et ici $f\,dx \wedge dy$ qui donne $f\vec{k}$.

Voir en 17.23, 17.24, 17.25, 17.26 des exercices où ces notions servent.

Énoncés

17.1. Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

Calculer $\iint_D (x^3 + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17.2. Calculer $\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2}$, avec :

$$D = \{(x, y, z) \ ; \ x^2 + y^2 + 2z^2 \leqslant a^2\}.$$

17.3. Calculer le volume V(R) intérieur à la nappe définie par la rotation de l'arc de courbe (Γ) défini par les conditions :

$$\begin{cases} (a^2 + x^2)y = a^3, \\ -R \leqslant x \leqslant R, \qquad a > 0, R > 0, \end{cases}$$

autour de Oy.

Équivalent de V(R) si R tend vers $+\infty$.

17.4. Calculer l'intégrale de la forme différentielle $\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ sur un cercle C en distinguant les cas suivant la place de l'origine par rapport au cercle.

17.5. Soit Γ une courbe plane de classe C^1, d'extrémités $A = (2, 0)$ et $B = (1, 1)$.

Calculer $\int_\Gamma (y^3 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (3xy^2 + 6x^2y)\mathrm{d}y$.

17.6. Soit $\mathbb{R}^3$ euclidien, et T un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

On se donne $\lambda = a + ib$ dans $\mathbb{C}$, avec $a > 0$ et, pour $0 < \varepsilon < R$, on pose :

$$I_{\varepsilon, R}(T) = \iiint_{\varepsilon \leqslant \|X\| \leqslant R} e^{-\lambda\|X\| + i\langle X, T\rangle} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\|X\|}.$$

Calculer la limite de $I_{\varepsilon, R}(T)$ si ε tend vers 0 et R vers $+\infty$.

17.7. Soit $a > 1$. Calculer $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, où $D = \left[\frac{1}{a}, a\right] \times [0, 1]$.

17.8. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Calculer $I = \iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.

17.9. Soit A, B, C des points non alignés de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une et une seule forme affine sur $\mathbb{R}^2$ valant 1, 0, 0 en A, B, C respectivement.

Calculer $\iint_T f(x, y) dx dy$, T désignant l'intérieur du triangle A, B, C.

17.10. Calculer $\iint_D (x + y) dx dy$, où D est l'ensemble :

$$D = \{(x, y) \ ; \ x \geqslant 0, y \geqslant 0, \ x^2 + y^2 \leqslant 1 \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}\}.$$

17.11. Soit D la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par les conditions :

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 1$ et $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - y} \geqslant 1$.

Aire de D.

17.12. Dans le plan orienté, on note C le contour déterminé par la demi-ellipse d'équation $2x^2 + y^2 = 2$, située dans le demi plan $y \geqslant 0$, et le segment $\{(x, y) \ ; \ y = 0, - 1 \leqslant x \leqslant 1\}$, et Ω le domaine borné limité par C orienté dans le sens trigonométrique.

Calculer $I = \iint_C x^2 dy - y^2 dx$ et $J = \iint_\Omega (x + y) dx dy$.

17.13. Soit une courbe fermée C, de classe C^1, sans point stationnaire, paramétrée par son abscisse curviligne, s. On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les vecteurs : tangent unitaire orienté d'une part, et unitaire directement perpendiculaire à $\vec{T}$ d'autre part.

Si $\vec{V}$ est un vecteur unitaire constant, calculer :

$$I = \int_C (x\cos(\vec{V}, \vec{N}) + y\sin(\vec{V}, \vec{N}))ds.$$

17.14. Soient, dans un repère orthonormé, les points A : $(-a, a)$ et B : (a, a). On note C le demi-cercle de diamètre AB, ne contenant pas O, orienté dans le sens trigonométrique.

Calculer l'intégrale curviligne :

$$I = \int_C (3a(x^2+y^2)-y^3)dx + 3xy(2a-y)dy.$$

17.15. Soit $\Delta = \{(x, y)\ ;\ 0 \leqslant x+y \leqslant 4a\ ;\ y \geqslant x, xy \geqslant a^2\}$. Calculer :

$$I = \iint_\Delta (x^2-y^2)\cos xy\,dx\,dy.$$

17.16. Masse d'une plaque carrée dont la densité est proportionnelle à la distance au centre.

17.17. Soit $D = \{(x, y)\ ;\ x^2+y^2 \leqslant 2ax\ ;\ x^2+y^2 \leqslant 2ay\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy$.

17.18. Volume de la partie de l'espace limitée par les deux nappes d'équations :

$$x^2+y^2 = 2pz \text{ et } x^2+y^2 = a^2z^2, (a>0, p>0).$$

17.19. Volume de la partie V de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$V = \{(x, y, z)\ ;\ x^2+y^2-ay \leqslant 0\ ;\ b^2(x^2+y^2)+a^2z^2 \leqslant a^2b^2\}.$$

17.20. Volume de l'ellipsoïde $\Omega = \left\{(x, y, z)\ ;\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$.

17.21. Soit P le paraboloïde de révolution, d'équation :

$$x^2+y^2-2pz = 0,$$

dans un repère orthonormé, et S une sphère centrée sur Oz, qui coupe P suivant deux cercles de rayons a et b, $(a < b)$.

Volume de la région intérieure à S et extérieure à P.

17.22. Volume limité par un paraboloïde de révolution et un plan.

17.23. Dans le plan complexe, soit ω la forme différentielle

$$\omega = e^{-z^2}\mathrm{d}z.$$

a) Montrer que $\mathrm{Re}(\omega)$ et $\mathrm{Im}(\omega)$ sont des formes différentielles exactes.

b) Soit $\mathrm{R} > 0$, A et B les points d'affixes R et $\mathrm{R}e^{i\pi/4}$, et $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ l'arc de cercle de centre O, joignant A et B. Montrer que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to+\infty}\int_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\omega = 0.$$

c) En déduire la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

17.24. Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\text{, sur } \mathbb{R}^2.$$

Montrer que l'application $r \rightsquigarrow \mathrm{F}(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

17.25. Résoudre dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ est continue sur $\mathbb{R}$. Exemple : $\varphi(t) = t$.

17.26. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(1):\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Quelles en sont les solutions du type $u(x, t) = e^{ax+bt}$, a et b constantes.

Montrer qu'il existe une suite de polynômes à deux indéterminées, telle que, pour tout a réel, on ait :

$$e^{ax + a^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \mathrm{P}_n(x, t).$$

Préciser le degré de P_n.

Montrer que chaque P_n est solution de (1).

17.27. Soit $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} e^{-(x^2 + xy + y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17.28. Soient a et b deux réels strictement positifs. On désigne par Δ la région du plan limitée par : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

Calculer $\displaystyle\iint_{\Delta} a^x b^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17.29. On désigne par $\Gamma_{a,b}$ le contour formé des deux demi-cercles de centre O, de rayons a et b, $0 < a < b$, situés dans le demi-plan $y \geqslant 0$, et des deux segments joignant les points $(-a, 0)$ et $(-b, 0)$ d'une part, puis $(b, 0)$, $(a, 0)$ d'autre part.

Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} [(x \sin x - y \cos x)\mathrm{d}x + (x \cos x + y \sin x)\mathrm{d}y].$$

En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

17.30. Calculer la circulation du champ de vecteurs :

$\vec{\mathrm{V}}$: $(2x \cos xy - x^2 y \sin xy, -x^3 \sin xy)$, le long du cercle de centre O de rayon 1. Que conclure ?

17.31. Circulation du champ de vecteurs :

$\vec{\mathrm{V}}$: $((3x^2 + y^2)y, (y^2 - x^2)x)$,

le long du segment joignant $\mathrm{A}(0, 1)$ et $\mathrm{B}(1, 2)$.

17.32. Soit p, q, r et s quatre entiers naturels, et Δ la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\Delta = \{(x, y, z) \; ; \; x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1\}.$$

Calculer $\displaystyle\iiint_{\Delta} x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

17.33. Flux du champ $\vec{V} = -y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (y+z)\vec{k}$, à travers le triangle S défini par les conditions :

$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, 2x + 2y + z = 6$, la normale orientée à S ayant une composante positive sur Ox.

17.34. Calculer le flux du champ $\vec{V} = x\vec{i} + y^2\vec{j} - 2yz\vec{k}$ à travers l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, la normale orientée étant sortante.

17.35. Soit le demi-ellipsoïde S : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $z \geqslant 0$, et le champ de vecteur $\vec{V} = x\vec{i} + y^2\vec{j} - 2yz\vec{k}$. Flux du champ $\vec{V}$ à travers S.

17.36. Masse d'une plaque circulaire de rayon R, dont la densité est proportionnelle à la distance au centre, et égale à δ sur le bord.

17.37. Une plaque a la forme d'un triangle rectangle T de côtés OB $= a$ et OA $= b$, la densité en un point étant la distance du point au côté OA. Quel est le centre de gravité de la plaque.

17.38. Soit une nappe de révolution S, de demi-méridienne l'arc plan Γ, régulier, d'abscisse curviligne s, d'équation $z = \varphi(r)$ pour $0 \leqslant r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

1°) Montrer que l'aire de S est $2\pi\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}s$.

2°) Montrer que cette aire est le produit de la longueur de la demi-méridienne par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de cette demi-méridienne supposée homogène. (Premier Théorème de Guldin).

17.39. Soit un solide de révolution engendré par la rotation d'une plaque, demi-méridienne, située dans un demi-plan limité par l'axe de rotation.

Montrer que le volume de ce solide est le produit de l'aire de la plaque demi-méridienne, par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de cette plaque supposée homogène, (deuxième Théorème de Guldin).

17.40. Calculer l'aire et le volume d'un tore à collier.

17.41. Centre de gravité de la partie d'un tore ouvert, (ou à collier) plein homogène, compris entre deux plans méridiens perpendiculaires.

17.42. $\mathscr{D}$ est l'intérieur de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{9a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$.

Calculer $\displaystyle\iiint_{\mathscr{D}} (2x + 3y + 6z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

17.43. Quel est le volume p dimensionnel de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^p$ de rayon $a > 0$?

Solutions

17.1. Le domaine D est le disque centré à l'origine, de rayon 1, $(x^2+y^2-1 \leqslant 0)$, privé du disque de frontière le cercle Γ d'équation $x^2+y^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$. Ce cercle est centré en A : $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, point de la deuxième bissectrice, et a pour rayon $\left(2\cdot\frac{2}{16}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$. Le domaine D admet la deuxième bissectrice pour axe de symétrie. Or dans cette symétrie $M(x, y)$ donne $M'(-y, -x)$ et

$f(-y, -x) = (-y)^3+(-x)^3 = -f(x, y)$: l'intégrale est nulle.

17.2. Le domaine D est la réunion des ellipsoïdes E_λ d'équations $x^2+y^2+2z^2 = \lambda^2$, pour λ variant de 0 à a. On utilise la méthode des nappes de niveau. L'ellipsoïde limite un domaine de volume $\frac{4}{3}\pi\lambda\cdot\lambda\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ car ses demi-axes sont λ, λ et $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, soit encore $V(\lambda) = \frac{4\pi}{3\sqrt{2}}\lambda^3$.

L'intégrale est donc :

$$I = \int_0^a \frac{dV(\lambda)}{\lambda^2+a^2} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}\int_0^a \frac{\lambda^2+a^2-a^2}{\lambda^2+a^2}d\lambda$$
$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{a^2}{a}\left[\operatorname{Arctg}\frac{\lambda}{a}\right]_0^a\right),$$

d'où $I = 2a\pi\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

17.3. Les conditions $(a^2+x^2)y = a^3$; $-R \leqslant x \leqslant R$, sont stables par x donne $-x$, y donne y : l'arc Γ est symétrique par rapport à Oy. On aura une méridienne de la nappe de révolution en gardant x dans $[O, R]$, d'où $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ qui décroît de a à $\dfrac{a^3}{a^2 + R^2}$.

Pour un x donné, on a un disque de volume $\pi x^2 |dy|$, (attention à la décroissance !), d'où :

$$V = \int_0^R \pi x^2 \frac{(2a^3 x)}{(a^2 + x^2)^2} dx, \text{ soit avec } t = x^2,$$

$$V = \int_0^{R^2} a^3 \pi \frac{t dt}{(t + a^2)^2} = \pi a^3 \int_0^{R^2} \frac{t + a^2 - a^2}{(t + a^2)^2} dt$$

$$= \pi a^3 \left[\ln(t + a^2) + \frac{a^2}{t + a^2} \right]_0^{R^2}$$

$$= \pi a^3 \left(\ln \frac{a^2 + R^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2 + R^2} - 1 \right)$$

$$= \pi a^3 \left(\ln \frac{a^2 + R^2}{a^2} - \frac{R^2}{a^2 + R^2} \right).$$

On a immédiatement V(R) équivalent à $\pi a^3 \ln(R^2)$ si R tend vers $+\infty$.

17.4. On considère les fonctions P et Q, définies sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par :

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ et } Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

et la forme différentielle de degré 1, $\omega = P dx + Q dy$.

On note D le disque de bord orienté le cercle C.

<u>Premier cas</u>. L'origine est extérieure au disque.

La forme ω est C^∞ sur D. On a $P'_y = -\dfrac{1}{x^2 + y^2} + \dfrac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ et

$Q'_x = \dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, d'où :

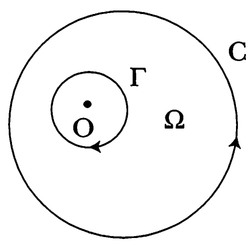
$$Q'_x - P'_y = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \text{, et, par la formule de Stockes,}$$

on a :

$$I = \int_C \omega = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy = 0 .$$

Deuxième cas. L'origine est intérieure au disque. Soit $r > 0$, assez petit pour que le cercle de centre O, de rayon r, noté Γ, soit à l'intérieur de D, et on considère l'ensemble :

$\Omega = D \setminus$ (disque de centre O de rayon r).



On a encore, par Stockes, $\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_\Omega 0 = 0$. Or le bord orienté $\partial\Omega$ de la partie Ω est constitué du cercle C orienté dans le sens trigonométrique, et du cercle Γ orienté dans l'autre sens, d'où, en notant Γ le cercle orienté dans le sens trigonométrique :

$$\int_C \omega - \int_\Gamma \omega = 0 .$$

Comme Γ est alors paramétré par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, θ croissant de 0 à 2π, on a :

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}(r\cos\theta(r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr) - r\sin\theta(-r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr))$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 d\theta = 2\pi,$$

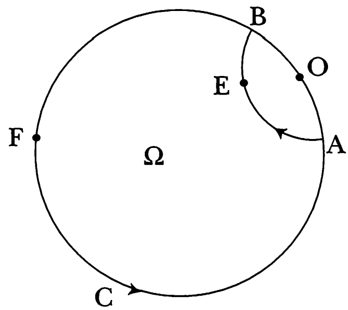
et finalement, dans ce cas, $I = 2\pi$.

Troisième cas. Le cercle C contient le point O : on évite ce point par un arc de cercle centré en O, de rayon r assez petit, qui coupe C en A et B.

Soit Ω ce qui reste du disque D. On a encore :

$$\int_{\partial\Omega} \omega = 0 = \int_{C-\overset{\frown}{AOB}} \omega + \int_{\overset{\frown}{AEB}} \omega,$$

d'après la formule de Stockes.



Si on paramètre C en coordonnées polaires d'origine O, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a vu que $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}\theta = 0 \cdot \mathrm{d}r + 1 \cdot \mathrm{d}\theta$, et cette expression tend vers $\mathrm{d}\theta$ si r tend vers 0, (on travaille sur les formes linéaires), donc on peut donner un sens à l'intégrale curviligne $\int_C \omega$ par

$$\int_C \omega = \lim_{\substack{A \to O \\ B \to O}} \int_{\overset{\frown}{BFA}} \omega = \lim_{\substack{A \to O \\ B \to O}} \int_{C-\overset{\frown}{AOB}} \omega .$$

C'est donc $- \lim\limits_{\substack{A \to O \\ B \to O}} \int_{\overset{\frown}{AEB}} \omega$.

Mais, sur le cercle de centre O de rayon r, en notant α et β les angles polaires des points A et B, on a :

$\int_{\overset{\frown}{AEB}} \omega = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta = \beta - \alpha$, ce qui tend vers $-\pi$ lorsque r tend vers 0, (attention à l'orientation), d'où dans ce troisième cas $I = \pi$.

<u>*Remarque*</u>. On intègre la forme $\mathrm{d}\theta$ représentant la variation de l'angle sous lequel on voit une portion du cercle à partir du point O, donc le résultat est « intuitivement » ou physiquement prévisible.

17.5. Comme on ne précise pas l'arc joignant A et B on doit s'attendre au calcul de l'intégrale d'une différentielle exacte, (ou à la circulation d'un champ de gradient).

En notant $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ la forme différentielle, on a :

$P'_y = 3y^2 + 12xy$ et $Q'_x = 3y^2 + 12xy$ donc :

$\mathrm{d}\omega = (P'_y - Q'_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$: la forme ω est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$, donc exacte, (lemme de Poincaré).

On en cherche une primitive, c'est-à-dire une fonction F telle que $F'_x = P = y^3 + 6xy^2$ et $F'_y = Q = 3xy^2 + 6x^2y$.

On doit avoir :

$F(x, y) = y^3x + 3x^2y^2 + f(y)$, avec f telle que :

$F'_y = 3y^2x + 6x^2y + f'(y) = 3xy^2 + 6x^2y$,

d'où $f'(y) = 0$ et $f(y) = a$, constante en x et y.

Mais alors $\int_\Gamma \mathrm{d}F = F(A) - F(B)$ ou $= F(B) - F(A)$, suivant que l'arc Γ est orienté de B vers A ou de A vers B, ce que le texte ne précise pas.

Choisissons d'aller de A vers B, on aura alors :

$$\int_\Gamma \mathrm{d}F = F(1, 1) - F(2, 0) = 1 + 3 + a - a = 4.$$

17.6. Comme on intègre sur une partie située entre deux sphères centrées à l'origine, l'utilisation de coordonnées sphériques s'impose, et la présence du produit scalaire $< X, T >$ conduit à prendre des coordonnées sphériques d'axe dirigé par T.

En posant $T = t\vec{k}$, avec θ variant de 0 à 2π et ϕ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, on aura $x = r\cos\phi\cos\theta, y = r\cos\phi\sin\theta$ et $z = r\sin\phi$, d'où $< X, T >= tr\sin\phi$.

Le domaine d'intégration est défini par :

$(r, \theta, \phi) \in \Omega = [\varepsilon, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et l'intégrale devient :

$$I_{\varepsilon, R}(T) = \iiint_\Omega e^{-(a+ib)r + itr\sin\phi} \cdot \frac{1}{r} \cdot r^2 \cos\phi \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= 2\pi\int_\varepsilon^R re^{-(a+ib)r}\left(\int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} e^{itr\sin\phi}\cos\phi\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}r$$

$$I_{\varepsilon, R}(T) = 2\pi \int_{\varepsilon}^{R} r e^{-(a+ib)r} \left[\frac{e^{itr\sin\phi}}{itr} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \frac{2\pi}{it} \int_{\varepsilon}^{R} e^{-(a+ib)r} (e^{itr} - e^{-itr}) dr$$

$$= \frac{2\pi}{it} \left[\frac{e^{-(a+i(b-t))r}}{-(a+i(b-t))} + \left(-\frac{e^{-(a+i(b+t))r}}{-(a+i(b+t))} \right) \right]_{\varepsilon}^{R}$$

$$= \frac{2\pi}{it} \left[\frac{e^{-(a+i(b-t))\varepsilon} - e^{-(a+i(b-t))R}}{a+i(b-t)} + \frac{e^{-(a+i(b+t))R} - e^{-(a+i(b+t))\varepsilon}}{a+i(b+t)} \right].$$

Comme $a > 0$, $\left| e^{-(a+i(b\pm t))R} \right| = e^{-aR}$, tend vers 0 si R tend vers $+\infty$, donc si ε tend vers 0 et R vers $+\infty$, la limite de $I_{\varepsilon, R}(T)$ devient :

$$I = \frac{2\pi}{it} \left(\frac{1}{a+i(b-t)} - \frac{1}{a+i(b+t)} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{it} \frac{2it}{(a+ib)^2 + t^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2 + t^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2 + \|T\|^2},$$

et je suis désolé d'avoir traîné $a + ib$ au lieu de λ tout au long de ce calcul !

17.7. Pas de subtilité : on intègre par rapport à y d'abord par exemple :

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \left(\int_0^1 \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \left[\frac{1}{x} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{x} \text{Arctan} \frac{1}{x} dx.$$

Peut-être que poser $\frac{1}{x} = s$, (d'où $x = \frac{1}{s}$ et $dx = -\frac{ds}{s^2}$), pourrait arranger les choses ?

Il vient alors :

$$I = \int_{a}^{\frac{1}{a}} s(\text{Arctan} s)\left(-\frac{ds}{s^2} \right) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{s} \text{Arctan} s \, ds.$$

Cela ressemble à l'ancienne formule, au remplacement de Arctan $\frac{1}{s}$ par Arctan s près. Or Arctan s + Arctan $\frac{1}{s}$ vaut $\frac{\pi}{2}$, pour $s > 0$, donc on a :

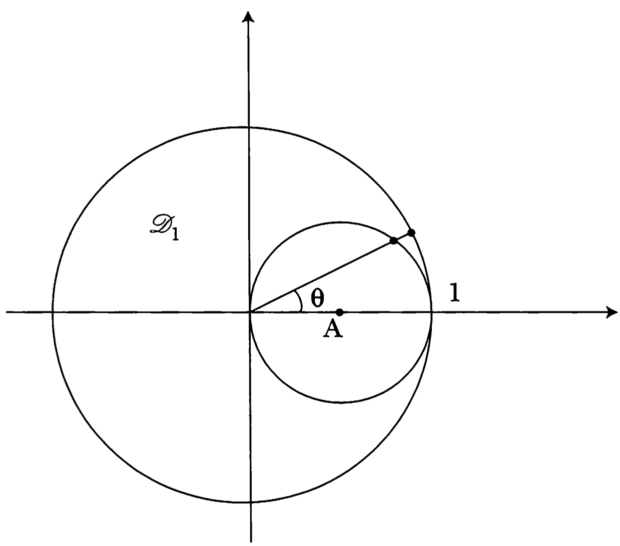
$$\mathrm{I} = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{s}\right)\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\mathrm{d}s}{s} - \mathrm{I},$$

d'où :

$$2\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\Big[\ln s\Big]_{\frac{1}{a}}^{a} = \pi \ln a \text{ et } \mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\ln a.$$

17.8. Le domaine $\mathscr{D}$ est formé des points intérieurs au cercle de centre O, de rayon 1, et extérieurs au cercle de centre A : $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, de rayon $\frac{1}{2}$.

Ce domaine est symétrique par rapport à Ox, et la fonction à intégrer est paire en y : on se contente d'intégrer sur $\mathscr{D}_1$, partie de $\mathscr{D}$ dans le demi-plan $y \geqslant 0$, (et on double).



Un passage en polaires s'impose, $\mathscr{D}_1$ étant alors défini par l'ensemble des (r, θ) avec :

soit $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\cos\theta \leqslant r \leqslant 1$,

soit $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $0 \leqslant r \leqslant 1$.

On a donc :

$$I = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos\theta}^1 \frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2)^2}\right)\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2)^2}\right)\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left[-\frac{1}{1+r^2}\right]_{\cos\theta}^1\right)\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{1+r^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

L'élément à intégrer, $\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}$ étant invariant par le changement $\theta \rightsquigarrow \theta + \pi$, on posera $t = \tan\theta$, d'où :

$$\mathrm{d}t = (1+t^2)\mathrm{d}\theta \text{ et } \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+t^2}, \text{ et :}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty},$$

donc $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

17.9. En notant (x, y) les coordonnées d'un point quelconque du plan dans un repère $\mathscr{R}$, une forme affine sera du type $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$. On cherche donc les trois coefficients α, β, γ, tels qu'en notant x_A, y_A les coordonnées de A ; x_B, y_B celles de B et x_C, y_C celles de C, on ait :

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\alpha x_A+\beta y_A+\gamma = 1\\ \alpha x_B+\beta y_B+\gamma = 0\\ \alpha x_C+\beta y_C+\gamma = 0,\end{cases}$$

et ce système (I) est de Cramer, puisque le déterminant s'écrit :

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix},$$

et $D \neq 0$ est la condition de non alignement des trois points.

Donc f existe et est unique.

Pour achever les calculs, on va prendre un repère qui les facilite : l'axe Ox portera B et C et Oy porte A, d'où les coordonnées :

$A(0, a)$; $B(b, 0)$ et $C(c, 0)$.

Le système (I) devient :

$$(\mathrm{I}')\begin{cases}\beta a+\gamma = 1\\ \alpha b+\gamma = 0\,,\\ \alpha c+\gamma = 0\end{cases}$$

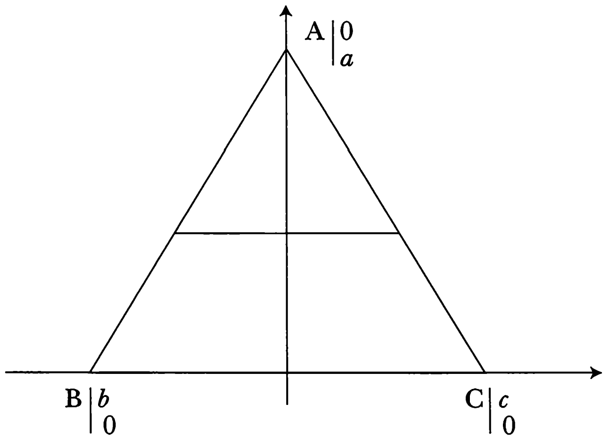
d'où $\alpha(b-c) = 0$ avec $b \neq c$ donc $\alpha = 0$, d'où $\gamma = 0$, et comme $a \neq 0$, (sinon $A \in Ox$), $\beta = \frac{1}{a}$: dans ce repère on a $f(x, y) = \frac{1}{a}y$.

L'intégrale devient :

$$I = \iint_T \frac{1}{a}y\,dx\,dy = \frac{1}{a}\int_0^a y\left(\int_{\left(1-\frac{y}{a}\right)b}^{\left(1-\frac{y}{a}\right)c} dx\right)dy\,,$$

si on intègre d'abord par rapport à x, les équations des droites (AB) et (AC) étant respectivement :

$$x = b\left(1-\frac{y}{a}\right) \text{ et } x = c\left(1-\frac{y}{a}\right) \text{ avec, ici, } b<c\text{, et } a>0\,.$$



On a donc $\mathrm{I} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a y\left(1-\dfrac{y}{a}\right)(c-b)\mathrm{d}y$

$$= \frac{c-b}{a}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3a}\right]_0^a = \frac{(c-b)}{a}\frac{a^2}{6},$$

soit $\qquad \mathrm{I} = \dfrac{1}{6}a(c-b) = \dfrac{1}{3}$ aire du triangle T.

17.10. Le domaine D est dans le quart de disque défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x^2+y^2 \leqslant 1$. Notons D_1 ce quart de disque.

Par ailleurs, on n'est pas dans D_2, partie du plan définie par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}<1$.

Comme dans D_2, on a $\sqrt{x} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x \leqslant 1$ et aussi :

$0 \leqslant y \leqslant 1$, on a $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ et :

$y^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{y} \leqslant 1$, donc, si $(x, y) \in \mathrm{D}_2$, *a fortiori* on a :

$x^2+y^2 \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant 1$, d'où $\mathrm{D}_2 \subset \mathrm{D}_1$, et $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \setminus \mathrm{D}_2$.

Il en résulte que

$\mathrm{I} = \displaystyle\iint_{\mathrm{D}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\mathrm{D}_2}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, et ce découpage de l'intégrale permet des changements de variables différents.

Pour $I_1 = \iint_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, un passage en coordonnées polaires conduit à :

$$I_1 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 r^2 \mathrm{d}r\right) = \frac{1}{3}[\sin\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Pour I_2, on peut d'abord poser $x = u^2$, $y = v^2$, avec les conditions : $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $u + v \leqslant 1$ et un $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, (jacobien de la transformation, positif ici), d'où :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 4u\left(\int_0^{1-u} (u^2v + v^3)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 4u\left[u^2\frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{4}\right]_0^{1-u} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (2u^3(1-u)^2 + u(1-u)^4)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (2u^5 - 4u^4 + 2u^3 + u^5 - 4u^4 + 6u^3 - 4u^2 + u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (3u^5 - 8u^4 + 8u^3 - 4u^2 + u)\mathrm{d}u = \frac{3}{6} - \frac{8}{5} + 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

soit, tous calculs faits, $I_2 = \frac{1}{15}$, et finalement on trouve :

$$I = \frac{2}{3} - \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

17.11. On doit avoir $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et aussi $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$.

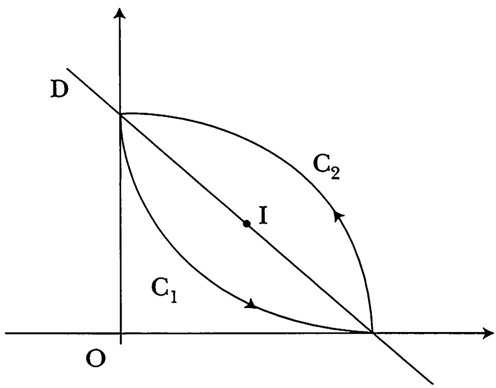
Soit C_1 l'arc d'équation implicite $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, pour x et y entre 0 et 1. On a $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$, ce qui équivaut, puisque l'on a des nombres positifs, à :

$$y = 1 + x - 2\sqrt{x},$$

ou encore à $2\sqrt{x} = 1 + x - y$.

On doit avoir $1 + x - y \geqslant 0$, et $4x = (1 + x - y)^2$: on a en fait un arc de parabole, tangent à l'axe des x pour $x = 1$ et à l'axe des y pour $y = 1$, comme le montre l'étude de la dérivée $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$, de la fonction y.

L'arc C_2 d'équation $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = 1$ se déduit de C_1 en posant $X = 1-x$ et $Y = 1-y$, d'où $\frac{x+X}{2} = \frac{y+Y}{2} = \frac{1}{2}$: C_2 est image de C_1 dans la symétrie par rapport au point I : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



Comme C_1 est sous la droite D d'équation $y = 1-x$, car pour x dans $[0, 1]$, on a $1 + x - 2\sqrt{x} \leqslant 1 - x$, ceci étant équivalent à $x \leqslant \sqrt{x}$, ce qui est vrai pour x dans $[0, 1]$, l'arc C_2 est au-dessus de D et l'aire peut se calculer comme une intégrale curviligne :

$$S = -\int_{\partial C} y\mathrm{d}x.$$

En paramétrant C_1 et C_2 en fonction de x, croissant sur C_1 et décroissant sur C_2, on a :

$$S = -\int_0^1 (1 + x - 2\sqrt{x})\mathrm{d}x - \int_1^0 (-1 + x + 2\sqrt{1-x})\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (-2 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x})\mathrm{d}x = -2 + \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= -2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

17.12. L'intégrale curviligne se calcule facilement.

Le segment se paramètre par $x \rightsquigarrow (x, 0)$, $x \in [-1, 1]$, et donne :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (x^2 \cdot 0 - 0\mathrm{d}x) = 0.$$

La demi-ellipse se paramètre en :

$$x = \cos\varphi,\ y = \sqrt{2}\sin\varphi,$$

pour φ croissant de 0 à π, et donne :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \cdot \sqrt{2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi - 2\sin^2\varphi(-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi + 2\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi}(1-\sin^2\varphi)\mathrm{d}(\sin\varphi) - 2\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}(\cos\varphi) \\
&= \sqrt{2}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} - 2\left[\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} \\
&= -2\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'intégrale curviligne I vaut $\frac{8}{3}$.

Par Green Riemann, on a, avec $P(x, y) = -y^2$ et $Q(x, y) = x^2$,

$$I = \iint_{\Omega}(Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} 2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ donc } J = \frac{I}{2} = \frac{4}{3}.$$

17.13. On suppose l'arc C orienté de façon que le domaine qu'il limite soit à gauche.

Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base orthonormée du repère, posons :

$$\alpha = (\vec{i}, \vec{V}), \text{ et } \varphi = (\vec{i}, \vec{T}), \text{ d'où } (\vec{i}, \vec{N}) = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Si M est le point générique de C, on a :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi = \vec{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \vec{j}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.$$

On a $\cos(\vec{V}, \vec{N}) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin(\varphi - \alpha)$ et :

$$\sin(\vec{V}, \vec{N}) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\varphi - \alpha),$$

soit encore :

$$\cos(\vec{V}, \vec{N}) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi = (\sin\alpha)\frac{dx}{ds} - (\cos\alpha)\frac{dy}{ds}, \text{ et :}$$

$$\sin(\vec{V}, \vec{N}) = \cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha = (\cos\alpha)\frac{dx}{ds} + (\sin\alpha)\frac{dy}{ds},$$

et l'intégrale cherchée devient :

$$I = \int_C \left(x\left(\sin\alpha \cdot \frac{dx}{ds} - \cos\alpha \cdot \frac{dy}{ds}\right) + y\left(\cos\alpha \cdot \frac{dx}{ds} + \sin\alpha \cdot \frac{dy}{ds}\right)\right)ds$$

$$= \int_C (x\sin\alpha + y\cos\alpha)dx + (-x\cos\alpha + y\sin\alpha)dy.$$

Par Green Riemann, on a donc :

$$I = \iint_\Omega (-\cos\alpha - \cos\alpha)dxdy = -2\cos\alpha\iint_\Omega dxdy,$$

si Ω admet C pour bord orienté, donc $I = -2(\cos\alpha)$ aire (Ω).

17.14. *A priori*, pas de malice : on paramètre C par : $x = a\cos\theta$, $y = a + a\sin\theta$, θ variant de 0 à π, et l'intégrale devient :

$$I = \int_0^\pi ([3a(2a^2 + 2a^2\sin\theta) - a^3(1 + \sin\theta)^3](-a\sin\theta)$$

$$+ 3a^2\cos\theta(1 + \sin\theta)(a - a\sin\theta)a\cos\theta)d\theta,$$

= l'intégrale d'un polynôme trigonométrique rébarbatif !

Et si on fermait le contour C par le diamètre AB ?

En notant $Pdx + Qdy$ la forme à intégrer, on a :

$Q'_x - P'_y = 3y(2a - y) - 6ay + 3y^2 = 0$, donc, par Green Riemann, on a, [AB] étant orienté de A vers B :

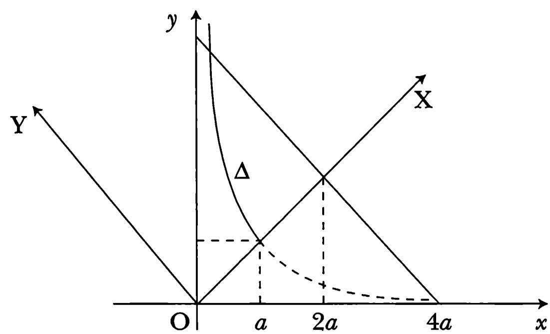
$$I + \int_{[AB]} Pdx + Qdy = 0.$$

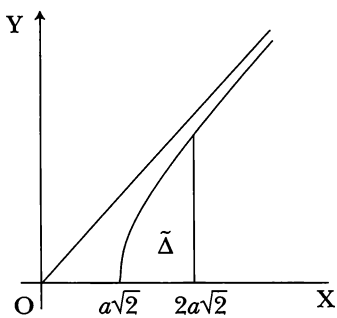
Le segment [AB] se paramètre par $x = x$ entre $-a$ et a, $y = a$, d'où :

$$I = -\int_{-a}^{a}(3a(x^2+a^2)-a^3)\mathrm{d}x = -\left[ax^3+2a^3x\right]_{-a}^{a}$$
$$= -6a^4.$$

17.15. Commençons par déterminer Δ : on est limité par la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{a^2}{x}$, $(x > 0)$, la première bissectrice, et la droite d'équation $y = 4a - x$.

Peut-être qu'une rotation du repère de $\frac{\pi}{4}$ faciliterait les choses !





Avec $x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$, on a un domaine $\tilde{\Delta}$ caractérisé cette fois par $a\sqrt{2} \leqslant X \leqslant 2a\sqrt{2}$, $0 \leqslant Y \leqslant \sqrt{X^2 - 2a^2}$, puisque $xy \geqslant a^2$ équivaut à $2a^2 \leqslant X^2 - Y^2$, soit $Y^2 \leqslant X^2 - 2a^2$, avec $y - x = Y\sqrt{2} \geqslant 0$, d'où $0 \leqslant Y \leqslant \sqrt{X^2 - 2a^2}$.

Le jacobien de la transformation valant 1, l'intégrale devient :

$$I = \iint_{\tilde{\Delta}} \frac{1}{2}((X-Y)^2 - (X+Y)^2)\cos\frac{X^2-Y^2}{2}dXdY$$

$$= -2\iint_{\tilde{\Delta}} XY\cos\frac{X^2-Y^2}{2}dXdY.$$

Si on intègre pour X fixé, par rapport à Y pour commencer, on a :

$$I = -2\int_{a\sqrt{2}}^{2a\sqrt{2}} X\left(\int_0^{\sqrt{X^2-2a^2}} Y\cos\frac{X^2-Y^2}{2}dY\right)dX$$

$$= -2\int_{a\sqrt{2}}^{2a\sqrt{2}} X\left[-\sin\frac{X^2-Y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{X^2-2a^2}} dX$$

$$= -2\int_{a\sqrt{2}}^{2a\sqrt{2}} X\left(-\sin\frac{1}{2}(2a^2) + \sin\frac{X^2}{2}\right)dX$$

$$= \int_{a\sqrt{2}}^{2a\sqrt{2}} \left(2X\sin a^2 - 2X\sin\frac{X^2}{2}\right)dX$$

$$= \left[X^2\sin a^2 + 2\cos\frac{X^2}{2}\right]_{a\sqrt{2}}^{2a\sqrt{2}}, \text{ soit finalement :}$$

$$I = 6a^2\sin a^2 + 2(\cos 4a^2 - \cos a^2).$$

17.16. On prendra un carré de côté $2a$, dans un repère d'origine le centre du carré et d'axes parallèles aux côtés.

Vu les symétries du carré, la masse est 8 fois celle de la plaque triangulaire définie par les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a \ ; \ 0 \leqslant y \leqslant x,$$

ou encore, en polaires :

$$\Omega = \left\{(r, \theta) \text{ avec } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \ ; \ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta}\right\}.$$

Le calcul en polaires s'impose et « l'élément d'aire » $rdrd\theta$ ayant une masse égale à $kr \cdot rdrd\theta$, la masse cherchée est :

$$M = 8k\iint_\Omega r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 8k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r^2\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8ka^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta} = \frac{8ka^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{(1-\sin^2\theta)^2}.$$

En posant $u = \sin\theta$, on doit calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}.$$

On décompose en éléments simples en posant :

$$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{a}{(1-u)^2} + \frac{b}{(1-u)} + \frac{c}{(1+u)^2} + \frac{d}{1+u},$$

avec $a = c$ et $b = d$, (parité de la fonction).

En multipliant par $(1-u)^2$, et en remplaçant u par 1 on obtient $a = \frac{1}{4}$, puis, $(u = 0)$, on a : $1 = \frac{1}{2} + 2b$ donc $b = \frac{1}{4}$ aussi, et :

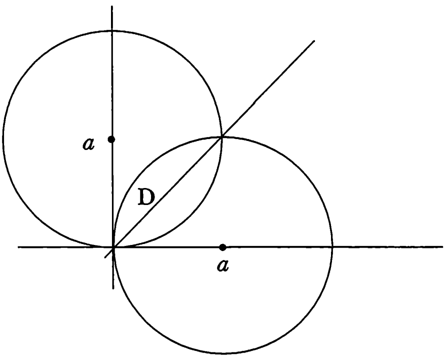
$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{2u}{1-u^2} + \ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} + \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln(3+2\sqrt{2}),$$

d'où finalement $M = \frac{ka^3}{3}(4\sqrt{2} + 2\ln(3+2\sqrt{2}))$.

17.17. Donnons un schéma du domaine D, intersection de deux disques de rayon a chacun.



Le domaine est symétrique par rapport à la première bissectrice, la fonction à intégrer aussi : on peut passer en polaires et introduire :

$$\Omega = \left\{(r, \theta) \; ; \; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \; ; \; 0 \leqslant r \leqslant 2a\sin\theta\right\}.$$

On a alors :

$$\mathrm{I} = 2\iint_{\Omega} r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2a\sin\theta} r^3 \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[r^4\right]_0^{2a\sin\theta} \mathrm{d}\theta = 8a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta \mathrm{d}\theta.$$

On a $\sin^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \dfrac{1}{16}(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$

$$= \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3),$$

donc on obtient :

$$\mathrm{I} = a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3)\mathrm{d}\theta$$

$$= a^4\left[\frac{1}{4}\sin 4\theta - 2\sin 2\theta + 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^4\left(-2 + \frac{3\pi}{4}\right),$$

donc $\mathrm{I} = \dfrac{(3\pi - 8)a^4}{4}$.

17.18. Les deux nappes sont de révolution autour de Oz, la nappe :

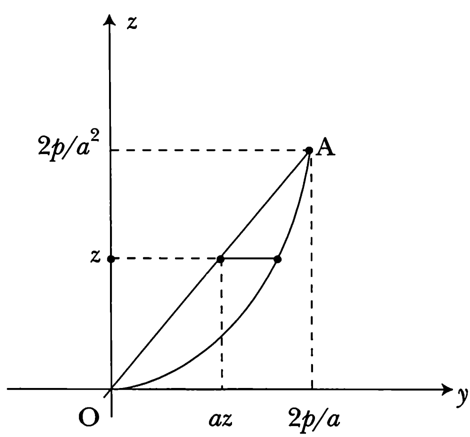
S_1 : $x^2 + y^2 = 2pz$, est un paraboloïde de révolution, et la nappe :

S_2 : $x^2 + y^2 = a^2z^2$ est un cône.

Les coordonnées cylindriques s'imposent, et en notant Ω la partie de l'espace considérée, on doit caractériser Ω.

Pour cela, considérons dans le plan yOz, $(x = 0)$, les méridiennes des deux nappes : on a la parabole P d'équation $y^2 = 2pz$ et les deux droites d'équations $az = \pm y$, qui coupent P aux points A et B de coordonnées (y, z) avec

$$y^2 = 2pz = a^2z^2\text{, d'où } z = 0 \text{ et } z = \frac{2p}{a^2}\text{, donc } y = \pm\frac{2p}{a}.$$



Si on passe en coordonnées cylindriques d'axe Oz, la partie Ω va être définie par les conditions :

$$\mathscr{D} = \{(r, z, \theta)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi]\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant 2p/a^2\ ;\ az \leqslant r \leqslant \sqrt{2pz}\},$$

d'où le volume :

$$V = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \int_0^{2p/a^2} \left(\int_{az}^{\sqrt{2pz}} r\,dr\right) dz = 2\pi \int_0^{2p/a^2} \frac{1}{2}\Big[r^2\Big]_{az}^{\sqrt{2pz}} dz$$

$$= \pi \int_0^{2p/a^2} (2pz - a^2z^2)dz = \pi\left[pz^2 - a^2\frac{z^3}{3}\right]_0^{2p/a^2}$$

$$= \pi\left(\frac{4p^3}{a^4} - \frac{8p^3}{3a^4}\right) = \frac{4\pi p^3}{3a^4}.$$

17.19. On est à l'intérieur du cylindre de génératrices parallèles à Oz, de base le cercle d'équations $z = 0$ et $x^2 + y^2 - ay = 0$; ainsi qu'à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

ellipsoïde de révolution autour de Oz, d'intersection avec le plan xOy, le disque de centre O, de rayon a, qui contient le disque intersection du cylindre, (centre $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, rayon $\frac{a}{2}$).

En coordonnées cylindriques, V est défini par :

$$\tilde{V} = \{(r, \theta, z) \; ; \; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \; ; \; 0 \leqslant r \leqslant a\sin\theta \; ; \; a^2z^2 \leqslant b^2(a^2 - r^2)\},$$

donc, par symétrie par rapport à xOy, on supposera que l'on a :

$$0 \leqslant z \leqslant b\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \; ;$$

et que, par symétrie par rapport à yOz, on a $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

On a donc pour volume :

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sin\theta} r\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} dz\right) dr\right) d\theta,$$

(vu les conditions on intègre pour θ et r fixés, car z varie alors entre deux expressions fonctions de r).

On a :

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\sin\theta} br\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{a^2}{3}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4ba^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{4ba^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2ba^2\pi}{3} - \frac{4ba^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta)$$

$$= \frac{2ba^2\pi}{3} - \frac{4ba^2}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= \dfrac{2ba^2\pi}{3} - \dfrac{4ba^2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)$, ce qui finalement, donne un volume valant $\dfrac{2ba^2}{3}\left(\pi - \dfrac{4}{3}\right)$, sauf erreur.

17.20. Si Ω_1 est la partie de Ω, limitée par les conditions supplémentaires $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, par raison de symétries par rapport aux plans de coordonnées, on a :

$$V = 8\iiint_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Si $\mathscr{D}_1 = \left\{(x, y)\ ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, cette intégrale triple se calcule, pour $(x, y) \in \mathscr{D}_1$, en intégrant d'abord pour z variant de 0 à $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, donc :

$$V = 8c\iint_{\mathscr{D}_1}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Un paramétrage nous débarrassera de la racine carrée, si par exemple, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t$, ce qui est obtenu en posant :

$$\begin{cases} x = a\cos t\cos\varphi \\ y = b\cos t\sin\varphi, \end{cases}$$

et, pour $(t, \varphi) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t \leqslant 1$.

Pour calculer l'intégrale, on cherche le jacobien de la transformation.

C'est le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t\cos\varphi & -a\cos t\sin\varphi \\ -b\sin t\sin\varphi & b\cos t\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -ab\cos t\sin t(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi),$$

de valeur absolue $ab\sin t\cos t$. On a donc :

$$\mathrm{V} = 8c\iint_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}(\sin t\cdot ab\sin t\cos t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi$$

$$= 8abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}(\sin t)\right)$$

$$= 8abc\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi abc,$$

(ce qui redonne bien $\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3$, pour la sphère, si $\mathrm{R} = a = b = c$).

17.21. La sphère S a une équation du type :
$x^2+y^2+z^2-2\alpha z+\beta = 0,$

et si elle coupe le paraboloïde suivant deux cercles de rayons a et b, c'est pour des plans de cote z telle que $x^2+y^2 = a^2 = 2pz$, ou $b^2 = 2pz$, donc pour z valant $\frac{a^2}{2p}$ ou $\frac{b^2}{2p}$.

Pour une valeur z comprise entre $\frac{a^2}{2p}$ et $\frac{b^2}{2p}$, le rayon $\mathrm{R}(z)$ du disque intersection de la sphère et du plan est tel que :

$$(\mathrm{R}(z))^2 = x^2+y^2 = 2\alpha z-\beta-z^2 ;$$

et celui, $r(z)$, du disque intersection avec le paraboloïde est tel que :

$$(r(z))^2 = x^2+y^2 = 2pz.$$

On doit avoir $(\mathrm{R}(z))^2-(r(z))^2 = -z^2+2(\alpha-p)z-\beta$, qui s'annule pour $z = \frac{a^2}{2p}$ et $z = \frac{b^2}{2p}$, ce qui détermine α et β. La somme des racines du trinôme vaut :

$$\frac{a^2+b^2}{2p} = 2\alpha-2p, \text{ d'où } \alpha = p+\frac{a^2+b^2}{4p} ;$$

et le produit :

$$\frac{a^2b^2}{4p^2} = \beta, \text{ en fait } \alpha \text{ n'interviendra pas.}$$

L'aire de la couronne de cote z, intérieure à S, extérieure à P vaut :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(z) &= \pi(\mathrm{R}(z))^2-\pi(r(z))^2\\ &= \pi\left(-z^2+\frac{a^2+b^2}{2p}z-\frac{a^2b^2}{4p^2}\right),\end{aligned}$$

d'où le volume cherché :

$$\begin{aligned}\mathrm{V} &= \int_{\frac{a^2}{2p}}^{\frac{b^2}{2p}} \pi\left(-z^2+\frac{a^2+b^2}{2p}z-\frac{a^2b^2}{4p^2}\right)\mathrm{d}z\\ &= -\frac{\pi}{24p^3}(b^6-a^6)+\frac{\pi(a^2+b^2)}{16p^3}(b^4-a^4)-\frac{\pi a^2b^2}{8p^3}(b^2-a^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{48p^3}(-2b^6+2a^6+3a^2b^4-3a^6+3b^6-3b^2a^4-6a^2b^4+6a^4b^2) \\ &= \frac{\pi}{48p^3}(-a^6+3a^4b^2-3a^2b^4+b^6), \end{aligned}$$

cela a une tête à valoir : $\frac{\pi}{48p^3}(b^2-a^2)^3$.

Je ne garantis pas l'exactitude du résultat, mais c'est quand même un nombre positif.

17.22. On prend un repère tel que le paraboloïde ait pour équation $x^2+y^2-2pz = 0$.

On considère un plan Q, d'équation $z = \alpha x+\beta y+\gamma$, le plan devant être non parallèle à l'axe du paraboloïde.

Le volume cherché est alors :

$$V = \iint_{\Delta}\left(\alpha x+\beta y+\gamma-\frac{x^2+y^2}{2p}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Δ étant l'ensemble des (x, y) tels que l'on ait la cote du point du paraboloïde inférieure à celle du plan, c'est-à-dire :

$$\Delta = \left\{(x, y)\ ;\ \frac{x^2+y^2}{2p} \leqslant \alpha x+\beta y+\gamma\right\}.$$

En fait Δ est le disque défini par l'inéquation :

$$x^2+y^2-2p\alpha x-2p\beta y-2p\gamma \leqslant 0,$$

il est donc centré en $\omega : (p\alpha, p\beta)$, et a pour rayon R tel que :

$$R^2 = 2p\gamma+p^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Au passage, la condition $2p\gamma+p^2(\alpha^2+\beta^2) \geqslant 0$, est celle qui traduit la non vacuité de l'intersection du plan et du paraboloïde.

On a donc :

$$V = -\frac{1}{2p}\iint_{\Delta}((x-p\alpha)^2+(y-p\beta)^2-R^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

et un changement de coordonnées polaires : $x = p\alpha+r\cos\theta$, $y = p\beta+r\sin\theta$, va conduire à :

$$V = -\frac{1}{2p}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R (r^2 - R^2)r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{\pi}{p}\left[\frac{r^4}{4} - R^2\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{R^4\pi}{4p},$$

soit finalement :

$$V = \frac{p\pi}{4}(2\gamma + p\alpha^2 + p\beta^2)^2, \text{si } 2\gamma + p(\alpha^2 + \beta^2) \geqslant 0 \text{ et } V = 0 \text{ sinon.}$$

17.23. a) On a $\omega = e^{-x^2+y^2}(\cos 2xy - i\sin 2xy)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$, d'où :

$$\mathrm{Re}(\omega) = (e^{-x^2+y^2}\cos 2xy)\mathrm{d}x + (e^{-x^2+y^2}\sin 2xy)\mathrm{d}y, \text{ et :}$$

$$\mathrm{Im}(\omega) = (-e^{-x^2+y^2}\sin 2xy)\mathrm{d}x + (e^{-x^2+y^2}\cos 2xy)\mathrm{d}y.$$

En posant $P(x, y) = e^{-x^2+y^2}\cos 2xy$ et $Q(x, y) = e^{-x^2+y^2}\sin 2xy$, c'est encore :

$$\mathrm{Re}(\omega) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \text{ et } \mathrm{Im}(\omega) = -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y.$$

On a alors :

$$Q'_x = e^{-x^2+y^2}(-2x\sin 2xy + 2y\cos 2xy) \text{ et :}$$

$$P'_y = e^{-x^2+y^2}(2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy),$$

d'où $Q'_x - P'_y = 0$: la forme $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{Re}(\omega)$ est fermée sur $\mathbb{R}^2$, ouvert étoilé, donc elle est exacte, (Théorème de Poincaré).

De même on a :

$$P'_x = e^{-x^2+y^2}(-2x\cos 2xy - 2y\sin 2xy), \text{ et :}$$

$$Q'_y = e^{-x^2+y^2}(2y\sin 2xy + 2x\cos 2xy), \text{ d'où :}$$

$P'_x - (-Q'_y) = 0$, et la même conclusion pour $\mathrm{Im}(\omega)$.

b) Le huitième de cercle donné se paramètre en $z = Re^{it}$, t dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc $\mathrm{d}z = iRe^{it}\mathrm{d}t$, et on a :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} i\mathrm{R}e^{-\mathrm{R}^2 e^{2it}} e^{it}\mathrm{d}t$$

$$= i\mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2t} e^{i(t-\mathrm{R}^2\sin 2t)}\mathrm{d}t, \text{ d'où :}$$

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{-z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{R}^2\cos 2t}\mathrm{d}t.$$

Si t se rapproche de $\frac{\pi}{4}$, $\cos 2t$ se rapproche de 0, l'exponentielle de 1 : il y a problème. En fait on va couper l'intégrale en $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}$, et il restera un intervalle de longueur $\frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}$ pour atteindre $\frac{\pi}{4}$: multiplié par R, on a encore une limite nulle.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}\right]$, on a $\cos 2t \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}\right) = \sin\frac{2}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}$,
d'où les majorations :

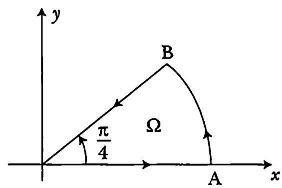
$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{-z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}} e^{-\mathrm{R}^2\sin\frac{2}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}}\mathrm{d}t + \mathrm{R}\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}}^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{\pi}{4}\mathrm{R}e^{-\mathrm{R}^2\sin\frac{2}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}}}.$$

L'exposant se comportant comme $-2\sqrt{\mathrm{R}}$, le majorant tend bien vers 0 si R tend vers $+\infty$.

c) Si on note Ω le huitième de disque limité par les rayons OA, OB et l'arc de cercle, et $\partial\Omega$ son bord orienté, on a :

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \iint_{\Omega}\mathrm{d}\omega = 0 \text{ puisque } \mathrm{d}\omega \text{ est nulle d'après le a).}$$



En paramétrant, on obtient donc :

$$\int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\mathrm{R}}^0 e^{-r^2 e^{i\frac{\pi}{2}}}\,\mathrm{d}\left(re^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0\,.$$

On a $\lim\limits_{\mathrm{R}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}$ qui existe, et, compte tenu de la limite du b), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{R}} (\cos r^2 - i\sin r^2)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}r \\ &= \lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\mathrm{R}} (\cos r^2 + \sin r^2)\,\mathrm{d}r + i\int_0^{\mathrm{R}} (\cos r^2 - \sin r^2)\,\mathrm{d}r\right).\end{aligned}$$

En fait $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x$ est une intégrale impropre convergente en $+\infty$, comme le montre le changement de variable $x^2 = \mathrm{X}$, qui conduit, (on coupe en 1) à considérer $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \mathrm{X}}{2\sqrt{\mathrm{X}}}\,\mathrm{dX}$, que l'on intègre par parties, en posant $u = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}}$, $v' = \cos \mathrm{X}$, d'où $u' = -\frac{1}{4\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}$ et $v = \sin \mathrm{X}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\cos \mathrm{X}}{2\sqrt{\mathrm{X}}}\,\mathrm{dX} &= \left[\frac{\sin \mathrm{X}}{2\sqrt{\mathrm{X}}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\sin \mathrm{X}}{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\,\mathrm{dX} \\ &= -\frac{\sin 1}{2} + \text{une intégrale absolument convergente.}\end{aligned}$$

On vérifierait de même la convergence de $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

En posant alors $\mathrm{A} = \int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{B} = \int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$, on a :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \text{ et } \mathrm{A}-\mathrm{B} = 0\text{, d'où } \mathrm{A} = \mathrm{B} = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{2}}\,.$$

Comme $\mathrm{I}^2 = \iint_{\mathrm{Q}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, avec Q, quart de plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

on a encore, avec $\mathscr{D} = \left\{(r, \theta)\ ;\ 0 \leqslant r\ ;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$:

$$\mathrm{I}^2 = \iint_{\mathscr{D}} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

d'où $\mathrm{I} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

17.24. Il s'agit de calculer une intégrale curviligne, et pour cela il nous faut rechercher la forme différentielle associée.

Si on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $r > 0$, on a, pour $x \neq 0$, $\dfrac{y}{x} = \tan\theta$, ce qui conduit à :

$$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = (1 + \tan^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{x^2 + y^2}{x^2}\mathrm{d}\theta,$$

d'où $\mathrm{d}\theta = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$, expression à laquelle on parviendrait également, pour $y \neq 0$, à partir de $\dfrac{x}{y} = \operatorname{cotan}\theta$.

En notant Γ_r le cercle de centre O, de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique, on doit donc prouver que :

$$\mathrm{F}(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\Gamma_r} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x),$$

est constante par rapport à r.

Sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, on considère alors la fonction u, de classe C^∞, définie par :

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

On a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

De plus, le Laplacien de u vaut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2}{x^2+y^2}-\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

On considère alors la forme différentielle :

$$\omega = f(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\right)-u(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right),$$

définie sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} = \Omega$, de classe C^1.

C'est encore $\omega = P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, avec :

$P = uf'_y-fu'_y$ et $Q = fu'_x-uf'_x$, d'où :

$$Q'_x-P'_y = f'_xu'_x+fu''_{x^2}-u'_xf'_x-uf''_{x^2}$$

$$-u'_yf'_y-uf''_{y^2}+f'_yu'_y+fu''_{y^2}$$

$$= f(u''_{x^2}+u''_{y^2})-u(f''_{x^2}+f''_{y^2}) = 0 \text{ ici.}$$

Soit alors la couronne $\mathscr{C}$ limitée par les deux cercles de centre O et de rayons r et r' avec $0<r<r'$. Sur ce contour, la formule de Green Riemann s'applique et donne :

$\displaystyle\int_{\Gamma_{r'}}\omega-\int_{\Gamma_r}\omega = \iint_{\mathscr{C}}(Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$: l'intégrale de la forme ω est indépendante de r.

Puis on a, sur Γ_r, $x^2+y^2 = r^2$, donc $u(x,y) = \ln r$, et :

$$\int_{\Gamma_r}\omega = \int_{\Gamma_r}f(x,y)\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_r}(\ln r)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$$

$$= F(r)-\ln r\iint_{\Delta_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ceci par Green Riemann, avec Δ_r disque de centre O, de rayon r.

Comme le Laplacien de f est nul, il reste $\displaystyle\int_{\Gamma_r}\omega = F(r)$.

Comme $\int_{\Gamma_r} \omega$ est constant en r, la fonction F est bien constante en r.

Par continuité de f en $(0, 0)$, il est alors facile de justifier que :

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} (f(r\cos t, r\sin t) - f(0, 0))\mathrm{d}t = 0,$$

d'où en fait $\mathrm{F}(r) = 2\pi f(0, 0)$.

17.25. Si un changement de variable pouvait faire passer de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ à du « $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$ », peut-être qu'un calcul de primitive nous tirerait ensuite d'affaire. Cela, c'est comme une différence de carrés qui donne du double produit !

On pose $u = x + y$, $v = x - y$: l'application θ qui à (x, y) associe (u, v) est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et on considère la fonction de u et v définie par $g = f \circ \theta^{-1}$, ou par $f = g \circ \theta$. On a :

$$f'_x = g'_u + g'_v \text{ et } f'_y = g'_u - g'_v, \text{ d'où :}$$

$$f''_{x^2} = g''_{u^2} + 2g''_{uv} + g''_{v^2} \text{ et } f''_{y^2} = g''_{u^2} - 2g''_{uv} + g''_{v^2},$$

donc $f''_{x^2} - f''_{y^2} = 4g''_{uv}$.

On cherche donc, sur l'ouvert défini par la condition $u + v \neq 0$, une fonction g de classe C^∞ telle que :

$$4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{4}{(u+v)^2}\varphi\left(\frac{u-v}{u+v}\right).$$

A-t-on gagné au change ? Oui, car si ϕ est une primitive de φ, on a :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\phi\left(\frac{u-v}{u+v}\right)\right) = \frac{2v}{(u+v)^2}\varphi\left(\frac{u-v}{u+v}\right),$$

et l'équation s'écrit, pour $v \neq 0$:

$$2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(v^{-1}\phi\left(\frac{u-v}{u+v}\right)\right) :$$

on peut effectuer une première intégration.

Application à φ définie par $\varphi(t) = t$.

On doit résoudre :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{u-v}{(u+v)^3} = \frac{1}{(u+v)^2} - \frac{2v}{(u+v)^3}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{1}{u+v} + \frac{v}{(u+v)^2} + h(v)$$

$$= \frac{-u}{(u+v)^2} + h(v),$$

donc, avec A primitive de h, et B fonction d'une variable, A et B de classe C^2, on aura :

$$g(u, v) = \frac{u}{u+v} + A(v) + B(u),$$

et les solutions en x, y sont définies par :

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2x} + A(x-y) + B(x+y),$$

A et B de classe C^2.

17.26. Avec u définie par $u(x, t) = e^{ax+bt}$, on a :

$$u''_{x^2} - u'_t = (a^2 - b)e^{ax+bt},$$

ce sera nul si et seulement si $b = a^2$, donc si on a :

$$u(x, t) = e^{ax}e^{a^2 t}.$$

Pour tout triplet réel (a, x, t), on obtient donc u comme un produit de deux séries absolument convergentes :

$$u(x, t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a^p x^p}{p!} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{t^q a^{2q}}{q!}.$$

On peut les considérer, pour (t, x) fixé, comme deux séries entières en a, de rayon de convergence infini chacune. Elles sont donc absolument convergentes, et leur produit est une série entière en a, de rayon de convergence infini. Si on pose :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x, t)\frac{a^n}{n!},$$

les règles de calcul du terme général d'une série produit donnent :

$$P_{2n}(x, t) = (2n)! \sum_{q=0}^{n} \frac{x^{2n-2q} t^q}{(2n-2q)! q!} = (2n)! \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p} t^{n-p}}{(2p)!(n-p)!},$$

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x, t) &= (2n+1)! \sum_{q=0}^{n} \frac{x^{2n+1-2q} t^q}{(2n+1-2q)! q!} \\ &= (2n+1)! \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p+1} t^{n-p}}{(2p+1)!(n-p)!}. \end{aligned}$$

Sur ces expressions, on peut voir que P_n est un polynôme en t et x de degré total n, unitaire.

Par ailleurs, on peut vérifier, sur les expressions, que $\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} - \frac{\partial P_n}{\partial t} = 0$. Sur l'expression paire, on doit former :

$$(2n)!\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{x^{2p-2}}{(2p-2)!} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \frac{t^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\right),$$

et en posant $q = p - 1$ dans la première somme, on a :

$$(2n)!\left(\sum_{q=0}^{n-1} \frac{x^{2q}}{(2q)!} \frac{t^{n-q-1}}{(n-q-1)!} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \frac{t^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\right)$$: c'est nul. On aurait un calcul tout aussi facile dans le cas impair.

17.27. On utilise la technique des courbes de niveau pour calculer cette intégrale.

Le domaine Ω est la réunion des courbes C_k, ellipses d'équation :

$$x^2 + xy + y^2 = k,$$

lorsque k varie entre 0 et 1.

Si $\mathscr{A}(k)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}_k = \bigcup_{r \in [0, k]} C_r$, on a une fonction dérivable, et, comme sur C_k on a $e^{-(x^2+xy+y^2)} = e^{-k}$, on a :

$$I = \int_0^1 e^{-k} \mathscr{A}'(k) \mathrm{d}k.$$

Le domaine $\mathscr{D}_k$ est l'intérieur d'une ellipse, si a_k et b_k sont ses demi-axes, on aura $\mathscr{A}(k) = \pi a_k b_k$.

Il nous reste à effectuer un changement de repère orthonormé pour éliminer le xy : posons $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$, (rotation de $\frac{\pi}{4}$ pour obtenir le nouveau repère).

On a $x^2+y^2+xy = (X^2+Y^2)+\frac{1}{2}(X^2-Y^2) = \frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2$, d'où l'équation de C_k dans ce nouveau repère orthonormé :

$$\frac{X^2}{\frac{2k}{3}}+\frac{Y^2}{2k}-1 = 0,$$

et $b_k = \sqrt{\frac{2k}{3}}$, $a_k = \sqrt{2k}$, ce qui donne $\mathscr{A}(k) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}k$,

et conduit à :

$$I = \int_0^1 \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-k}dk = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[-e^{-k}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

On peut aussi calculer I classiquement en faisant d'abord la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, d'où, avec $\Omega = \left\{(X, Y)\ ;\ 0 \leqslant \frac{3}{2}X^2+\frac{Y^2}{2} \leqslant 1\right\}$, une expression :

$$I = \iint_{\Omega} e^{-\left(\frac{3}{2}X^2+\frac{Y^2}{2}\right)}dXdY.$$

En posant $\sqrt{\frac{3}{2}}X = X_1$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}Y = Y_1$, puis en définissant $\Omega' = \{(X_1, Y_1)\ ;\ 0 \leqslant X_1^2+Y_1^2 \leqslant 1\}$, comme le jacobien de la transformation sera $\frac{2}{\sqrt{3}}$, on a :

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Omega'} e^{-(X_1^2+Y_1^2)}dX_1dY_1.$$

Un passage en polaire, avec $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$, donne enfin :

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{[0,1] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^1,$$

et on retrouve bien $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$: quelle chance !

17.28. Par Fubini, si on intègre d'abord pour x fixé, on a :

$$I(a, b) = \int_0^1 e^{x \ln a}\left(\int_0^{1-x} e^{y \ln b} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

<u>*Premier cas : $b = 1$*</u>.

Alors $I(a, 1) = \int_0^1 e^{x \ln a}(1 - x)\mathrm{d}x$.

Si de plus $a = 1$, il reste $I(1, 1) = \int_0^1 (1 - x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1$, soit $I(1, 1) = \frac{1}{2}$, (c'est l'aire de Δ en fait).

Si $b = 1$ et $a \neq 1$, on poursuit en intégrant par parties : $u = 1 - x$, $e^{x \ln a}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$ d'où $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ et $v = \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a}$, ce qui donne, pour $a \neq 1$:

$$I(a, 1) = \left[\frac{(1-x)}{\ln a} e^{x \ln a}\right]_0^1 + \frac{1}{\ln a}\int_0^1 e^{x \ln a}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{(\ln(a))^2}\left[e^{x \ln a}\right]_0^1, \text{ soit :}$$

$$I(a, 1) = -\frac{1}{\ln a} + \frac{a - 1}{\ln^2 a}, \text{ pour } a \neq 1.$$

Pour $b \neq 1$ et $a = 1$, vu la symétrie de Δ en x et y, on aurait :

$$I(1, b) = \frac{b - 1 - \ln b}{\ln^2 b}, \text{ si } b \neq 1.$$

<u>*Si* $a \neq 1$ *et* $b \neq 1$</u>.

On obtient au départ :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^1 e^{x\ln a}\left[\frac{e^{y\ln b}}{\ln b}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\ln b}\int_0^1 (e^{x(\ln a - \ln b) + \ln b} - e^{x\ln a})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\ln b}\int_0^1 (b \cdot e^{x\ln(a/b)} - e^{x\ln a})\mathrm{d}x.$$

Si $a \neq b$*,* on obtient :

$$\mathrm{I}(a, b) = \frac{1}{\ln b}\left[\frac{b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}e^{x\ln(a/b)} - \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\ln b}\left(\frac{b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\left(\frac{a}{b} - 1\right) - \frac{1}{\ln a}(a - 1)\right)$$

$$= \frac{a - b}{(\ln b)(\ln a - \ln b)} - \frac{a - 1}{(\ln a)(\ln b)}, \text{ si } a \neq b, a \neq 1, b \neq 1.$$

Enfin, si $a = b \neq 1$, il reste :

$$\mathrm{I}(a, a) = \frac{1}{\ln a}\int_0^1 (a - e^{x\ln a})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a}{\ln a} - \frac{1}{(\ln a)^2}\left[e^{x\ln a}\right]_0^1, \text{ soit encore :}$$

$$\mathrm{I}(a, a) = \frac{1 - a + a\ln a}{(\ln a)^2}, \text{ pour } a \neq 1.$$

17.29. Avec $\mathrm{P}(x, y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x\sin x - y\cos x)$ et

$\mathrm{Q}(x, y) = \dfrac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x\cos x + y\sin x)$, on a :

$$Q'_x = \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(\cos x - x\sin x + y\cos x), \text{ et :}$$

$$P'_y = \left(\frac{-e^{-y}}{x^2+y^2} - \frac{2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\right)(x\sin x - y\cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x),$$

donc, (un peu de courage), $Q'_x - P'_y$ va s'écrire sous la forme :

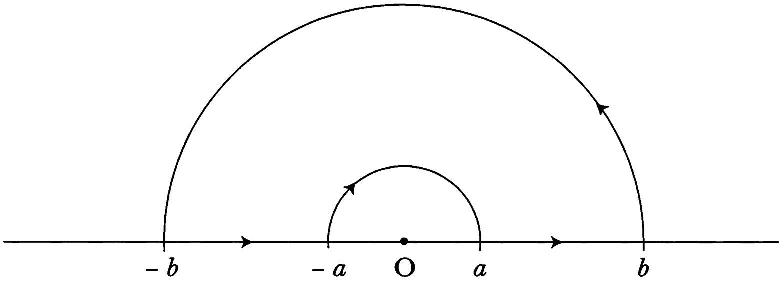
$$\frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x^2\cos x - 2xy\sin x + 2yx\sin x - 2y^2\cos x)$$

$$+ \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(\cos x - x\sin x + y\cos x + x\sin x - y\cos x + \cos x)$$

$$= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2(x^2+y^2)\cos x) + \frac{2e^{-y}\cos x}{x^2+y^2} = 0 \text{ : ouf !}$$

L'intégrale curviligne proposée est donc nulle, car c'est $\iint_\Omega (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, avec Ω, domaine limité par a et b.

On va paramétrer le demi-cercle de rayon a par $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, θ variant de π à 0, (domaine « à gauche »), et le demi-cercle de rayon b, $(b > a)$, par $x = b\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, θ croisant de 0 à π cette fois. Enfin les deux segments sont paramétrés par x croissant de $-b$ à $-a$, puis de a à b, avec $y = 0$.



Sur le demi-cercle de rayon b, la forme à intégrer devient :

$$\frac{e^{-b\sin\theta}}{b^2}[(b\cos\theta\sin(b\cos\theta)-b\sin\theta\cos(b\cos\theta))(-b\sin\theta)$$
$$+(b\cos\theta\cos(b\cos\theta)+b\sin\theta\sin(b\cos\theta))b\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{e^{-b\sin\theta}}{b^2}b^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta = e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta,$$

donc l'intégrale curviligne s'écrit :

$$0 = \int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-b}^{-a}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$
$$+\int_\pi^0 e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Étudions la limite, si b tend vers $+\infty$, et a vers 0.

On a $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-b\sin\theta} = 0$ si $\sin\theta > 0$, et c'est uniforme en θ si $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$.

On se fixe $\varepsilon > 0$.

On a $|e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)| \leqslant 1$, pour tout θ de $[0, \pi]$, donc :

$$\left|\int_0^\varepsilon e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta\right| + \left|\int_{\pi-\varepsilon}^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\varepsilon, \quad \text{et}$$

ceci, pour tout b ; puis, si $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, on aura :

$|e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)| \leqslant e^{-b\sin\varepsilon}$, donc :

$$\left|\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \pi e^{-b\sin\varepsilon}, \text{ majorant qui tend vers 0}$$

si b tend vers $+\infty$, ε étant fixé. Donc, à cet ε, on associe finalement b_0 tel que, $\forall b \geqslant b_0$, $\left|\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 3\varepsilon$, en traduisant la limite.

Passons à $\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

Cette fois a tend vers 0, $a\sin\theta \in [0, a]$ et $|a\cos\theta| \leqslant a$: la continuité en 0 de la fonction exponentielle et du cosinus donnent :

à $\varepsilon > 0$, on associe α tel que $|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |e^{-x}\cos x - 1| \leqslant \varepsilon$, donc ici, si $0 < a \leqslant \alpha$, $\forall \theta \in [0, \pi]$, $|a \sin\theta| \leqslant \alpha$, et on aura

$$\left|\int_0^\pi (e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta) - 1)\right| d\theta \leqslant \pi\varepsilon.$$

En rassemblant tout, on a :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ et $\exists b_0 > 0$ tel que, $\forall a \in]0, \alpha[$, $\forall b \geqslant b_0$,

$$\left|2\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx - \pi\right| \leqslant 3\varepsilon + \pi\varepsilon \ ;$$

c'est dire que $\lim\limits_{\substack{a \to 0^+ \\ b \to +\infty}} \displaystyle\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

17.30. Si on associe au champ V la forme différentielle :

$$(2x\cos xy - x^2 y \sin xy)dx - x^3 \sin xy dy = Pdx + Qdy, \text{ on a :}$$

$$Q'_x - P'_y = -3x^2\sin xy - x^3 y\cos xy + 2x^2\sin xy + x^2\sin xy + x^3 y\cos xy$$
$$= 0,$$

donc la circulation du champ, qui est l'intégrale de la forme, devient par Green Riemann, l'intégrale double de $Q'_x - P'_y$ sur le disque unité : elle est nulle.

En fait, la forme étant de classe C^1 sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$, et fermée, elle est exacte, donc il existe une fonction f de x et y telle que $df = Pdx + Qdy$.

On a $P = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy = f'_x$ et,

$$Q = -x^3 \sin xy = f'_y.$$

On doit avoir $f(x, y) = x^2\cos xy + g(x)$, d'où :

$$f'_x(x, y) = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy + g'(x) = P(x, y) \ ;$$

ce qui donne $g'(x) = 0$ et $g(x) = a$, constante.

Finalement, le champ donné est le champ de gradients de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2\cos xy + a$.

17.31. Avec $P = (3x^2 + y^2)y$ et $Q = (y^2 - x^2)x$, on a ici :

$Q'_x - P'_y = y^2 - 3x^2 - 3x^2 - 3y^2 = -6x^2 - 2y^2$: on ne gagne pas à tous les coups !

Alors paramétrons le contour, non fermé d'ailleurs, par $y = x+1$, pour x dans $[0, 1]$. L'intégrale n'offre aucune difficulté, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^1 [(3x^2 + x^2 + 2x + 1)(x+1) + (x^2 + 2x + 1 - x^2)x]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)\mathrm{d}x \\ &= 1 + \frac{8}{3} + 2 + 1 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

: je suis confus de vous avoir dérangé pour si peu. Cela ne compte pas, faites en un autre.

17.32. On intègre d'abord par rapport à z, pour (x, y) fixé dans la partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$. On a :

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathscr{D}} x^p y^q \left(\int_0^{1-x-y} z^r (1-x-y-z)^s \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

et l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^{1-x-y} z^r(1-x-y-z)^s \mathrm{d}z$ va se calculer par parties, si r et s sont strictement positifs.

Avec $u = (1-x-y-z)^s$ et $\mathrm{d}v = z^r \mathrm{d}z$, on a :

$$\mathrm{d}u = -s(1-x-y-z)^{s-1}\mathrm{d}z \text{ et } v = \frac{z^{r+1}}{r+1}.$$

Comme le produit uv est nul pour $z = 0$ si $r > 0$, et pour $z = 1-x-y$ si $s > 0$, on a :

$$\mathrm{J} = \frac{s}{r+1}\int_0^{1-x-y} z^{r+1}(1-x-y-z)^{s-1}\mathrm{d}z,$$

et on poursuit les intégrations par parties, tant que l'exposant de $(1-x-y-z)$ est entier > 0.

Ceci conduit à :

$$\mathrm{J} = \frac{s!}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+s)}\int_0^{1-x-y} z^{r+s}\mathrm{d}z,$$

ce qui se calcule sans problème et donne :

$$\mathrm{J} = \frac{s!}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+s+1)}(1-x-y)^{r+s+1}, \text{ d'où :}$$

$$I = \iint_{\mathscr{D}} \frac{r!s!}{(r+s+1)!} x^p y^q (1-x-y)^{r+s+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ ; et, par Fubini on a :}$$

$$I = \frac{r!s!}{(r+s+1)!} \int_0^1 x^p \left(\int_0^{1-x} y^q (1-x-y)^{r+s+1} \mathrm{d}y \right).$$

On calcule là encore $\int_0^{1-x} y^q (1-x-y)^{r+s+1} \mathrm{d}y$, par parties, en dérivant y^q et en prenant des primitives de $(1-x-y)^{r+s+1}$, on obtiendra :

$$\int_0^{1-x} y^q (1-x-y)^{r+s+1} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{q!}{(r+s+2)\ldots\ldots(r+s+q+1)} \int_0^{1-x} (1-x-y)^{r+s+q+1} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{q!}{(r+s+2)\ldots\ldots(r+s+q+2)} (1-x)^{r+s+q+2},$$

et finalement, $I = \dfrac{r!s!q!}{(r+s+q+2)!} \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^{r+s+q+2} \mathrm{d}x$,

ce qui se calcule aussi par p intégrations par parties, pour donner :

$$I = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}$$

17.33. La nappe S peut-être paramétrée, en fonction de (x, y) dans le triangle T : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$, par :

$$\overrightarrow{Om} \begin{vmatrix} x = x \\ y = y \\ z = 6 - 2x - 2y \end{vmatrix}, \text{ d'où } \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}x} \wedge \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}y} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix},$$

vecteur normal à la nappe, et orienté comme on le veut.

Le flux est alors :

$$V = \iint_T \vec{V}(x, y) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}x} \wedge \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_T (-2y^2 + 2xy + (y + 6 - 2x - 2y)) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_T (-2y^2 + 2xy - y - 2x + 6) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} (-2y^2 + 2xy - y - 2x + 6)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left[-\frac{2}{3}(3-x)^3 + x(3-x)^2 - \frac{(3-x)^2}{2} + (-2x+6)(3-x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 18x - \frac{9}{2}\right)\mathrm{d}x. \\
&= \frac{5}{12}\cdot 3^4 - \frac{7}{2}\cdot 3^3 + 9\cdot 3^2 - \frac{9}{2}\cdot 3 = \frac{27}{4},
\end{aligned}$$

mais il n'y aurait rien d'étonnant à ce qu'il y ait une erreur.

17.34. On paramètre la demi-sphère en $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, pour $x^2+y^2 \leqslant 1$, ce qui définit le disque unité de $\mathbb{R}^2$, noté D, et la normale orientée sortante est dirigée par :

$$\frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial y} = \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{matrix}\right. ,$$

(vecteur non unitaire, attention).

Le flux cherché est donc :

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \left(\frac{x^2+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - 2y\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{(x^2+y^3-2y(1-x^2-y^2))}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{x^2+y(3y^2+2x^2-2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

La partie contenant y en facteur est une fonction impaire en y, et le domaine D est symétrique par rapport à Ox : ceci donne une intégrale nulle, donc il reste :

$$I = \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ intégrale que l'on va calculer en polaires.

Pour (r, θ) dans $\Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, on aura :

$$\mathrm{I} = \iint_{\Delta} \frac{r^2 \cos^2\theta}{\sqrt{1-r^2}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} \mathrm{d}r\right)$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} \frac{(\cos 2\theta + 1)}{2} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{r^3 \mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}\right).$$

La première intégrale vaut π. Dans la deuxième, on pose $1 - r^2 = u^2$, (avec $u \geqslant 0$), donc :

$$\int_0^1 \frac{r^3 \mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}} = \int_1^0 \frac{(1-u^2)(-u\mathrm{d}u)}{u} = \int_0^1 (1-u^2)\mathrm{d}u = 1 - \frac{1}{3},$$

et finalement $\mathrm{I} = \frac{2\pi}{3}$.

17.35. En fait, la divergence du champ V est :

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{V}} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz)$$
$$= 1 + 2y - 2y = 1.$$

Donc, si on « ferme » la nappe par l'ellipse E d'équations $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, le flux de V à travers cette nappe fermée sera égal au volume du demi-ellipsoïde, donc à $\frac{2}{3}\pi abc$.

Sur l'ellipse, le champ vaut $\vec{\mathrm{V}} = x\vec{i} + y^2\vec{j}$, $(z = 0)$, et la normale sortante est $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$, donc le flux de $\vec{\mathrm{V}}$ à travers E vaut $\iint_{\mathrm{E}} 0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, finalement le flux cherché est $\frac{2}{3}\pi abc$.

Vous pouvez voir en 17.20 le volume de l'ellipsoïde.

17.36. Les coordonnées polaires s'imposent pour ce calcul. En m, de coordonnées polaires (r, θ), l'élément d'aire : $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, correspondant à une densité $\frac{r}{\mathrm{R}}\delta$, a une masse égale à $\frac{\delta}{\mathrm{R}}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, donc avec $(r, \theta) \in \Omega = [0, \mathrm{R}] \times [0, 2\pi]$, la masse cherchée est :

$$\mathrm{M} = \iint_{\Omega} \frac{\delta}{\mathrm{R}} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\delta}{\mathrm{R}} \int_0^{\mathrm{R}} r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi\delta\mathrm{R}^2}{3}.$$

17.37. On prend un repère orthonormé d'origine O, A ayant pour coordonnées $(b, 0)$ et B $(0, a)$.

En M (x, y), la densité est ky, donc les coordonnées x_{G} et y_{G} du centre de gravité sont :

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{\iint_{\mathrm{T}} x(ky)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{\mathrm{T}} ky\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \text{ et } y_{\mathrm{G}} = \frac{\iint_{\mathrm{T}} y(ky)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{\mathrm{T}} ky\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

Le scalaire k se simplifie, et il reste trois intégrales doubles faciles à calculer.

On a : $$\iint_{\mathrm{T}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^b \left(\int_0^{a - \frac{a}{b}x} y\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^b \frac{a^2}{2b^2}(b-x)^2 \mathrm{d}x = \frac{a^2}{6b^2}\left[-(b-x)^3 \right]_0^b$$

$$= \frac{a^2 b}{6} ;$$

puis $$\iint_{\mathrm{T}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^b \frac{a^2}{2b^2} x(b^2 + x^2 - 2bx)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^b \frac{a^2}{2b^2}(x^3 - 2bx^2 + b^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^2}{2b^2}\left(\frac{b^4}{4} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{2} \right) = \frac{a^2 b^2}{24},$$

enfin $\displaystyle\iint_T y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^b\left(\int_0^{\frac{a}{b}(b-x)} y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{a^3}{3b^3}\int_0^b (b-x)^3\mathrm{d}x = \frac{a^3b}{12}.$$

Les coordonnées cherchées sont donc :

$$x_G = \frac{\frac{a^2b^2}{24}}{\frac{a^2b}{6}} = \frac{b}{4} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\frac{a^3b}{12}}{\frac{a^2b}{6}} = \frac{a}{2}.$$

17.38. 1°) Si l'équation de la demi-méridienne est $z = \varphi(r)$, une paramétrisation de la nappe de révolution S est :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \varphi(r) \end{cases}$$, et on obtient un vecteur normal :

$$\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial r} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial \theta} = \left|\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ \varphi'\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}-r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-r\varphi'\cos\theta \\ -r\varphi'\sin\theta \\ r\end{matrix}\right. ,$$

d'où, r étant positif, $\left\|\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial r} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial \theta}\right\| = r(1+\varphi'^2)^{1/2}$, et, la nappe étant paramétrée par $(r, \theta) \in [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] = \Omega$, une aire $a(\mathrm{S})$ valant :

$$a(\mathrm{S}) = \iint_\Omega r(1+(\varphi'(r))^2)^{1/2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r(1+\varphi'^2)^{1/2}\mathrm{d}r.$$

Par ailleurs, l'arc paramétré Γ : $r = r, z = \varphi(r)$, est rectifiable et $\mathrm{d}s^2 = (1+\varphi'^2)\mathrm{d}r^2$, d'où, avec l'arc orienté suivant les r croissants, une expression :

$r(1+\varphi'^2)^{1/2}\mathrm{d}r$ remplacée par $r\mathrm{d}s$, ce qui donne bien la formule

$$a(\mathrm{S}) = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}s.$$

2°) Si on assimile Γ à un fil homogène d'équation $z = \varphi(r)$ dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ r, z)$, l'élément de matière de longueur ds aura une masse λds et l'abscisse du centre de gravité est :

$$r_0 = \frac{\displaystyle\int_\Gamma \lambda r(m)\mathrm{d}s(m)}{\displaystyle\int_\Gamma \lambda \mathrm{d}s(m)} = \frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}s}{\ell(\Gamma)},$$

les λ se simplifiant, (linéarité de l'intégrale oblige), et $\ell(\Gamma)$ étant la longueur de l'arc.

Donc $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}s = r_0\ell(\Gamma)$ et $a(S) = (2\pi r_0)\ell(\Gamma)$:

on a bien le premier Théorème de Guldin.

17.39. On se donne un repère orthonormé, $(O\ ;\ x, y, z)$, l'axe Oz étant l'axe de révolution du solide, et on suppose que la plaque demi-méridienne, dans le plan xOz est donnée par :

$$\Omega = \{(x, z)\ ;\ a \leqslant z \leqslant b\ ;\ 0 \leqslant x_1(z) \leqslant x \leqslant x_2(z)\}.$$

Pour calculer le volume V du solide S, on peut terminer le calcul de l'intégrale triple,

$$V = \iiint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

par l'intégrale par rapport à z variant de a à b, et pour z fixé, l'intégrale double en x, y est l'aire de la couronne de rayons intérieurs et extérieurs $x_1(z)$ et $x_2(z)$. Elle vaut donc :

$\pi[(x_2(z))^2 - (x_1(z))^2]$, d'où :

$$V = \pi\int_a^b [(x_2(z))^2 - (x_1(z))^2]\mathrm{d}z.$$

Par ailleurs, la plaque Ω étant supposée de densité σ, dans le plan xOz, l'abscisse du centre de gravité sera :

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_\Omega \sigma x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_\Omega \sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{\displaystyle\iint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

En notant $\mathscr{A}(\Omega)$ l'aire de la demi-méridienne, il nous reste à calculer :

$$\iint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_{x_1(z)}^{x_2(z)} x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_a^b [(x_2(z))^2 - (x_1(z))^2]\mathrm{d}z,$$

pour constater que :

$$\int_a^b [(x_2(z))^2 - (x_1(z))^2]\mathrm{d}z = 2\mathscr{A}(\Omega)x_G,$$

et que $V = 2\pi\mathscr{A}(\Omega)x_G = (2\pi x_G)\mathscr{A}(\Omega)$.

C'est bien le produit de l'aire de Ω par la longueur du cercle décrit par le centre de gravité.

17.40. Un tore c'est le solide engendré par la rotation d'un disque Γ autour d'une droite D de son plan.

Si le disque, de centre O et de rayon R, est tel que la distance d de O à la droite D vérifie $d > R$, le tore est dit à collier, (le trou du milieu).

Le centre de gravité du cercle, bord de Γ, supposé homogène, est le centre du cercle, qui décrit une circonférence de longueur $2\pi d$, et la demi-méridienne a pour longueur $2\pi R$, donc l'aire du tore à collier est $4\pi^2 Rd$.

Le centre de gravité du disque homogène Γ est encore O, l'aire de Γ est πR^2, donc le volume du tore à collier est $2\pi^2 R^2 d$.

Quand la nappe de révolution est simple, le calcul de son aire et de son volume sont facilités par les Théorèmes de Guldin.

17.41. On prend un repère tel que Oz soit l'axe du tore, les deux plans méridiens ayant pour équations $y = x$ et $y = -x$, et xOy étant plan de symétrie.

Le solide S admet les plans xOy et xOz pour plans de symétrie, donc le centre de gravité G est sur Ox, et on cherche son abscisse :

$$\xi = \frac{\iiint_S x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\text{volume}(S)}.$$

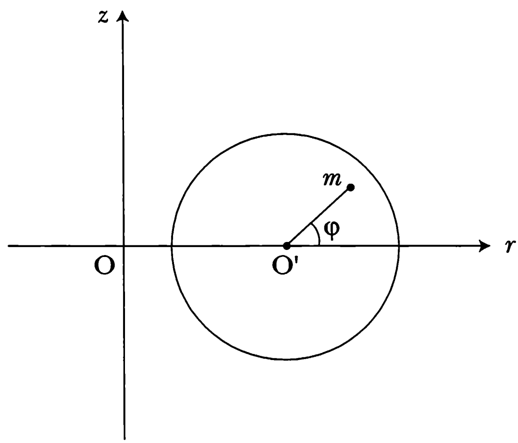
Le volume est le quart de celui du tore. Si le tore est engendré par le disque Γ de centre O', situé à la distance d de l'axe des z, et de rayon R, le volume du tore total est $2\pi^2 R^2 d$, (Théorème de Guldin, voir 17.40), donc le volume de S est $\frac{1}{2}\pi^2 R^2 d$.

Pour calculer l'autre intégrale on va changer de variables. On peut passer au paramétrage suivant :

un point m de Γ, dans le plan $(\mathrm{O}\ ;\ r, z)$, serait donné par :

$$\begin{cases} r = d + \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

pour $(\varphi, \rho) \in [0, 2\pi] \times [0, \mathrm{R}]$;



puis, si θ est l'angle du plan (O, m, z) et du plan de symétrie $x\mathrm{O}z$ du solide S, avec θ variant de $-\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}$, on aura :

$$\begin{cases} x = (d + \rho\cos\varphi)\cos\theta, \\ y = (d + \rho\cos\varphi)\sin\theta, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

comme paramétrage de S, avec (θ, φ, ρ) dans la partie

$$\mathscr{D} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi] \times [0, \mathrm{R}] \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Pour utiliser ce paramétrage, il nous reste à calculer le déterminant de la matrice jacobienne. On a :

matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} -(d+\rho\cos\varphi)\sin\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ (d+\rho\cos\varphi)\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

donc, le jacobien vaut :

$$\rho(d+\rho\cos\varphi)\begin{vmatrix} -\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \rho(d+\rho\cos\varphi)[-\sin\theta(-\sin^2\varphi\sin\theta-\cos^2\varphi\sin\theta)$$
$$-\cos\theta(-\sin^2\varphi\cos\theta-\cos^2\varphi\cos\theta)]$$

$= \rho(d+\rho\cos\varphi)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = \rho(d+\rho\cos\varphi)$, quantité positive puisque $d > \mathrm{R} \geqslant \rho$. On a donc :

$$\iiint_S x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathscr{D}} \rho(d+\rho\cos\varphi)^2\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\iint_{[0,2\pi]\times[0,\mathrm{R}]}\rho(d+\rho\cos\varphi)^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\mathrm{R}}\rho\left(\int_0^{2\pi}\left(d^2+2d\rho\cos\varphi+\rho^2\frac{\cos 2\varphi+1}{2}\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\rho$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\mathrm{R}}\rho\left(2\pi d^2+2d\rho[\sin\varphi]_0^{2\pi}+\rho^2\pi+\rho^2\left[\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\mathrm{R}}\rho(2\pi d^2+\rho^2\pi)\mathrm{d}\rho$$

$$= \sqrt{2}\left[\pi d^2\rho^2+\pi\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\mathrm{R}}$$

$$= \sqrt{2}\pi\left(d^2\mathrm{R}^2+\frac{\mathrm{R}^4}{4}\right) = \pi\sqrt{2}\mathrm{R}^2\left(d^2+\frac{\mathrm{R}^2}{4}\right).$$

Il en résulte que l'abscisse cherchée est :

$$x_G = \frac{\pi\sqrt{2}\mathrm{R}^2(4d^2+\mathrm{R}^2)}{4\frac{\pi^2}{2}\mathrm{R}^2 d} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi d}(4d^2+\mathrm{R}^2).$$

J'espère que vous n'avez pas été perturbé par le produit de d et de ρ, dans l'intégrale, et de $d\rho$ final ! Que voulez-vous, on a parfois des notations malheureuses !

17.42. Un changement de variables s'impose, inspiré des coordonnées sphériques. C'est :

$$\begin{cases} x = 3r\sin\varphi\cos\theta \\ y = 2r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

pour $(r, \theta, \varphi) \in [0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] = \Omega$.

Le jacobien de cette transformation est le déterminant de la matrice jacobienne J, avec :

$$J = \begin{pmatrix} 3\sin\varphi\cos\theta & -3r\sin\varphi\sin\theta & 3r\cos\varphi\cos\theta \\ 2\sin\varphi\sin\theta & 2r\sin\varphi\cos\theta & 2r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

d'où, en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det(J) &= r^2[\cos\varphi(-6\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta - 6\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta) \\ &\qquad -\sin\varphi(6\sin^2\varphi\cos^2\theta + 6\sin^2\varphi\sin^2\theta)] \\ &= 6r^2(-\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) = -6r^2\sin\varphi, \end{aligned}$$

d'où, pour φ dans $[0, \pi]$, une valeur absolue du jacobien valant $6r^2\sin\varphi$.

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\mathscr{D}} (2x + 3y + 6z)^2 dxdydz \\ &= \iiint_{\Omega} 36r^2(\sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi)^2 6r^2\sin\varphi dr d\theta d\varphi \\ &= 216\int_0^a r^4 dr \iint_U [\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta \\ &\qquad + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta + 2\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta]\sin\varphi d\theta d\varphi \end{aligned}$$

avec $U = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

C'est encore :

$$\mathrm{I} = \frac{216a^5}{5}\iint_{\mathrm{U}}(1+\sin^2\varphi\sin 2\theta + \sin 2\varphi(\sin\theta+\cos\theta))\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{216a^5}{5}\int_0^{\pi}\Big(2\pi\sin\varphi + \sin^3\varphi\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta +$$

$$\sin\varphi\sin 2\varphi\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\Big)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{216a^5}{5}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

puisque les intégrales sur $[0, 2\pi]$ des fonctions de θ sont nulles par 2π périodicité des primitives.

Finalement $\mathrm{I} = \dfrac{864\pi a^5}{5}$.

17.43. Comprenons d'abord le problème. On considère $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique et la boule $\mathscr{B}$ définie par :

$$\mathscr{B} = \{(x_1, \ldots, x_p)\ ;\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 \leqslant a^2\}.$$

En généralisant les intégrales doubles, $(p = 2)$, triples $(p = 3)$, on veut calculer :

$$\mathrm{V}_p(a) = \iint\cdots\int_{\mathscr{B}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\ldots\mathrm{d}x_p,$$

et, en généralisant le Théorème de Fubini, on va calculer, pour x_1 fixé entre $-a$ et a, l'intégrale par rapport à $x_2, \ldots, x_p$ tels que :

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_p^2 \leqslant a^2 - x_1^2,$$

donc tels que $(x_2, \ldots, x_p)$ décrive la boule $\mathscr{B}'$ de rayon $\sqrt{a^2 - x_1^2}$ dans $\mathbb{R}^{p-1}$. Avec les notations précédentes on a :

$$\mathrm{V}_p(a) = \int_{-a}^{a}\Big(\iint\cdots\int_{\mathscr{B}'}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\ldots\ldots\mathrm{d}x_p\Big)\mathrm{d}x_1,$$

$$= \int_{-a}^{a}\mathrm{V}_{p-1}(\sqrt{a^2 - x_1^2})\mathrm{d}x_1.$$

Mais, par homothétie, le volume de la boule de rayon r, dans $\mathbb{R}^p$, est $r^p \cdot$ volume de la boule unité, (on pose $x_1 = ry_1, \ldots\ldots x_p = ry_p$, d'où un jacobien égal à r^p dans le changement de variable faisant passer de la boule de rayon r à celle de rayon 1), d'où :

$V_{p-1}(\sqrt{a^2 - x_1^2}) = (a^2 - x_1^2)^{\frac{p-1}{2}} V_{p-1}(1)$, et $V_{p-1}(a) = a^{p-1} V_{p-1}(1)$, d'où :

$$V_p(a) = \int_{-a}^{a} \left(1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2\right)^{\frac{p-1}{2}} V_{p-1}(a) \mathrm{d}x_1 .$$

En posant $x_1 = a \sin t$, on obtient :

$$V_p(a) = a V_{p-1}(a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1} t \cos t \mathrm{d}t = 2a V_{p-1}(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p t \mathrm{d}t .$$

Le calcul de $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p t \mathrm{d}t$, intégrale de Wallis est classique.

Une intégration par parties donne, ($u = \cos^{p-1} t$, $\mathrm{d}v = \cos t \mathrm{d}t$) :

$$I_p = [\sin t \cos^{p-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (p-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2} t \sin^2 t \mathrm{d}t$$

$$= (p-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{p-2} t - \cos^p t) \mathrm{d}t, \text{d'où l'on déduit :}$$

$$p I_p = (p-1) I_{p-2}, \text{ ceci pour } p \geqslant 2.$$

Le calcul se fait par récurrence et comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, il conduit à :

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2p)} I_0 = \frac{(2p)!}{(2 \cdot 4 \cdot \ldots 2p)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2},$$

et à :

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2p+1)} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} .$$

Les relations :

$$\begin{aligned} V_p(a) &= 2aV_{p-1}(a)I_p, \\ V_{p-1}(a) &= 2aV_{p-2}(a)I_{p-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V_2(a) &= 2aV_1(a)I_2, \end{aligned}$$

conduisent à :

$$V_p(a) = (2a)^{p-1}V_1(a)I_1I_2\ldots\ldots I_{p-1}I_p, \text{ car } I_1 = 1.$$

Or $V_1(a) = 2a$, (longueur du segment de « longueur » $2a$ dans $\mathbb{R}$), alors que $I_{2k-1}I_{2k} = \dfrac{\pi}{4k}$.

On a donc :

$$V_{2p}(a) = (2a)^{2p}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^p\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{p!} = a^{2p}\frac{\pi^p}{p!}, \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} V_{2p+1}(a) &= (2a)^{2p+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^p\frac{1}{2^p}\frac{1}{p!}I_{2p+1} = a^{2p+1}\cdot 2\cdot\pi^p\cdot\frac{1}{p!}\cdot 2^{2p}\frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{2^{2p+1}p!\pi^p}{(2p+1)!}a^{2p+1}. \end{aligned}$$

Pour $p = 1$, on retrouve les résultats connus : aire d'un disque et volume d'une sphère : $V_2(a) = \pi a^2$ et $V_3(a) = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Septembre 1997 — N° 44 450

C'est peut-être en géométrie que l'évolution récente des programmes de mathématiques spéciales se manifeste le plus.

Si l'utilisation de logiciels performants rend caducs de nombreux exercices de construction de courbes, ou permet des représentations de nappes par des méthodes numériques, elle ne dispense pas pour autant le candidat de justifications rigoureuses.

J'ai mis en évidence la manière selon laquelle l'algèbre ou la topologie peuvent intervenir pour décomposer la résolution d'un travail compliqué en étapes simples. Toutefois, j'ai davantage privilégié l'étude de questions où la géométrie analytique nécessite l'étude du mode de représentation et du choix du repère.

218 FF 22412581/9/97