

Thm. $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Ouvert? Soit $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus GL_n(\mathbb{C})$. Soit $(\pi_k) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\pi_k \rightarrow \pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. $\pi_k \notin GL_n(\mathbb{C})$ donc $\det(\pi_k) = 0$
2. Or $\det(\pi_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (\pi_k)_{1, \sigma(1)} \cdots (\pi_k)_{n, \sigma(n)}$
3. $\pi_k \rightarrow \pi$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$ en dimension finie
4. donc $0 \leq |(\pi_k)_{ij} - \pi_{ij}| \leq \|\pi_k - \pi\|_{\infty}$
5. Par Thm d'Encadrement, $(\pi_k)_{ij} \xrightarrow{0} \pi_{ij}$
6. Par opérations, $\det(\pi_k) \rightarrow \det(\pi)$
7. Par limite, $\det(\pi) = 0$ et $\pi \notin GL_n(\mathbb{C})$

4c. D'où F fermé et $GL_n(\mathbb{C})$ ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dense? Soit $\pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. π est trigonalisable
2. Il existe $(P, T) \in GL_n(\mathbb{C}) \times T_n^+(\mathbb{C})$ tel que $\pi = PTP^{-1}$
3. On peut supposer $\pi \notin GL_n(\mathbb{C})$ (sinon la suite $(\pi)_{n \geq 0}$ convient)
4. Soit $T_k = T + \frac{1}{k} I_n$. Si $\lambda_i = 0$, $\lambda_i + \frac{1}{k} \neq 0$. Sinon, $\lambda_i + \frac{1}{k} \rightarrow \lambda_i \neq 0$
5. Pour k assez grand, $\lambda_i + \frac{1}{k} \neq 0$ donc $T_k \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T_k \rightarrow T$
6. Donc $PT_k P^{-1} \rightarrow PTP^{-1} = \pi$ par opérations.
7. Avec $\pi_k = PT_k P^{-1}$, on a une suite de $GL_n(\mathbb{C})$ qui tend vers π

4c. D'où $GL_n(\mathbb{C})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$