

Topologie / Enveloppe Convexe & Théorème de Carathéodory (ex C3) $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -evn avec $E \neq \{0\}$

- 1) Existence ? On pose $\mathcal{C}(A) = \bigcap_{A \subseteq C, C \text{ convexe}} C$ pour $A \subseteq E$
- * $\mathcal{C}(A)$ Convexe ? Sans difficultés
 - * $A \subseteq \mathcal{C}(A)$? Sans difficultés
 - * Minimal pour $\subseteq$? Si C est un convexe de E qui contient A , alors $\mathcal{C}(A) \subseteq C$

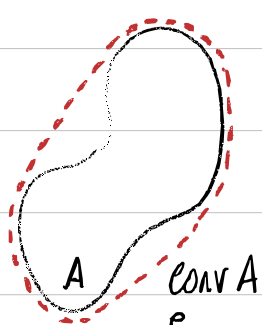
Les étapes ne sont pas en soit difficiles, mais faut il encore s'en souvenir...

sc: On a l'existence

Unité ? Soit C' un convexe de E contenant A tel que pour tout convexe C de E , $A \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq C$. Montrons que $C' = \mathcal{C}(A)$. En effet, $\mathcal{C}(A)$ est un convexe qui contient A , on a $C' \subseteq \mathcal{C}(A)$. De même C' est un convexe qui contient A , donc $\mathcal{C}(A) \subseteq C'$. Ainsi $\mathcal{C}(A) = C'$

sc: On a l'unité.

sc On a ainsi $\text{Conv}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}(A) = \bigcap_{A \subseteq C, C \text{ convexe}} C$



2) Soit $A \subseteq E$. Montrons que

$$\text{Conv}(A) = \left\{ x \in E : \exists p \in \mathbb{N}^* \exists (x_k) \in A^{(N)} \exists (\lambda_k) \in \mathbb{R}_+^{(N)} \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \text{ et } x = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \right\}$$

(ensemble que l'on note $\tilde{C}$)

$\tilde{C}$ convexe ? Soit $x, y \in \tilde{C}$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \tilde{C}$.
On pose $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k$ et $y = \sum_{k=1}^q \mu_k y_k$. On pose $R = \max\{p, q\}$. Alors $z = \sum_{k=1}^R \lambda_k x_k$ et $y = \sum_{k=1}^R \mu_k y_k$. On pose donc $z_\lambda = \lambda \sum_{k=1}^R \lambda_k x_k + (1-\lambda) \sum_{k=1}^R \mu_k y_k$
d'où $z_\lambda = \sum_{k=1}^{2R} \gamma_k y_k$ avec $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2R}) = (\lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_p, (1-\lambda) \mu_1, \dots, (1-\lambda) \mu_q)$
et $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2R}) = (\lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_p, (1-\lambda) \mu_1, \dots, (1-\lambda) \mu_q)$
 $\sum_{k=1}^{2R} \gamma_k = \sum_{k=1}^p \lambda \lambda_k + \sum_{k=1}^q (1-\lambda) \mu_k = \lambda + 1-\lambda = 1$ donc $\tilde{C}$ est convexe.

sc. Ainsi $\text{Conv } A \subseteq \tilde{C}$

Inclusion inverse ? Soit $x \in \tilde{C}$. Alors $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k$ avec $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$

Traie preuve que Jensen (normalisation en divisant par $1-\lambda_{n+1}$, etc.)

sc. Ainsi $\tilde{C} \subseteq \text{Conv } A$

sc D'où $\text{Conv } A = \tilde{C}$

3) Thm (De Carathéodory) Si E est de dimension finie, on peut se limiter à $p = 1 + \dim E$.

En dimension finie, on pose pour $A \subseteq E$, $\dim(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(F)$ avec $F = \text{Vect}(A)$ le plus petit ser qui contient A . Il suffit alors de montrer que si $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k$ avec $p \geq n+2$ et $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ Alors $x = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda'_k x'_k$

$(x_1, \dots, x_p)$ est de cardinal p , $z = (x_2 - x_1, \dots, x_p - x_1)$ de cardinal $p-1 > n$ et liée.

Il existe $(\mu_1, \dots, \mu_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \mu_k (x_k - x_1) = 0$ d'où $\sum_{k=1}^{p-1} \mu_k x_k = \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k x_1$

i.e. $\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k x_k = 0$ avec $\alpha_1 = -\sum_{k=2}^p \mu_k$ $\alpha_2 = -\mu_1$... $\alpha_p = -\mu_{p-1}$ non tous nuls avec $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 0$.

$$x = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^p (\lambda_k - \alpha_k) x_k \text{ car } \sum_{k=1}^p \alpha_k = 0$$

On cherche α tel que l'un des $\lambda_k - \alpha_k$ soit nul et le reste soit positif.

Les α_k sont non tous nuls, il existe k_0 tel que $\alpha_{k_0} \neq 0$ et quitte à multiplier tous les α_k par -1 , on peut supposer $\alpha_{k_0} > 0$. Soit $\alpha = \min \left\{ \frac{\lambda_k}{\alpha_k} : \alpha_k > 0 \right\} = \frac{\lambda_{k_0}}{\alpha_{k_0}}$

Si $\alpha_{k_0} > 0$, $\frac{\lambda_{k_0}}{\alpha_{k_0}} \geq \alpha$ d'où $\lambda_{k_0} \geq \alpha \alpha_{k_0}$ donc $\lambda_{k_0} - \alpha \alpha_{k_0} \geq 0$

Si $\alpha_{k_0} < 0$, $\lambda_{k_0} - \alpha \alpha_{k_0} \geq 0$

sc D'où $x = \sum_{k=1, k \neq k_0}^p (\lambda_k - \alpha \alpha_k) x_k = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda'_k x'_k$ en réindenant

Par récurrence descendante sur p , on peut prendre $p = n+1$.