

Topologie / Diamètre ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : exercice C2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -evn avec $E \neq \{0\}$

Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \emptyset$. On pose $S(A) = \sup \{ d(x, y) : (x, y) \in A^2 \}$

1) On note $\Delta(A) = \{ d(x, y) : (x, y) \in A^2 \}$

• Supposons A bornée. D'où $\exists \pi \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall a \in A, \|a\| \leq \pi$

Par inégalité triangulaire, pour tous $x, y \in A$, $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2\pi$

Donc $S(A)$ existe ($\Delta(A)$ partie non vide majorée de $\mathbb{R}$)

• Supposons que $S(A)$ existe. Alors $S(A)$ est un majorant de $\Delta(A)$.

Pour tous $x, y \in A$, $\|x - y\| \leq S(A)$ d'où par inégalité triangulaire (on fixe $y \in A$)

$\|x\| - \|y\| \leq S(A)$ d'où $\|x\| \leq S(A) + \|y\|$ donc $A \subseteq B(0, S(A) + \|y\|)$

• Si $S(A) = 0$, Alors: $\forall x, y \in A, x = y$ d'où $A = \{x_0\}$. Réciproquement si $A = \{x_0\}$ Alors $S(A) = 0$

2) Soit $A = B_0(a, R)$. Soient $x, y \in A$. On a:

$\|x - y\| \leq \|x - a + a - y\| \leq \|x - a\| + \|y - a\| < 2R$ donc $S(A) \leq 2R$ par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On pose u le vecteur unitaire associé à x . Alors $u \in S(0, 1)$.

Soit $r \in]-R, R[$. On définit $x_r = a + ru$ et $y_r = a - ru$ en sorte que $x_r, y_r \in A$.

Ainsi $\|x_r - y_r\| = \|2ru\| = 2|r|$ donc $S(A) \geq 2|r|$ et lorsque $r \rightarrow R$: $S(A) \geq 2R$

GC $S(A) = 2R$ et de même si $A = B_f(a, R)$

Si $B_0(a, R) = B_0(b, S)$ Alors $S B_0(a, R) = S B_f(b, S)$ donc $2R = 2S$ et $R = S$.

Dès lors, on a $a = b$ comme dans le cours.

3) Soit $A = B_0(0, 1)$. Alors $SA = 2$. Or $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| < 2$ donc SA jamais atteint

Soit $A = [x_0, y_0]$ avec $x_0 \neq y_0$. Alors $SA = \|x_0 - y_0\|$ atteint uniquement pour $(x, y) = (x_0, y_0)$

ou $(x, y) = (y_0, x_0)$ i.e. Séulement 2 points