

Récap Sup

Th. du Moment cinétique

Cadre : référentiel R de centre O, galiléen
point matériel M de masse m

Le moment cinétique du point M en P est

$$\vec{L}_P = \overrightarrow{PM} \times \underbrace{m \vec{v}_{M/R}}_{\vec{v}}$$

$\vec{L}_P$ vérifie le th. du moment cinétique (TMC) :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \sum \vec{r}_{P,i} \times (\vec{f}_i)$$

On peut projeter sur un axe Δ indépendant du temps :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$$

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\forall P_i \in \text{Solide}, L_\Delta(P_i) = (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{v}_i) \cdot \hat{u}_\Delta$$

$$\text{En sorte que } L_\Delta = \sum_{P \in \text{Solide}} L_\Delta(P)$$

$$\text{On a } L_{Oz}(P_i) = r_i \hat{u}_r \wedge m_i r_i \dot{\theta}_i \hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_z = \underbrace{m_i r_i^2}_{\text{constante motrice } J_{O_z}(P_i)} \dot{\theta}_i$$

Si le solide est indéformable $\dot{\theta}_i$ indépt de i, noté $\dot{\theta}$

$$\text{Ainsi } L_{O_z} = J_{O_z} \dot{\theta} \text{ avec } J_{O_z} = \sum_{P \in \text{Solide}} J_{O_z}(P) = \sum_{P \in \text{Solide}} m_P r_P^2$$

Le TMC à M projeté sur (Oz) donne alors

$$\boxed{J \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{O_z}(\vec{f})}$$

Couple de forces $(\vec{f}, \vec{g})$: Deux forces opposées i.e. $\vec{f} = -\vec{g}$ qui s'appliquent en deux points différents du système tel que la somme de leur moment sur (Oz) est non nulle

$$\text{Soit alors } \Gamma_{O_z} = J_{O_z} \ddot{\theta} \quad \rightarrow \text{mise en rotation du système}$$

Si Γ et $\dot{\theta}$ sont de même signe, le couple est dit "moteur"

Sinon il s'agit d'un couple "résistant"

L'énergie cinétique issue de la rotation vaut

$$K = \sum_{\text{Solide}} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{\text{Solide}} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_{O_z} \dot{\theta}^2$$

$$\text{La puissance vaut } P = \sum_{\text{Solide}} \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = \dot{\theta} \sum_{P \in \text{Solide}} r_i f_{\theta i} = \dot{\theta} \sum_{P \in \text{Solide}} \mathcal{M}_{O_z}(\vec{f}_i)$$

Force centrale : dirigée vers O à tout instant

Le mouvement est plan :

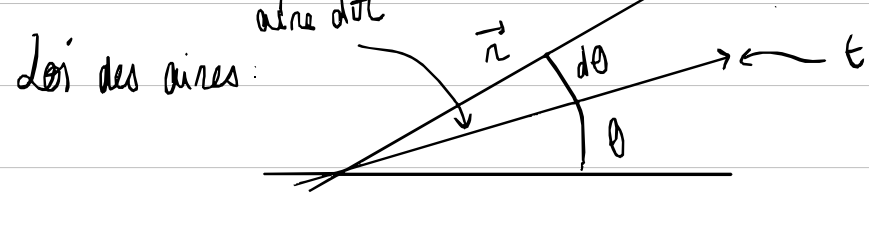
$$\text{On applique le TMC à M en O : } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{r}_{O,i} \times (\vec{f}_i) = \vec{0} \quad \left(\vec{r}_{O,i} \parallel \vec{f}_i \right)$$

Donc le moment cinétique se conserve au cours du temps.

Or $\vec{L}_O = \vec{r} \times m \vec{v}$ donc $\vec{r}, \vec{v} \perp \vec{L}_O$ si bien que le mouvement se fait dans le plan passant par O donc $\vec{L}_O$ est un vecteur normal.

$$\text{Constante des aires : } \vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z$$

noté c : "constante des aires"



$$\text{aire } dA = \frac{r^2 d\theta}{2} \quad \text{vitesse aréolaire } \frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{c}{2}$$

(constante !)

L'énergie mécanique se conserve :

Th. de l'énergie cinétique à M : $dE_c = \delta W = -dE_p$ toutes les forces sont conservatives

$$dE = dE_c + dE_p = 0 \text{ donc } E \text{ se conserve}$$

De plus

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \left(\frac{c}{r} \right)^2 \right) + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff} \text{ où } E_{p,eff} = \frac{1}{2} m \left(\frac{c}{r} \right)^2 + E_p$$

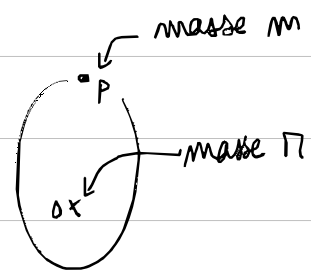
Le graphique de $E_{p,eff}$ en fct de r donne toutes les valeurs possibles pour r

$E > 0$: trajectoire hyperbolique

$E = 0$: trajectoire parabolique

$E < 0$: trajectoire elliptique de foyer O

$$\text{On a } E_p = -\mathcal{G}_f \frac{mM}{r} \text{ pour une orbite}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} - \mathcal{G}_f \frac{mM}{r} = E$$

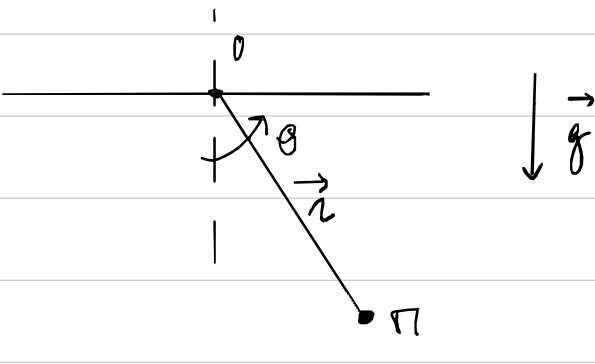
$$\text{En } r_{min} \text{ et } r_{max} \text{ on a } \dot{r} = 0 \text{ donc } E = \frac{m c^2}{2 r^2} - \mathcal{G}_f \frac{mM}{r}$$

$$\text{donc } 2E r^2 = m c^2 - 2 \mathcal{G}_f m M r$$

$$\text{Or } \underbrace{r_{min} + r_{max}}_{=2a} = -\frac{2 \mathcal{G}_f m M}{2E} \quad (\text{relations coefficients-radices})$$

$$\text{donc } E = -\mathcal{G}_f \frac{mM}{2a}$$

Pendule simple :



TMC à M en O :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_{O,M} \times (m \vec{g}) = \vec{r} \wedge m \vec{g} = -m g r \sin(\theta) \hat{u}_z$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m r \dot{\theta} \hat{u}_\theta = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z \text{ d'où } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

TEC à M : L'énergie mécanique se conserve au cours du temps :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \text{ donc } \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0$$

$$= - \int m \vec{g} \cdot d\vec{l} \quad \left(d\vec{l} = d\theta \hat{u}_\theta \right)$$

$$\text{Or } E_c = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \text{ et } E_p = m r g (1 - \cos(\theta))$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} m r^2 2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m r g \sin(\theta) = 0 \text{ d'où } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

$$\text{PFD à M : } m \vec{a} = m \vec{g} \text{ donc } \vec{a} = \vec{g}$$

$$\text{Or } \vec{a} = -r \ddot{\theta} \hat{u}_r + r \dot{\theta}^2 \hat{u}_\theta$$

$$\text{donc } -r \ddot{\theta} = g \cos(\theta)$$

$$r \ddot{\theta} = -g \sin(\theta)$$

Si θ est petit : $\sin(\theta) = \theta$ à l'ordre 1 et $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

EDL que l'on résout.