

ONDES 2 : Ondes électromagnétiques dans la matière

INTRO : Résumé ONDES 1 :

Dans le vide, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$ (D'Alembert)

Une OETPP se déplace à la vitesse c .

Dans la matière, $\vec{E}$ va mettre en mouvement des charges

→ Création d'un champ électromagnétique supplémentaire

→ Modification de la propagation de l'OET

→ * vitesse $\neq c$

* déformation, altération de l'OET

* l'onde peut ne plus se propager du tout

I/ Comportement électromagnétique de la matière.

1) Cas des conducteurs ohmiques. (Notations : cf. ETAG 2)

On raisonne sur un type de porteur. Un porteur présent dans la matière plongé dans un champ électrique subit la force $\vec{F} = q\vec{E}$. Lors de son déplacement, ce porteur subit des chocs que l'on modélise par une force de frottements fluides $\vec{F}_{\text{fmc}} = -\alpha \vec{v}$ (modèle de Drude)

PFD au porteur : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \alpha \vec{v} \rightarrow \tau \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E}$ ($\tau = \frac{m}{\alpha}$)

En régime permanent (quelques τ ou si $\vec{E}$ varie avec un temps de variation $\gg \tau$) : $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx 0 \rightarrow \vec{v}_{\text{lim}} \approx \frac{q}{\alpha} \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{n}{\alpha} q \vec{E} = \frac{nq^2 \tau}{m} \vec{E}$

On retrouve la Loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

noté σ !

Rq : τ = durée moy. entre les chocs.

2) Cas des plasma sans collisions

En physique, un plasma désigne une matière totalement ou partiellement ionisée

↓
Deux types de porteurs → les électrons libres / les cations

issus de l'ionisation

Dans la suite, on néglige le déplacement des cations : $m_c = 2000 m_e$

PFD à l'électron : $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{1}{m_e} (-e\vec{E}) = \frac{1}{m_e} (+Ne\vec{E})$ (hyp. i)

On suppose le plasma assez dilué de sorte à négliger les chocs. (hyp. ii)

Dans le vide, pour une OETPP : $B = \frac{1}{c} E$ (cf. Ondes 1)

On s'attend, pour un plasma dilué à trouver : $B \approx \frac{1}{c} E$ en o.d.g.

Dans la force de Lorentz : $|q\vec{v}_e \wedge \vec{B}| \approx q v_e E$ en o.d.g.

il est négligeable devant $q\vec{E}$ si $v_e \ll c$, donc $|q\vec{v}_e \wedge \vec{B}| \ll q\vec{E}$ si les électrons sont non relativistes (hyp. iii)

↓
Associé à l'OET

△ S'il existe un champ $\vec{B}_0$ statique en plus de l'OET, la force magnétique doit être prise en compte

On considère une OETPP de pulsation ω .

PFD à un électron libre du plasma : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} + \vec{0}$ (hyp. ii)

|| $\frac{d}{dt}$: On doit suivre l'électron $\frac{\partial}{\partial t}$: on reste à un endroit fixe.
mais on montre que si $|\vec{v}_e| \ll c$, $\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}$

Par hyp. iii : $\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} \approx j\omega$

Convention électricien : $\vec{E}(\pi, t) = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$

Le courant crée par les électrons est tel que $\vec{j} = -n_e e \vec{v}_e$

d'où : $-\frac{m_e}{n_e e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -e\vec{E} \rightarrow \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E}$ Il n'y a pas proportionnalité entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$

La loi d'Ohm n'est donc pas valable dans le cas général. Cependant, on peut écrire en R.S. $(+C) \frac{\partial}{\partial t} \approx j\omega$ donc $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ avec $\underline{\sigma} = \frac{n_e e^2}{j m_e} = -j \frac{n_e e^2}{m_e} \in j\mathbb{R} \Rightarrow \vec{j}(t)$ et $\vec{E}(t)$ oscillent en quadrature

d'où $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ en $\langle \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) \rangle = 0$

Ainsi l'OET ne fournit pas d'énergie au plasma en moyenne

→ Normal, le plasma ne peut pas dissiper cette énergie (les chocs ont été négligés)

3) Cas d'un plasma avec collisions

On reprend les hypothèses hyp. i et hyp. iii (on élimine hyp. ii)

Avec le modèle de Drude :

PFD à l'électron : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - \alpha \vec{v}_e$

Pour une OETPPH en RSE :

$\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} \approx j\omega$ d'où $j m_e \omega \vec{v}_e = -e\vec{E} - \alpha \vec{v}_e$

→ $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{1 + j\omega \tau_e} \Rightarrow \vec{j} = -n_e e \vec{v}_e = \frac{n_e e^2 \tau_e}{1 + j\omega \tau_e} \vec{E}$

d'où $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega \tau_e}$ avec σ_0 la conductivité au statique

$\underline{\sigma} \in \mathbb{C} \Rightarrow j(t)$ et $\vec{E}(t)$ sont déphasés

$\text{Re } \underline{\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \neq 0$: Le plasma absorbe de l'énergie de l'OET et la dissipe.

Rq On retrouve les 2 cas limites étudiés précédemment.

Si $\omega \tau_e \ll 1$: $\underline{\sigma} \approx \sigma_0 \in \mathbb{R}$: comportement d'un conducteur ohmique $\Leftrightarrow T \gg \tau_e$ (T la période de $\vec{E}$)

Si $\omega \tau_e \gg 1$: $\underline{\sigma} \approx \frac{\sigma_0}{j\omega \tau_e} = \frac{n_e e^2 \tau_e}{j\omega m_e} \in j\mathbb{R}$: pas de dissipation d'EET

A savoir : pour les métaux qui sont des cas particuliers de plasma (présence d'électrons libres sans devoir fournir d'énergie pour les libérer : la fréquence de séparation des 2 cas de figure est de l'ordre de 10^{12} Hz

Tant que $f < 10^{12}$ Hz, la loi d'Ohm locale s'applique à un métal

Dans les Télécom : $\approx 10^{10}$ Hz

II / Propagation d'une onde dans la matière.

1) Principe général

Sit pour une OEPH, $(\vec{E}, \vec{B})$ un champ. $\vec{E}$ en $\exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$
 Le passage de l'OEPH dans la matière va générer des courants (Rq: même dans les isolants car $\vec{E}$ oscillant $\rightarrow$ les électrons, même liés dans des atomes, molécules vont pouvoir osciller.)
 Ces courants vont créer un champ magnétique variable et un champ électrique par induction ($\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)

N^o 1 interaction OEPH
 Matière va modifier la relation de dispersion $\left\{ \begin{array}{l} \text{Recrée des courants de} \\ \text{induction} \end{array} \right\} \rightarrow \Delta \text{ conventions possibles (choix)}$
 $\vec{B}(k) \rightarrow -j\mu_0 \vec{k}$

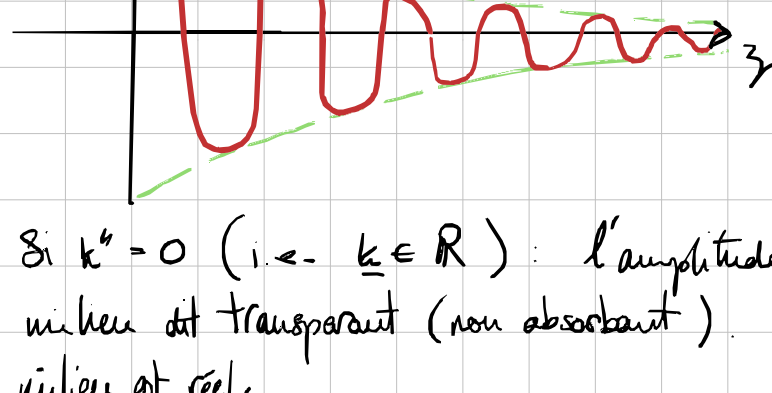
On écrit $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ avec $k_x = k' - jk''$

On définit l'indice complexe du milieu de propagation noté n tel que la relation de dispersion dans celui-ci s'écrit: $k = \frac{n\omega}{c}$

2) Atténuation

On suppose ici que $\vec{u} = +\vec{e}_z$ donc $(\vec{E}, \vec{B})$ en $\exp(j(\omega t - (k' - jk'')z))$
 soit: $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - k'z))$
 donc $\vec{E}$ en $\exp(-k''z) \cos(\omega t - k'z - \varphi_0)$ ($= \text{Re}(\vec{E})$)

Si $k'' > 0$: (Δ ça dépend de la convention), on a un milieu absorbant



Si $k'' = 0$ ($k' \in \mathbb{R}$): l'amplitude reste la même, on a un milieu dit transparent (non absorbant). C'est le cas si l'indice du milieu est réel.

3) Vitesse de phase, dispersion

On introduit la vitesse de phase: c'est la vitesse d'un point M selon la propagation de l'onde tel que la phase de l'onde au M reste constante.

Celle-ci vaut $\varphi(z, t) = \omega t - k'z - \varphi_0$. Par définition: $v_{\varphi} = v(\omega)$
 tel que $\frac{d\varphi}{dt} = 0 = \omega - k'v(\omega)$ d'où $v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$

Si on introduit l'indice: $v_{\varphi} = \frac{\omega}{n \frac{\omega}{c}} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\text{Re}(n)}$

On parle de milieu dispersif lorsque n dépend que ω . Les différents OPH ont alors une vitesse de phase qui dépend de la pulsation.

On parle de milieu non dispersif et non absorbant si $n \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ note n) avec $\frac{dn}{d\omega} = 0$

4) Cas des plasmas sans collisions.

a) équation de propagation: On part des équations de Maxwell: on cherche à obtenir l'équation vérifiée par $\vec{E}$ en présence de courants décrits par $\vec{j}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Maxwell-rot Schwartz

Or $\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} - \text{grad}(\text{div} \vec{E})$ on fait l'hyp $\epsilon = 0$

$$\text{d'où } \Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Dans le cas d'un plasma sans collision: $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$

$$\Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{ne^2}{m} \vec{E} = 0$$

b) relation de dispersion: pour un OEPH dont la dépendance spatio-temporelle est en $\exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \Rightarrow \left(-k^2 - \frac{1}{c^2} \omega^2 - \frac{ne^2}{m} \right) \vec{E} = 0 \text{ d'où } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec $\omega_p^2 = \mu_0 c^2 \frac{ne^2}{m} = \frac{ne^2}{m \epsilon_0}$

Rq: ω_p est la « pulsation plasma » introduite en AG1 et 2. = 1/2

Ainsi: $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ est la relation de dispersion dans un plasma neutre sans collisions.

c) domaine de transparence

Si $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0 \Leftrightarrow k$ réel noté k ($k'' = 0$, $k = k'$)

$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ est l'onde se propage dans le plasma sans être atténuée (on est dans le domaine de transparence). Elle se propage à la vitesse de phase $v_{\varphi} = \frac{c}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}} > c$ cf III

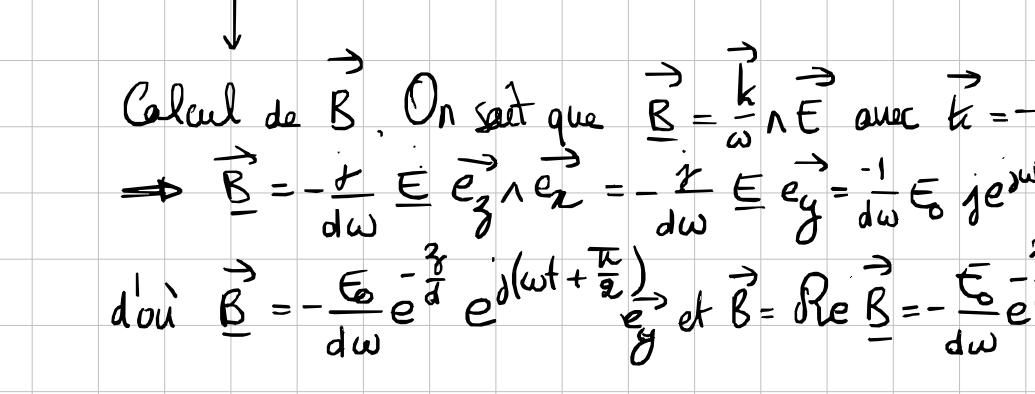
d) domaine réactif

Si $\omega < \omega_p$: $k \in j\mathbb{R}$ noté k Propagation selon $(\vec{B})$
 Convention choisie: $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - k'z)) = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - k'z))$

Ici: $\vec{E} = \text{Re} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm 3/d} \cos(\omega t)$ et $k = \pm \frac{k'}{d}$

Si l'onde provient des $z < 0$ et le plasma occupe l'espace $z > 0$
 $\Rightarrow$ Non divergence de $\vec{E}$ dans le plasma et on garde la solution $\ominus$
 i.e. $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm 3/d} \cos(\omega t)$ (onde dite stationnaire atténuée)

On choisit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-3/d}$



Calcul de $\vec{B}$. On sait que $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \nabla \times \vec{E}$ avec $\vec{k} = -\frac{k'}{d} \vec{e}_z$
 $\Rightarrow \vec{B} = -\frac{k'}{\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = -\frac{k'}{\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 e^{\pm 3/d} \cos(\omega t) = -\frac{k'}{\omega} \vec{E}_0 e^{\pm 3/d} \sin(\omega t) \vec{e}_y$
 d'où $\vec{B} = -\frac{\vec{E}_0}{\omega} \frac{k'}{d} e^{\pm 3/d} \cos(\omega t) \vec{e}_y$ et $\vec{B} = \text{Re} \vec{B} = -\frac{\vec{E}_0}{\omega} \frac{k'}{d} e^{\pm 3/d} \sin(\omega t) \vec{e}_y$

On constate que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ oscillent en quadrature de phase.

$$\text{d'où } \vec{T} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\omega} = \frac{\vec{E}_0^2}{\omega} \frac{k'}{d} \underbrace{\cos(\omega t) \sin(\omega t)}_{\frac{1}{2} \sin(2\omega t)} \underbrace{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y}_{-\vec{e}_x} = -\frac{\vec{E}_0^2}{2\omega} \frac{k'}{d} \sin(2\omega t) \vec{e}_x$$

donc $\langle \vec{T} \rangle = 0$

N^o l'énergie EM rentre et sort du plasma: elle ne peut pas se propager. Bilan: Si $\omega < \omega_p$: la propagation de l'OEPH dans le plasma est impossible.

Pour les OEPH, le plasma se comporte comme un filtre passe-haut.
 Si $\omega < \omega_p$: l'onde est entièrement réfléchie (i.e aucune absorption pour un plasma sans collisions)

5) Cas des conducteurs Ohmiques

a) Equation de propagation

Loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$
 Maxwell-Ampère: $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

$$\text{d'où } \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 (\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Cas des métaux: $\gamma \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ et $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \gamma \vec{E} \Leftrightarrow \omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \sim \frac{10^7}{10^{-11}} = 10^{18} \text{ rad.s}^{-1}$ (*)

cf enag 3. Loi d'Ohm valable si $f \ll 10^{12} \text{ Hz}$
 Si $f \ll 10^{12} \text{ Hz}$, Alors (*) est vérifiée et $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \gamma \vec{E}$

d'où $\nabla \wedge \vec{B} \approx \mu_0 \gamma \vec{E}$: c'est l'ARMS magnétique.
 donc $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma \vec{E})$

Par Schwartz: $\nabla \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\nabla \wedge (-\nabla \wedge \vec{E}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\text{Donc } \Delta \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Par Maxwell-Gauss: $\Delta \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ d'où $\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

b) Relation de dispersion: $\vec{E}$ en $e^{j(\omega t - k'z)}$ (choix arbitraire)
 Alors $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ et $\Delta = -k^2$ donc: $k^2 = -j\mu_0 \gamma \omega$

c) Forme des solutions

Méthode 1: $-j = e^{j\pi/2}$: $k = \pm \sqrt{j\mu_0 \gamma \omega} = \pm \sqrt{\frac{j}{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \sqrt{\frac{j}{2}} \frac{1-j}{\sqrt{2}}$

$$\text{On pose } S = \frac{1}{\sqrt{j\mu_0 \gamma \omega}}, \text{ d'où } k = \pm \frac{1-j}{S}$$

Méthode 2: On pose $k = k' - jk''$. Alors $k^2 = k'^2 - k''^2 - 2jk'k'' = -j\mu_0 \gamma \omega$

Par unicité $\text{Re}(k) = k'$ et $\text{Im}(k) = -k''$
 $\begin{cases} k'^2 = k''^2 \\ +2jk'k'' = +j\mu_0 \gamma \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k' = k'' \\ k' \text{ et } k'' \text{ de même signe} \end{cases} \Rightarrow k' = k''$

et $k' = k'' = \sqrt{\frac{j\mu_0 \gamma \omega}{2}} = \frac{1-j}{S}$ On a bien $k = \frac{1-j}{S}$

$$\text{On a } \vec{E} = \vec{E}_0 \vec{e}_x \exp(j(\omega t - \frac{1-j}{S} z)) \text{ et } \vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \vec{E}_0 e^{\frac{z}{S}} \cos(\omega t - \frac{z}{S}) \vec{e}_x$$

N^o l'onde est atténuée sur une distance S appelée « épaisseur de peau ».

d) Cas des conducteurs Ohmiques

$$\vec{B} = \frac{\vec{E}}{\omega} \wedge \vec{k} = \frac{1-j}{\omega S} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = \frac{1-j}{\omega S} \vec{E}_0 \exp(\frac{z}{S}) \exp(j(\omega t - \frac{z}{S})) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = \frac{\vec{E}_0}{\omega S} \exp(\frac{z}{S}) \left(\cos(\omega t - \frac{z}{S}) + \sin(\omega t - \frac{z}{S}) \right) \vec{e}_y$$

Rq On peut alors $\vec{B}$ directement par $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

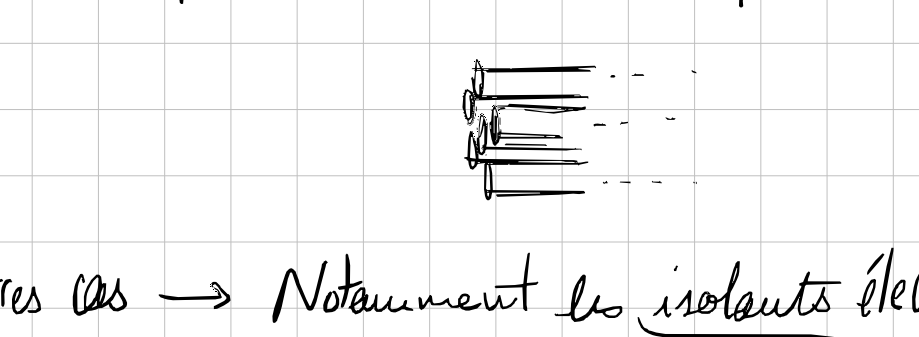
$$\nabla \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & E_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{E}_0 \exp(\frac{z}{S}) \exp(j(\omega t - \frac{z}{S})) \right) \vec{e}_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{E}_0 e^{\frac{z}{S}} e^{j(\omega t - \frac{z}{S})} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_0^2}{\mu_0 \omega S} \exp(-\frac{2z}{S}) \left(\cos(\omega t - \frac{z}{S}) - \frac{1}{2} \sin(2(\omega t - \frac{z}{S})) \right) \vec{e}_z$$

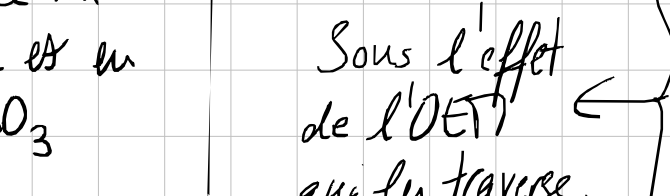
d'où $\langle \vec{T} \rangle = \frac{\vec{E}_0^2}{2\mu_0 \omega S} \exp(-\frac{2z}{S}) \vec{e}_z$

l'énergie EM se propage dans le conducteur Ohmique mais elle est sur une profondeur caractéristique de l'ordre de S .

effet de peau: dissipée par des courants appelés « courants de Foucault »



Pour éviter le phénomène (car fait augmenter la résistance électrique) on utilise plusieurs câbles de diamètre $\leq S$ en parallèles:



6) Autres cas $\rightarrow$ Notamment les isolants électriques, appelés « diélectriques »

exple: Le verre classique est en SiO_2 . Sous l'effet de l'OEPH que les traverse. Les porteurs de charges ne peuvent pas circuler librement mais elles peuvent vibrer.

n n^o très variable en fct des impuretés $\rightarrow$ Apparition de courants $\vec{j} \Rightarrow$ indice n (cf 1)

Pour les fibres optiques de bonne qualité: $n'' = 10^{-9} \Rightarrow$ Fait propager la lumière sur 100 km