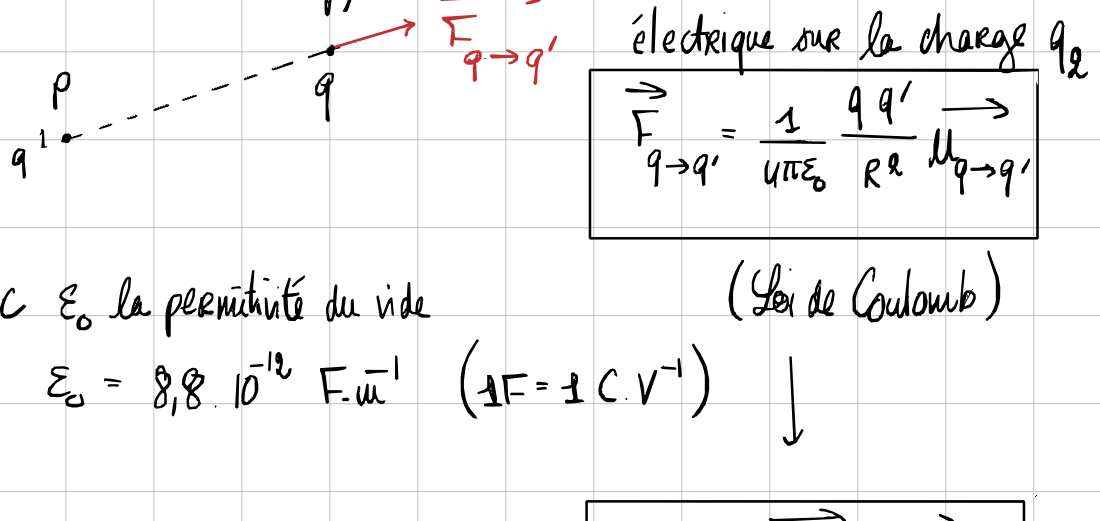


Electronag 1. Charges et Champ électrique

- Contexte (On considère des particules statiques $\Rightarrow$ pas de champ magnétique)
- Cas d'une charge ponctuelle



avec ϵ_0 la permittivité du vide

$$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1})$$

avec E le champ électrique exercé par q' au pt P

$$\vec{F}_{q \to q'} = q' \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E}(P) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

q' crée dans tout l'espace un champ électrique $\vec{E}$ donné par la formule

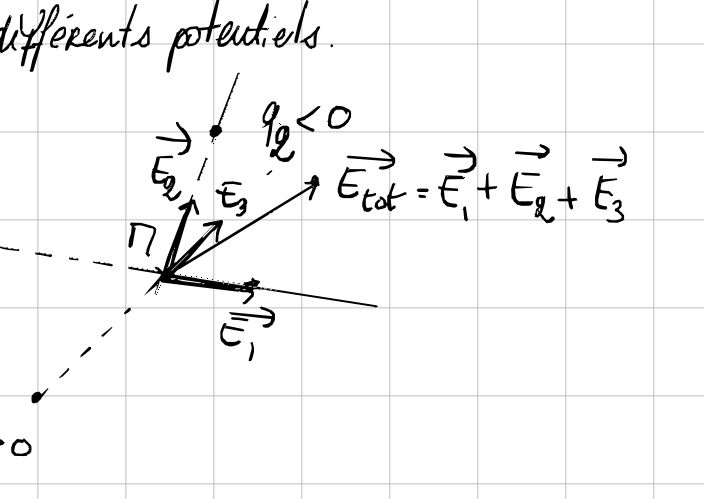
$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{avec} \quad V(r) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En effet, si P est selon R, θ, φ dans $(P, \hat{u}_R, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi)$, on a

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial R} \hat{u}_R + \frac{1}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

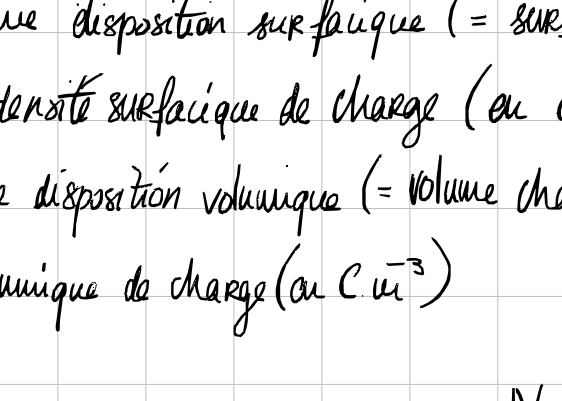
$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} \right) \hat{u}_R = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_R$$

Lignes de champ de $\vec{E}$:



3) Principe de superposition

Lorsqu'il y a plusieurs charges électriques, le champ électrique total est la somme vectorielle des différents champs. Le potentiel électrique est la somme scalaire des différents potentiels.

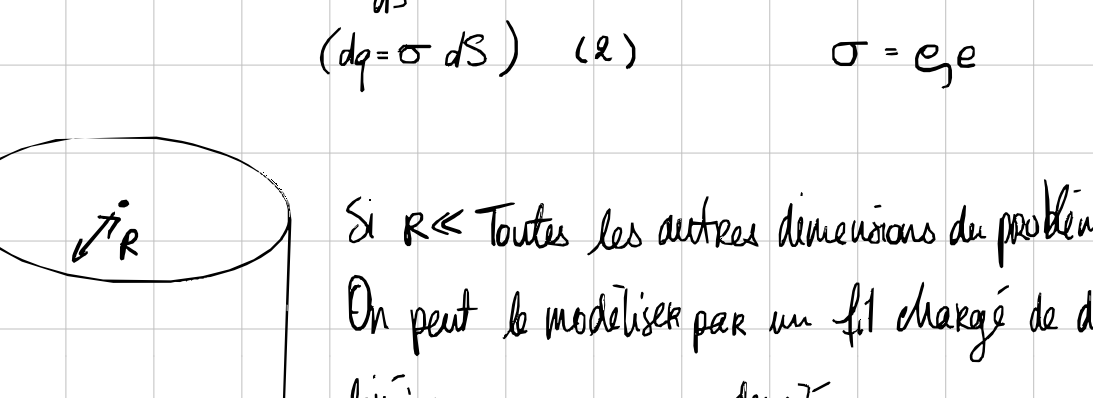


4) Distance continue des charges

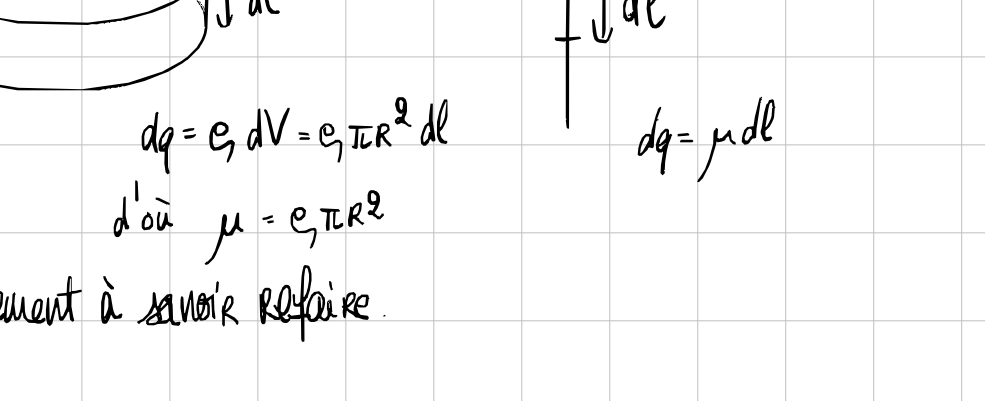
Si il y a une grande assemblée de charges, il est très souvent plus commode de modéliser les charges suivant la configuration spatiale

- est une disposition linéique (= fil chargé) pour laquelle une longueur infinitésimale dl contient une charge $dq = \mu dl$ avec μ la densité linéique de charge (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$)
- est une disposition surfacique (= surface chargée): $dq = \sigma dS$ avec σ la densité surfacique de charge (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$)
- est une disposition volumique (= volume chargé): $dq = \rho dV$ avec ρ la densité volumique de charge (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$)

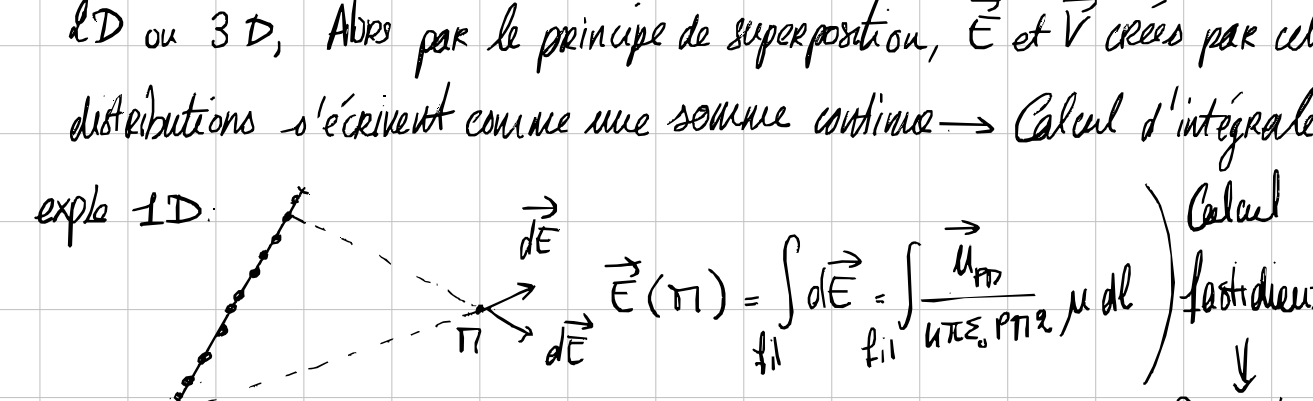
exple)



Si $e \ll$ Toutes les dimensions du problème:



exple)



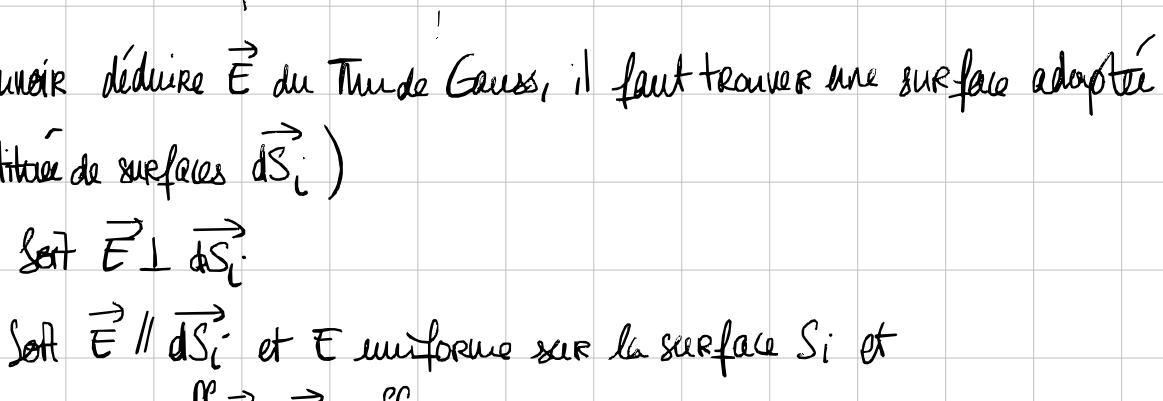
Si $R \ll$ Toutes les autres dimensions du problème. On peut le modéliser par un fil chargé de densité linéique.

$$dq = \rho dV = \rho \pi R^2 dl \quad \text{d'où} \quad \mu = \rho \pi R^2$$

Raisonnement à savoir refaire.

Si l'assemblée de charge est modélisée par une distribution continue 1D, 2D ou 3D, Alors par le principe de superposition, $\vec{E}$ et V créés par cette distributions s'écrivent comme une somme continue $\rightarrow$ Calcul d'intégrale.

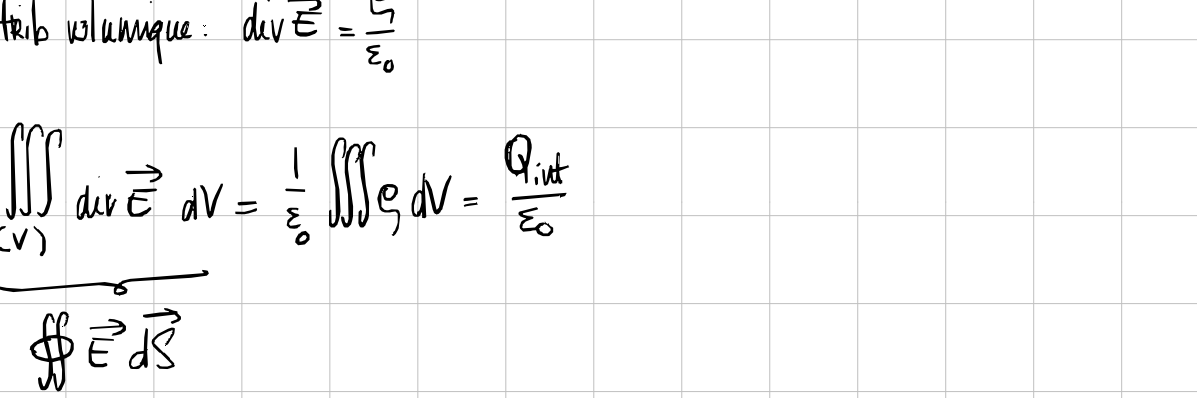
exple 1D:



Il existe un autre moyen d'exprimer $\vec{E}(r)$ (mais ne fonctionne pas systématiquement)

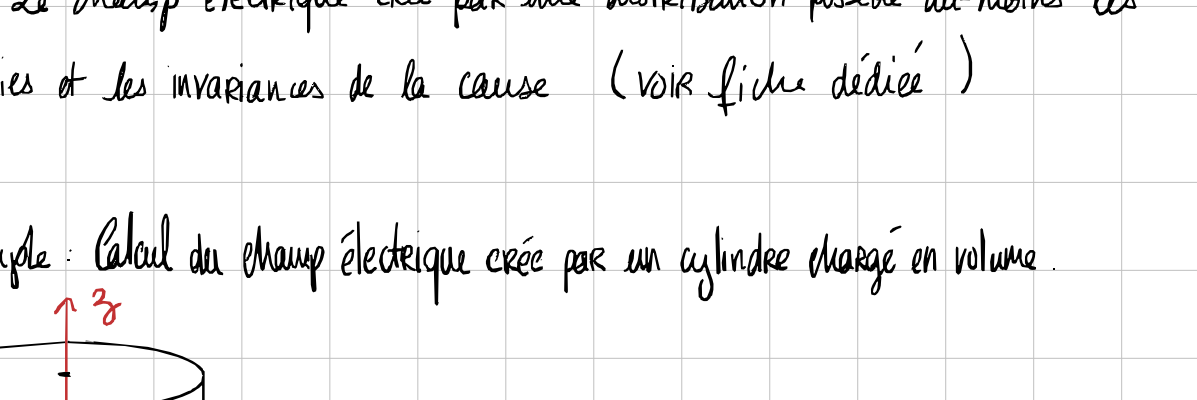
5) Théorème de Gauss

Thm: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ } champ total et strict à l'intérieur du volume (V)



Rq Les charges à l'extérieur de (V) n'apportent aucune contribution dans le flux de $\vec{E}$.

Schéma:



Pour pouvoir déduire $\vec{E}$ du Thm de Gauss, il faut trouver une surface adaptée (dS constituée de surfaces dS_i)

- Soit $\vec{E} \perp dS_i$
- Soit $\vec{E} \parallel dS_i$ et $\vec{E}$ uniforme sur la surface S_i et

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_i = E \cdot S_i$$

Thm (version locale, généralement moins utilisé) [Equation de Maxwell-Gauss]

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{avec } \rho, \text{ la charge volumique locale (en } \text{C} \cdot \text{m}^{-3})$$

Rq1 Si la distribution n'est pas volumique, $\rho = 0$ donc $\text{div } \vec{E} = 0$ et E non défini

Rq2 Les deux versions sont liées par le Thm de Green-Ostrogradski:

Si distrib volumique: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

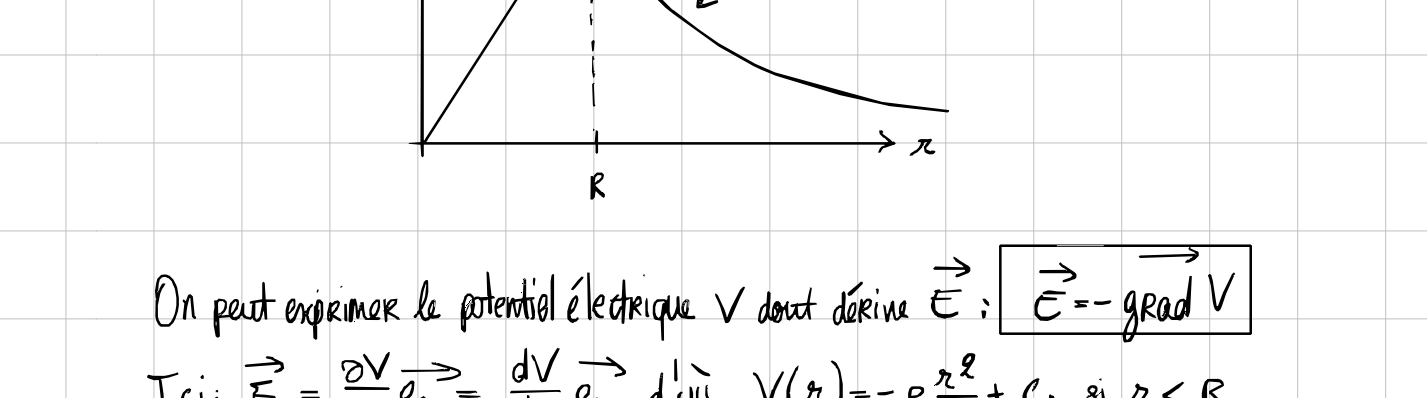
$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\text{Thm de Gauss}} = \underbrace{\int \rho dV}_{\text{Thm de Green-Ostrogradski}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

6) Utilisation des symétries et des invariances

Principe de Curie: « Si la conséquence est unique, elle possède au moins les symétries et les invariances de la cause ».

Ici: Le champ électrique créé par une distribution possède au moins les symétries et les invariances de la cause (voir fiche dédiée)

9) Exemple: Calcul du champ électrique créé par un cylindre chargé en volume



But: Exprimer $\vec{E}(r)$ créée par le cylindre chargé.

- Utiliser les symétries/invariances pour déterminer la direction de $\vec{E}$ et la variable de l'espace dont la valeur dépend.

Le plan $(\vec{r}_1, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ ($\vec{e}_z$) est un plan de symétrie de charge

Rq1 $(\vec{r}_1, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ aussi car le cylindre est supposé de longueur infinie!

Par le Principe de Curie, ces deux plans sont aussi des plans de symétrie pour $\vec{E}$

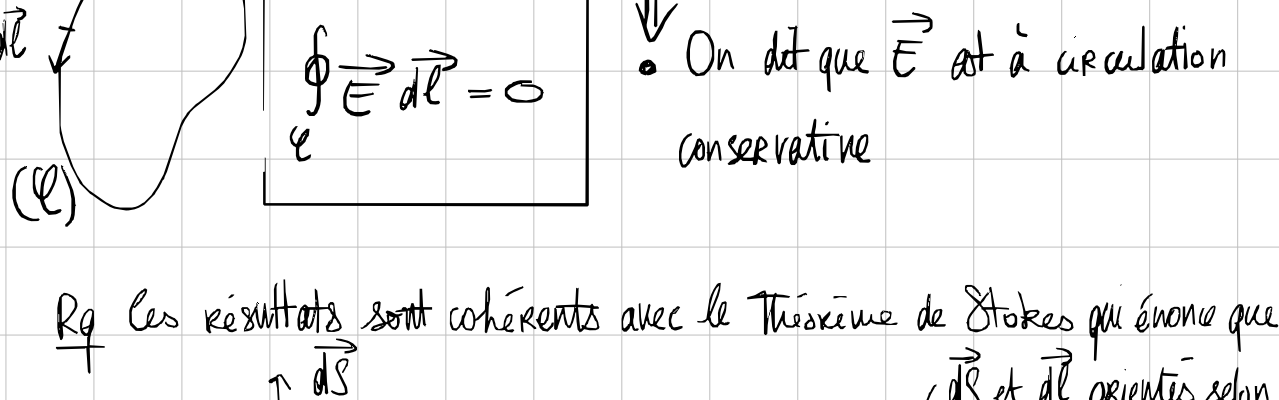
Donc $\vec{E}(r)$ appartient à ces deux plans

Donc $\vec{E}(r)$ est selon $\vec{e}_z$. On note $\vec{E}(r) = E(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Le cylindre est invariant par rotation, donc (Principe de Curie), donc la distribution de charge aussi, (idem pour z): $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_z$

- Trouver la surface fermée adaptée pour utiliser le Thm de Gauss.

Compte tenu que $\vec{E}$ est radial et E ne dépend que de r , on considère un cylindre d'axe Oz , de hauteur h arbitraire passant par P .



- Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers S que l'on décompose en trois parties: dS_{lat} , dS_{bas} , dS_{haut}

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{bas}} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{haut}}$$

$$= 0 + 0 + \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} = \oint E(r) dS_{\text{lat}}$$

$$= E(r) \oint dS_{\text{lat}} = E(r) S_{\text{lat}}$$

$$\text{d'où} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r)$$

- Calculer Q_{int} . On distingue deux cas:

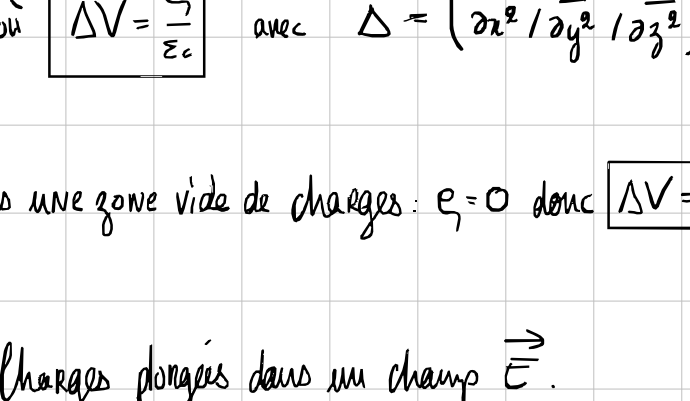
Si P est à l'extérieur du cylindre (i.e. $r > R$).

$$Q_{\text{int}} = (\text{cylindre dans le cylindre en rouge}) = \pi R^2 h \rho$$

$$\text{d'où} \quad 2\pi r h E(r) = \pi R^2 h \rho / \epsilon_0 \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_z$$

Si P est à l'intérieur du cylindre (i.e. $r < R$).

$$Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \rho \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$



On peut exprimer le potentiel électrique V dont dérive $\vec{E}$: $\vec{E} = -\text{grad } V$

Ici: $\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{dV}{dz} \vec{e}_z$ d'où $V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} z + C_1$ si $r < R$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \ln(r) + C_2 \quad \text{si} \quad r > R$$

Par convention on fixe $V(\infty) = 0$ (impossible vu car cylindre infini)

Par contre C_1 et C_2 sont liés par la continuité de V en $r = R$

8) Nouvel opérateur: le rotationnel

L'opérateur rotationnel rot s'applique à un champ vectoriel et donne un champ vectoriel.

Sa définition: cf Wikipédia

En physique, on s'en sert comme outil.

À savoir: son expression en cartésien peut s'obtenir à l'aide d'un calcul de produit vectoriel

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x A_y - \partial_y A_x \\ \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

9) Propriétés générales de $\vec{E}$ et V

En électrostatique, on peut vérifier l'équation de Maxwell-Gauss, le champ électrique vérifie une deuxième équation locale: $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$

Rq $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ en régime variable

On montre que cette propriété équivaut à dire qu'il existe un champ scalaire V tel que $\vec{E} = -\text{grad } V$ on retrouve la notion de potentiel électrique.

Rq Ces résultats sont cohérents avec le Théorème de Stokes qui énonce que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Les lignes de champ électriques sont orthogonales aux surfaces équipotentielles:

Dans une zone vide de charges, on a $\rho = 0$ et avec Maxwell-Gauss:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{On dit que } \vec{E} \text{ est à flux conservatif}$$

Si un tube de champ électrique (= assemblée de lignes de champ partant d'un contour fermé) se resserre, cela signifie que $\vec{E}$ augmente:

$\vec{E}$ plus grand en S_2 qu'en S_1 :

Si deux lignes de champ convergent en un point: il y a une charge négative en ce point

Si elles divergent d'un point, c'est une charge positive

Rq: Pas de charge.

10) Equations de Poisson et de Laplace

$$\begin{cases} \text{Maxwell-Gauss: } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\text{grad } V \end{cases} \Rightarrow \text{div}(\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où} \quad \Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (\text{Equation de Poisson})$$

Dans une zone vide de charges: $\rho = 0$ donc $\Delta V = 0$ (Equation de Laplace)

11) Charges plongées dans un champ $\vec{E}$

Une charge q soumise à un champ électrique $\vec{E}$ subit une force électrique

$$\vec{F}_{\text{elec}} = q \vec{E} \quad \text{Cette force est conservative:}$$

Sur un déplacement infinitésimal $d\vec{l}$ vaut $\delta W_{\text{elec}} = \vec{F}_{\text{elec}} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV_{\text{elec}}$

avec $V_{\text{elec}} = qV$, d'où $\vec{F}_{\text{elec}} = -\text{grad } V_{\text{elec}}$

Pour un déplacement $1 \rightarrow 2$:

$$W_{\text{elec}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{elec}} \cdot d\vec{l} = -\Delta V_{\text{elec}} = q(V_1 - V_2)$$

Tension électrique entre 1 et 2

Cette formule est à la base de la définition de l'électro-volt (eV)

C'est une unité d'énergie

1 eV = énergie acquise par un électron (initialement au repos) lorsqu'il est accéléré par une tension de 1V.