

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE

Ce sujet comporte quatre parties totalement indépendantes qui explorent les propriétés physiques d'objets de forme torique. Un tore est le volume généré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}_z) ou d'une flèche dans le cas général (\vec{p}).

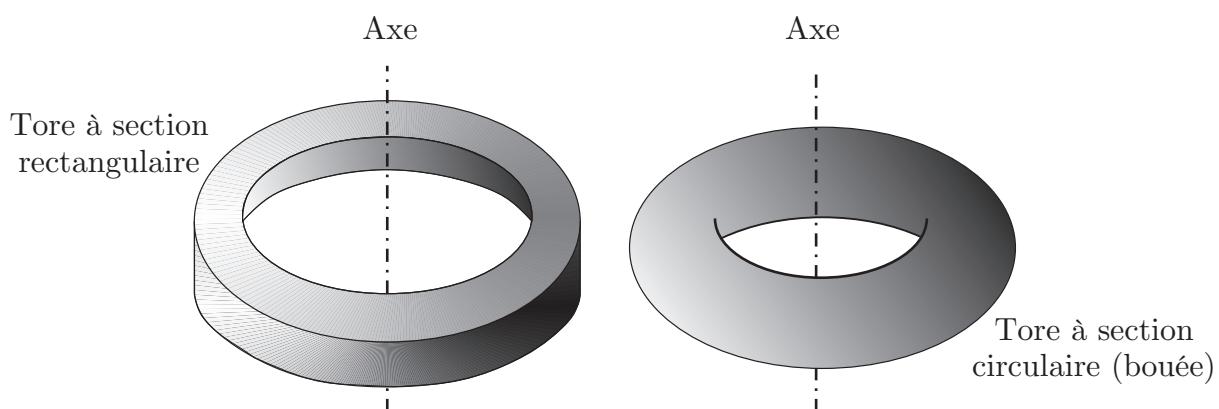


FIGURE 1 – Deux types de tores

I. — Modélisation d'un hulahoop

Le hulahoop est un cerceau en plastique que l'on fait principalement tourner autour de la taille par un déhanchement rythmé très en vogue dans les années 1960. Pour notre modélisation, nous l'assimilerons à un tore de section rectangulaire en rotation autour d'un arbre cylindrique fixe et vertical, d'axe (O,z) et de rayon r , dans le référentiel terrestre supposé galiléen \mathcal{R}_0 . Le tore est de masse volumique μ homogène, ses dimensions sont les suivantes : le rayon du cercle intérieur est a , celui du cercle extérieur b et son épaisseur selon (O,z) vaut c . On note G son centre d'inertie et Δ son axe de symétrie, dont la direction reste parallèle à (O,z) : on peut donc identifier $\Delta = (G,z)$. On donne l'expression du moment d'inertie d'un cylindre de rayon R et de masse M par rapport à un axe de révolution confondu avec l'axe du cylindre : $J = \frac{1}{2}MR^2$.

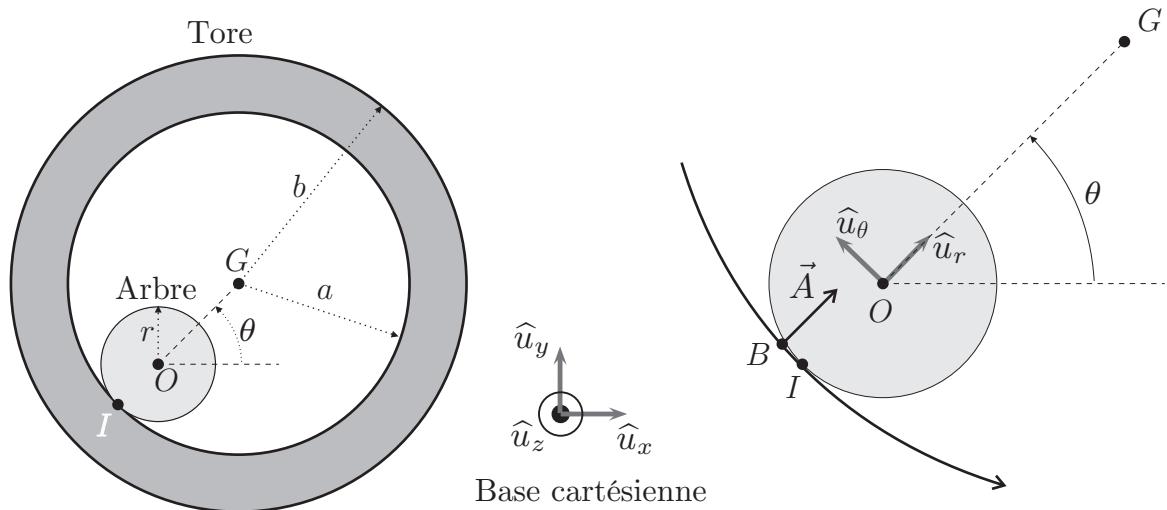


FIGURE 2 – Rotation du hulahoop

□ 1 — Justifier que le moment d'inertie autour d'un axe Δ donné de l'ensemble constitué par la superposition de deux distributions de masses \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 disjointes est la somme des moments d'inertie de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 par rapport à cet axe.

□ 2 — Déterminer le moment d'inertie J du tore par rapport à l'axe (G,z) en fonction de μ , a , b et c .

Le contact entre la paroi intérieure du tore et le cylindre vertical se répartit sur un segment vertical dont on note I le milieu. Il y a roulement sans glissement entre les deux solides. On note f le coefficient de frottement statique au niveau de ce contact. On note $\vec{\Omega} = \Omega \hat{u}_z$ le vecteur vitesse angulaire de rotation du tore autour de son axe Δ . La position de G est repérée par l'angle $\theta = (\hat{u}_x, \overrightarrow{OG})$.

□ 3 — Établir la relation entre $\dot{\theta}$ et Ω associée à l'hypothèse de roulement sans glissement. En déduire l'expression de l'énergie cinétique du tore dans le référentiel \mathcal{R}_0 en fonction de $J_0 = \mu\pi c(b^2 - a^2)\frac{3a^2 + b^2}{2}$ et Ω .

□ 4 — On suppose que Ω est constante. Déterminer les composantes des forces subies par le tore au contact avec le cylindre vertical. En déduire à quelle condition sur Ω l'hypothèse de roulement sans glissement est justifiée. Décrire qualitativement ce qui se passe lorsque cette condition n'est plus vérifiée.

On suppose maintenant que l'hypothèse de roulement sans glissement est vérifiée mais qu'on observe une adhérence du tore sur le cylindre qu'on modélise par la création d'une force de liaison attractive $\vec{A} = A\hat{u}_r$ entre le cylindre et le tore localisée en un point B représenté sur la partie droite de la figure 2 et voisin de I tel que $\vec{IB} = \beta\hat{u}_\theta$. On donne la vitesse angulaire initiale Ω_0 du tore.

- 5 — En utilisant par exemple le théorème de la puissance cinétique, établir la loi d'évolution $\Omega(t)$ et conclure quant à la pratique du hulahoop.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Étude d'un conducteur ohmique torique

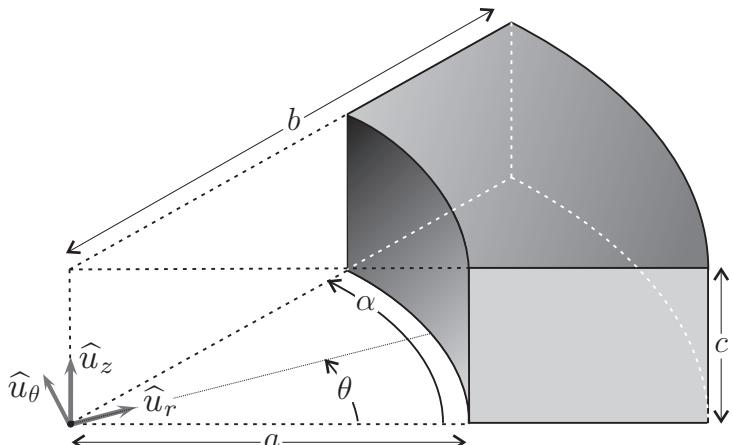


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

- 6 — On rappelle la valeur numérique

de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

- 7 — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ . En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

- 8 — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si $T \gg \tau$.

- 9 — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .

- 10 — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ \vec{E} et de la densité de courant \vec{j} .

- 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a , b , c , γ et α .

- 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

FIN DE LA PARTIE II

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

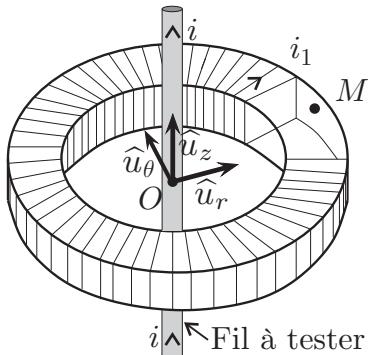


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O,z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$ avec $r \in [a,b]$ et $z \in [0,c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O,z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

13 — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

14 — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .

15 — Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

16 — Déterminer l'expression de la résistance totale R_p du bobinage en fonction de a , b , c , N et λ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.

17 — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M , ω , R_p et L .

18 — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

IV. — Étude thermique d'un objet torique

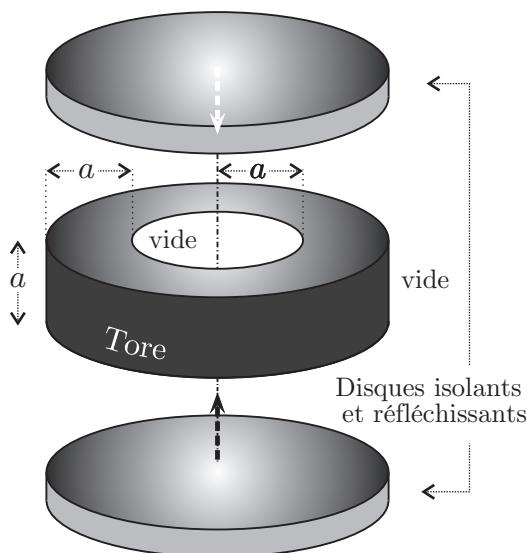


FIGURE 5 – Vue éclatée du système.
L'axe (O, z) est celui du tore

Un tore de section carrée $a \times a$ et de rayon intérieur a (donc de rayon extérieur $2a$) est fabriqué dans un matériau de masse volumique μ , de capacité calorifique massique c et de conductivité thermique λ .

Le profil des températures possède la symétrie cylindrique : T ne dépend que du rayon r et du temps t soit $T(r, t)$. La face intérieure ($r = a, \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, a]$) et la face extérieure ($r = 2a, \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, a]$) sont placées dans le vide.

Sur les faces parallèles ($z = 0$ ou $z = a$), on pose deux disques parfaitement isolants thermiquement et de surface parfaitement réfléchissantes.

□ 19 — En effectuant un bilan thermique sur la portion torique définie par l'intervalle $[r, r + dr]$, montrer que le champ des températures vérifie l'équation

$$\xi r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial (r \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r}$$

où l'on exprimera ξ en fonction des grandeurs caractéristiques du matériau et l'on précisera son unité.

□ 20 — On cherche, pour cette équation, une solution stationnaire à variables séparées sous la forme $T(r, t) = \rho(r)\eta(t)$. Établir les deux équations différentielles vérifiées respectivement par $\rho(r)$ et $\eta(t)$ en faisant apparaître une constante χ commune à ces deux équations.

□ 21 — Déterminer l'expression de $\eta(t)$ sans chercher à caractériser la ou les constantes d'intégration. Quel est le signe de χ ?

□ 22 — Pour la fonction $\rho(r)$, on cherche une solution développable en série entière sous la forme $\rho(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n$. Après avoir rapidement justifié cette recherche, déterminer les expressions des α_{2p} et des α_{2p+1} pour tout entier p positif ou nul.

□ 23 — En examinant tous les transferts thermiques possibles sur la face interne, justifier le fait que $\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=a} = 0$.

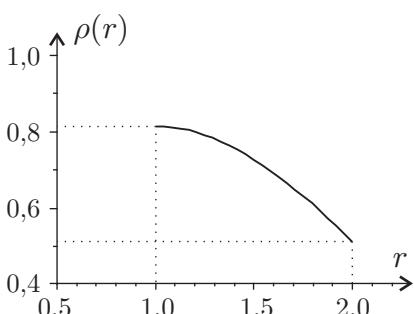


FIGURE 6 – La fonction $\rho(r)$

La fonction $\rho(r)$ qui admet le développement en série déterminé à la question 22 et qui vérifie la condition aux limites imposée par la question 23 s'exprime en utilisant les fonctions de Bessel de première (J) et de deuxième (Y) espèces. Elle s'écrit

$$\rho(r) = K \left[J_0(r) - \frac{J_1(a)}{Y_1(a)} Y_0(r) \right]$$

où K est une constante d'intégration. La courbe représentative de cette fonction sur le domaine d'étude et pour $K = 1$ et $a = 1$ fait l'objet de la figure 6.

□ **24** — À un instant t donné, on suppose que la face externe, assimilée à un corps noir, est en quasi équilibre thermique. En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, établir la deuxième condition aux limites vérifiée par ρ en $r = 2a$. Montrer que l'on arrive alors à une contradiction. Quelle hypothèse doit-elle être remise en question ?

□ **25** — En admettant que la solution précédente convienne malgré tout, décrire l'évolution de la température dans le tore au cours du temps en traçant sur un même graphique les profils des températures à diverses dates. Justifier en particulier le fait que T tend uniformément vers zéro.

FIN DE LA PARTIE IV

FIN DE L'ÉPREUVE

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

ASPECTS DE LA PROPULSION SPATIALE

Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} . A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

Données valables dans tout le problème

- Masse de l'électron, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- Charge élémentaire, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- Constante de Newton de la gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Permitivité diélectrique du vide, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Constante d'Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- Rayon de la Terre, $R_t = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$;
- Masse de la Terre, $M_t = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Constante de Boltzmann, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- Constante de Planck, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- Constante des gaz parfaits, $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;

Ce problème s'intéresse à la propulsion d'engins spatiaux et plus particulièrement au moteur ionique, dans lequel le carburant n'est pas brûlé mais ionisé. Les ions alors libérés passent par deux grilles fortement chargées électriquement et subissent ainsi une accélération. La force d'accélération des ions cause une force de réaction de sens opposé : c'est la force de propulsion du moteur à ions. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

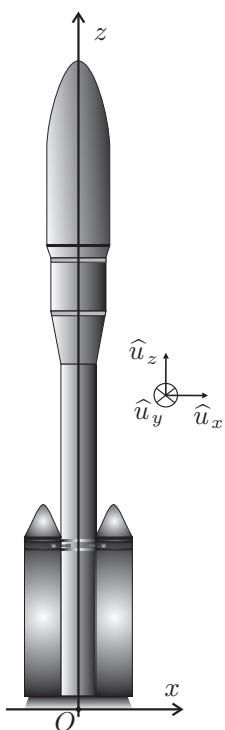


FIGURE 1 – Fusée

I. — Généralités

I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse

A l'instant $t = 0$, une fusée de masse totale m_0 décolle verticalement dans le référentiel terrestre (voir figure 1). On définit le débit de masse $D_m > 0$ des gaz brûlés, par $D_m = -\frac{dm}{dt}$, $m(t)$ désignant la masse de la fusée à un instant $t > 0$ quelconque. On note $\vec{u} = -u\hat{u}_z$ avec $u > 0$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. On note $\vec{v} = v(t)\hat{u}_z$ la vitesse de la fusée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que D_m et u restent constants et que le champ de pesanteur g reste uniforme lors du lancement.

- 1 — En prenant pour système la fusée à l'instant t , exprimer sa quantité de mouvement \vec{p}_f aux instants t et $t + dt$. Déterminer de même la quantité de mouvement \vec{p}_g à l'instant $t + dt$ du gaz éjecté pendant dt .
- 2 — On rappelle que la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{w}(t)$ est définie par la relation $\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + dt) - \vec{w}(t)}{dt}$. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour l'ensemble {fusée + gaz}, établir l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg \quad (1)$$

- 3 — Identifier, dans le second membre de l'équation (1), l'intensité F de la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

□ 4 — On nomme impulsion spécifique I_s d'un ergol (gaz propulseur) le temps pendant lequel une masse m de cet ergol peut fournir une poussée équivalente au poids ressenti par m à la surface de la terre. Exprimer I_s en fonction de u et g .

□ 5 — Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la fusée à l'instant t , en fonction de t , $m(t)$, g , u et de la masse de la fusée à l'instant $t = 0$ notée m_0 .

□ 6 — On suppose le vaisseau extrait de l'attraction terrestre (mission interplanétaire), sa masse totale est alors m_i et sa vitesse $\vec{v} = v_i\hat{u}_z$. On allume à nouveau un moteur pendant une durée Δt conduisant à une variation de masse $\Delta m = m_i - m_f$. Adapter l'expression précédente pour obtenir la relation de Tsiolkovski donnant l'accroissement de vitesse correspondant, noté $\Delta V = v_f - v_i$, en fonction de u , m_i et m_f .

L'exemple qui suit a pour objet de montrer l'intérêt des fusées à plusieurs étages. Soit une fusée de masse totale $m_t = 134$ tonnes constituée de deux étages. La masse totale du premier étage est $m_{t1} = 110$ tonnes dont 100 tonnes d'ergols, et celle du second est $m_{t2} = 24,0$ tonnes dont 20,0 tonnes d'ergols.

□ 7 — En considérant que la vitesse d'éjection des gaz $u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ est la même lors de la poussée de chaque étage, calculer les accroissements de vitesse apportés successivement par chacun des étages de la fusée. Comparer avec le cas d'une fusée ne possédant qu'un seul étage et la même répartition de masses, c'est-à-dire 14,0 tonnes de structure et 120 tonnes d'ergols. Les calculs seront effectués dans l'hypothèse d'une absence de pesanteur.

Une autre manière de minimiser les dépenses en carburant est d'augmenter la vitesse d'éjection, limitée à quelques kilomètres par seconde dans le cas d'une propulsion chimique comme nous le verrons dans la suite de ce problème.

8 — Pour une charge utile de masse $m_u = 500 \text{ kg}$, calculer les masses m_{c_1} et m_{c_2} de carburant (la masse initiale du vaisseau est $m_0 = m_u + m_c$) à prévoir pour obtenir une variation de vitesse $\Delta V = 5,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, dans le cas d'une propulsion chimique ($u = 4,00 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) et d'une propulsion ionique ($u = 20,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$).

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

9 — Le vaisseau se déplace à une vitesse de norme v dans le référentiel d'étude galiléen. Exprimer l'énergie cinétique dans ce référentiel de la masse dm du gaz éjectée pendant dt , en déduire la puissance cinétique P_{jet} contenue dans le jet de gaz issu du moteur. Exprimer de même la puissance reçue par le vaisseau de la part de la force de poussée. On exprimera ces deux termes en fonction de D_m , u et v .

10 — On définit le rendement propulsif comme le rapport de la puissance cinétique gagnée par le vaisseau sur la puissance totale dépensée. En admettant une conversion parfaite de l'énergie stockée dans le vaisseau en énergie cinétique du jet et du vaisseau, montrer que le rendement propulsif peut se mettre sous la forme

$$\eta(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

où l'on précisera l'expression de x en fonction des données du problème.

11 — Tracer la courbe $\eta(x)$, pour quelle valeur de x le rendement propulsif est-il maximal ? Pour quelles valeurs de x le rendement est-il nul ? Montrer que l'on pouvait prévoir ces résultats sans calcul.

En fait, bien que des moteurs à vitesse d'éjection variable soient étudiés et quelquefois exploités, le rendement énergétique de la propulsion est souvent considéré comme secondaire : l'énergie fournie par une pile nucléaire ou des panneaux solaires est presque illimitée, ce qui n'est pas le cas des réserves de gaz propulsif.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Limites de la propulsion chimique

Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre S'_1 et S'_2 à l'instant $t + dt$. Durant le laps de temps dt cette tranche échange un certain travail W et une certaine quantité de chaleur Q avec l'extérieur. On note par ailleurs W' le travail échangé sans mettre en jeu les forces de pression.

12 — Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette tranche, établir, en régime permanent, la relation entre W' , Q et les variations d'énergie massique de la tranche considérée.

On se place dans la tuyère d'un moteur fusée, lorsque l'écoulement est permanent et s'effectue à altitude constante sans travail autre que celui des forces de pression. Le gaz éjecté est considéré comme parfait, de masse molaire M , d'indice adiabatique $\gamma = 1,4$. Il provient d'une chambre de combustion, où ses température et pression sont notées T_c et P_c . Le gaz est initialement au repos, $v_c = 0$. Par ailleurs, on considère que le transit du gaz dans la tuyère est suffisamment rapide et les échanges suffisamment lents pour que l'on puisse négliger les transferts thermiques.

13 — Exprimer la vitesse maximale atteinte par le gaz en sortie de la tuyère en fonction de γ , R , T_c et M . On négligera la température de sortie devant T_c .

□ 14 — Les ergols utilisés pour la propulsion sont du dihydrogène et du dioxygène, leur réaction stoechiométrique permet d'obtenir une température de combustion de l'ordre de $T_c = 3,0 \cdot 10^3$ K. Calculer la vitesse maximale d'éjection des gaz issus de la tuyère et l'impulsion spécifique correspondante.

FIN DE LA PARTIE II

III. — Le moteur plasma micro-ondes

III.A. — Principe de fonctionnement

Pour diminuer la consommation de gaz propulsif, il est nécessaire d'accélérer fortement le gaz éjecté par apport extérieur d'énergie. Cette accélération est rendue possible par l'ionisation de ce gaz (on obtient alors un plasma), les particules chargées pouvant être accélérées par un champ électrique.

Le gaz propulsif utilisé est par exemple du Xénon, il est ionisé par trois types de mécanismes potentiels, on suppose que tous les ions produits sont Xe^+ . Ces trois mécanismes sont représentés sur la figure 2. La première source potentielle d'ion est la collision entre un atome et un électron produit par un canon à électrons (défini au début de la partie III.B). Il s'agit de la voie *a*. Outre l'ion produit cette voie produit deux électrons lents. L'application d'une onde électromagnétique micro-onde permet d'accélérer ces électrons afin qu'ils puissent également ioniser d'autres atomes de Xénon. Il s'agit de la voie *b*. Enfin, dans certaines conditions, les photons micro-onde sont également susceptibles de photo-ioniser les atomes de Xénon. Il s'agit de la voie *c*.

Une forte densité du plasma est assurée par la présence d'aimants permanents. Les ions Xe^+ sont finalement accélérés par une différence de potentiel dans une région appelée grille accélératrice. Des canons à électrons assurent une neutralisation du gaz émis. L'ensemble est schématisé sur la figure 2.

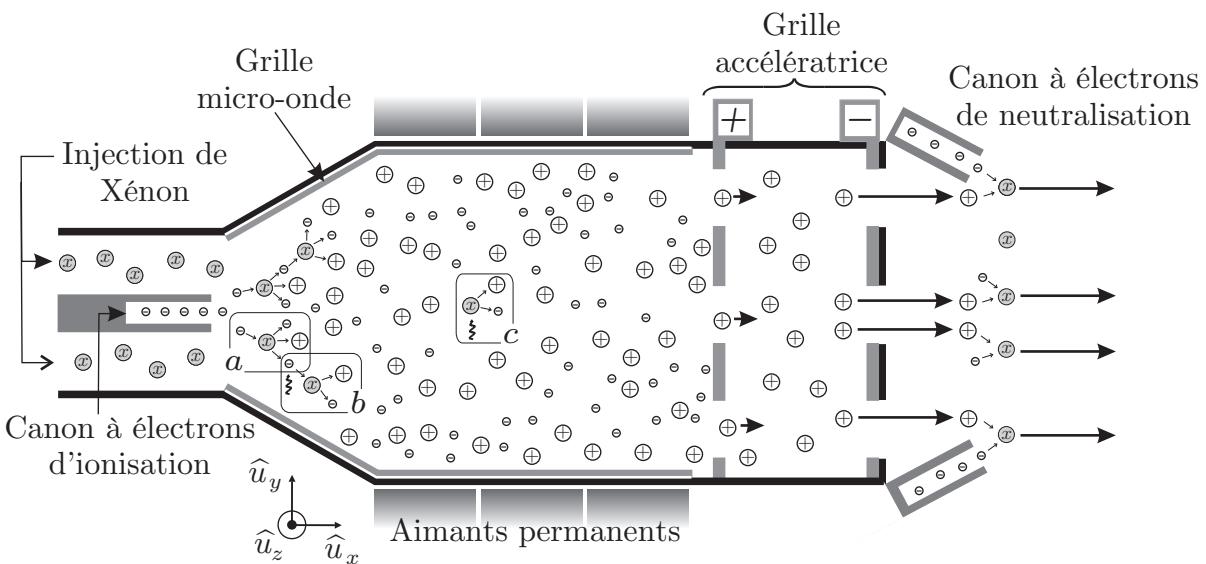


FIGURE 2 – Représentation schématique du moteur ionique : les symboles ⊙ sont des atomes de Xénon, ⊕ des ions Xe^+ et ⊖ des électrons.

On considère le plasma comme un milieu électriquement neutre, de permittivité ϵ_0 et de perméabilité magnétique μ_0 , qui renferme n ions par unité de volume et autant d'électrons de masse m_e et de charge $-e$. Au sein du plasma, les ions possèdent une vitesse caractéristique bien plus faible que celle des électrons, ils peuvent ainsi être considérés comme immobiles. Les électrons sont dits libres pour les distinguer de ceux qui restent attachés aux ions. Le

plasma étudié ici est non-collisionnel, c'est-à-dire que l'on néglige l'effet des chocs entre ions et électrons ou entre particules de même espèce. On suppose également qu'il est non relativiste ce qui signifie que la vitesse caractéristique des électrons libres est faible devant celle de la lumière $\|\vec{v}_e\| \ll c$. Afin d'assurer une ionisation la plus complète possible, on souhaite finalement que ce plasma soit le siège de la propagation d'un rayonnement micro-onde. L'onde électromagnétique correspondante est associée à un champ électrique dont la représentation complexe s'écrit $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \hat{u}_y$.

□ 15 — On suppose la propagation effective. Faire l'inventaire de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables.

□ 16 — Déterminer, en régime de propagation établi, la représentation complexe \vec{v}_e de la vitesse des électrons libres et en déduire la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ du plasma définie par $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$.

□ 17 — Vérifier que dans ce régime de propagation la densité volumique de charge ρ est bien nulle puis en revenant à la notation réelle établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(x, t)$. On rappelle que $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$, en déduire l'équation de dispersion dans laquelle apparaît la pulsation de plasma

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}.$$

□ 18 — A quelle condition l'onde appliquée au plasma peut-elle s'y propager ? Sinon que lui arrive-t-il ?

Un intense champ magnétique statique axial $\vec{B}_0 = B_0 \hat{u}_z$, supposé uniforme, est appliqué à l'intérieur du plasma par des aimants permanents.

□ 19 — Ecrire l'équation vectorielle qui décrirait le mouvement de l'électron s'il n'était soumis qu'à ce champ magnétique. Montrer que pour une vitesse initiale de l'électron contenue dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, son mouvement serait circulaire uniforme dans ce plan, et que sa période de rotation serait indépendante de sa vitesse. Exprimer la pulsation ω_c correspondante, appelée pulsation cyclotron, et calculer sa valeur numérique pour un champ magnétique appliqué d'intensité $B_0 = 0,20 \text{ T}$.

□ 20 — Montrer qualitativement que l'application du champ micro-onde (\vec{E}, \vec{B}_0) avec $\omega \approx \omega_c$ permet d'accélérer les électrons en augmentant la norme de leur vitesse.

□ 21 — D'après ce qui précède, exprimer et calculer numériquement la densité particulaire maximale que l'on peut espérer pour un champ magnétique appliqué d'intensité $B_0 = 0,20 \text{ T}$.

Un champ magnétique permanent intense permet donc d'obtenir une densité importante de plasma et ainsi d'augmenter le courant ionique engendré par les grilles accélératrices. Il aide par ailleurs à maintenir l'ionisation : les lignes de champ magnétique « piégent » les électrons en les forçant à décrire des cercles plutôt que de diffuser librement vers les parois ; la probabilité qu'un électron chaud ionise une molécule est accrue en raison de l'augmentation de la longueur de son trajet.

□ 22 — L'énergie de première ionisation du Xénon est de l'ordre de 12,0 eV. La configuration précédente permet-elle d'envisager une réelle contribution de la photo-dissociation (voie *c*). On justifiera sa réponse par un calcul.

III.B. — Poussée

On néglige la masse m_e des électrons devant celle des ions notée μ .

□ 23 — Exprimer la relation entre l'intensité du courant électrique I dû aux ions traversant le moteur, le débit D_m de masse de gaz issu du vaisseau et des caractéristiques des ions.

24 — On suppose que les ions ont une vitesse caractéristique nulle à l'entrée de la grille accélératrice. On note $V_a > 0$ la tension présente entre les deux électrodes de la grille accélératrice. Déterminer la vitesse caractéristique de sortie des ions du moteur. En déduire l'intensité F de la force de poussée du moteur (identifiée à la question 3) en fonction de I , μ , V_a et e .

25 — La densité volumique de courant dans le moteur est liée à la tension d'accélération par la loi de Child-Langmuir que nous admettrons

$$j = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{\mu}} \frac{V_a^{3/2}}{d^2}$$

la distance d étant celle séparant les deux électrodes de la grille accélératrice . Exprimer F en fonction de V_a , d , ϵ_0 et du diamètre D du jet de gaz.

On considère un moteur ionique utilisant du Xénon, de masse molaire $M = 131 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et possédant les caractéristiques suivantes :

- tension accélératrice $V_a = 700 \text{ V}$;
- distance d entre les deux électrodes de la grille accélératrice : $d = 2,50 \text{ mm}$;
- diamètre de chaque trou dans les électrodes de grille délimitant les jets élémentaires $D = 2,00 \text{ mm}$;
- nombre de trous en vis-à-vis dans chaque électrode : $N = 2,20 \cdot 10^3$

26 — Calculer les valeurs numériques de la poussée F de ce moteur, de la vitesse de sortie des ions et de la masse de Xénon consommée sur une période de 90 jours de fonctionnement. Évaluer la puissance cinétique totale transmise au jet de gaz propulsé.

27 — Justifier sans calcul la nécessité de neutraliser le jet d'ions issu du moteur en lui fournissant des électrons.

IV. — Application du moteur ionique au maintien d'un satellite en orbite basse

On considère un satellite terrestre de masse $m_s = 250 \text{ kg}$ en orbite circulaire basse à l'altitude $h = 300 \text{ km}$. Cette altitude est telle que les hautes couches de l'atmosphère le freinent.

28 — Exprimer l'énergie cinétique E_c du satellite en fonction de son énergie mécanique E_m ; en déduire que, paradoxalement, le freinage entraîne une augmentation de la vitesse.

29 — Lorsque le moteur est éteint, les forces de frottement font perdre au satellite une altitude $\Delta h = 20 \text{ m}$ à chaque révolution. Exprimer la variation d'énergie mécanique correspondante, effectuer l'application numérique.

30 — Le moteur ionique étudié précédemment permet-il de maintenir l'altitude de ce satellite ?

FIN DE LA PARTIE IV

FIN DE L'ÉPREUVE



École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Sujet mis à la disposition des concours :

Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaien et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau siils sont unitaires \hat{u}_x ou d'une flèche dans le cas général \vec{v} .

A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.



I. — Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O, \hat{u}_x) – voir figure 1. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \hat{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

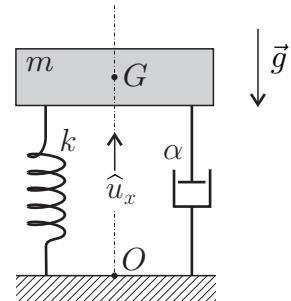


FIG. 1 – Oscillateur

□ 1 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où \tilde{x} est une constante que l'on déterminera en fonction de g , ω_0 et ℓ_0 . On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ .

□ 2 — Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ , X_0 , V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

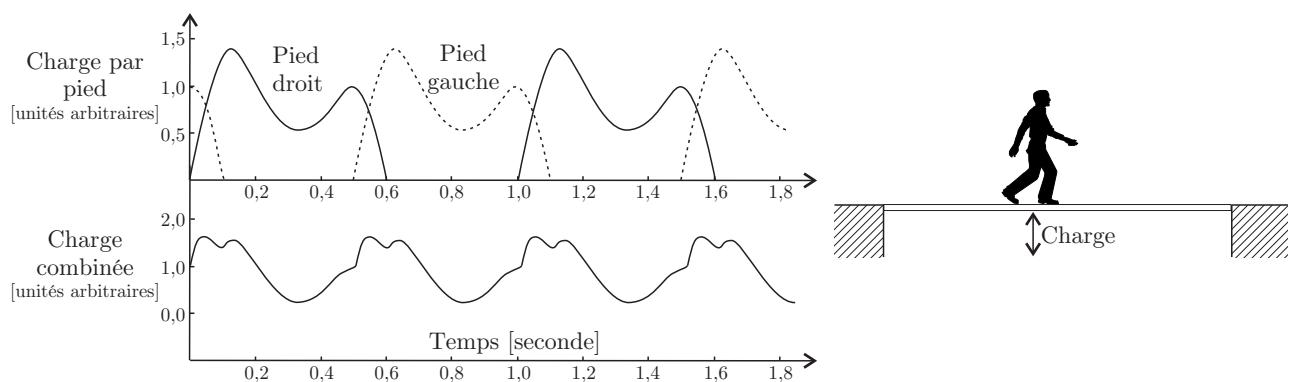


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$.

Le vecteur \vec{F}_0 correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0.4 \vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

□ 3 — Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement \underline{Y} sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m} \underline{F}_1$. On exprimera $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$ en fonction de ξ , ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

□ 4 — Sous quelle condition portant sur ξ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

□ 5 — En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

□ 6 — Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

□ 7 — Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

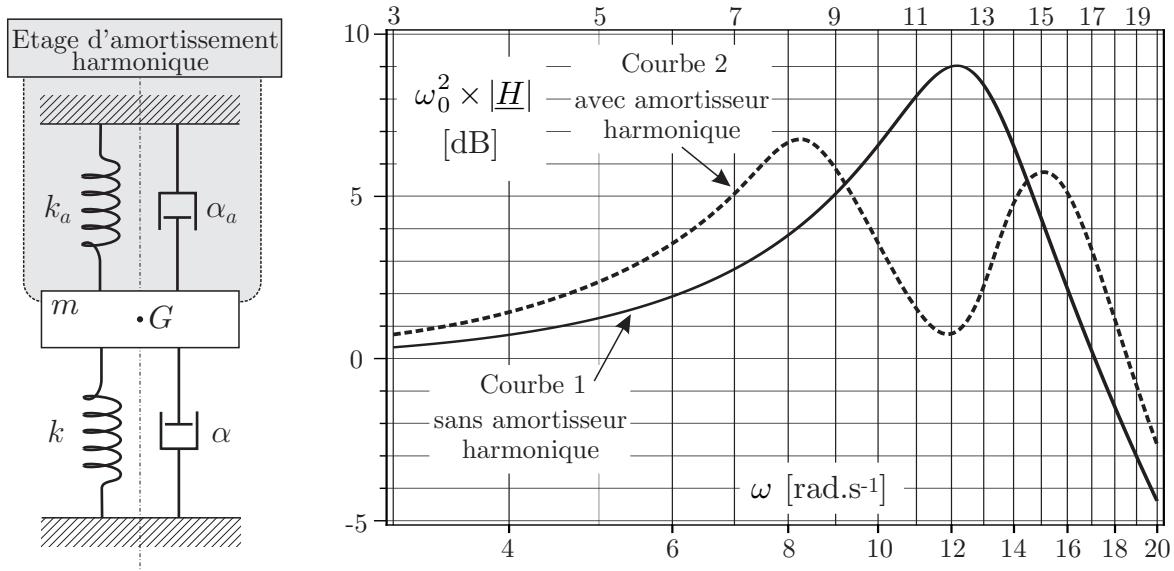


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliquée au modèle du Millennium Bridge.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

□ 8 — Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Etait-ce qualitativement prévisible ?

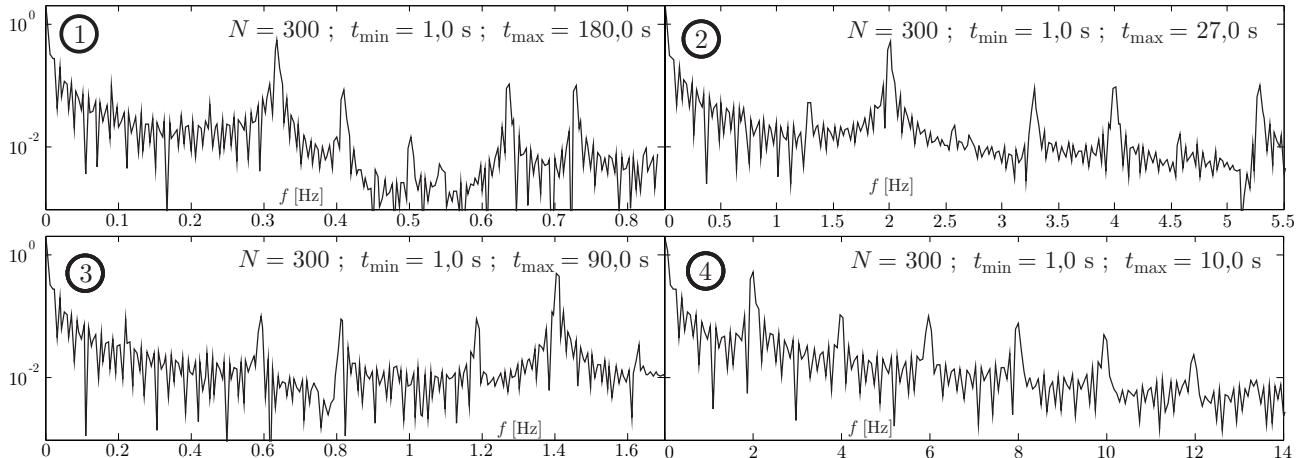


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

□ 9 — À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Système élastique continu

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi la poutre de structure d'une passerelle est déformable en tout point. Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus mais d'un point de vue pratique l'étude des systèmes continus se ramène finalement à celle liée aux systèmes discrets : c'est la discréétisation des systèmes continus.

On négligera dans la suite du problème l'action de la pesanteur.

On considère un solide homogène, de masse volumique ρ constante, qui a la forme d'un cylindre de section S et d'axe (O, \hat{u}_x) horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme F de la force de traction permettant à un solide de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $F = ES\frac{\Delta L}{L}$ où E est une constante appelée module d'Young du matériau.

□ 10 — Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

□ 11 — On note $X(x,t)$ le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse x . Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos dx et en déduire la force de traction $\vec{F}(x,t) = F(x,t)\hat{u}_x$ exercée par la partie « droite » (du côté des x croissants) sur la partie « gauche » (du côté des x décroissants) en fonction de E , S et $\frac{\partial X}{\partial x}$. Écrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur dx et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $X(x,t)$.

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle on introduit un axe vertical dirigé selon le vecteur unitaire \hat{u}_y et on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant t par une ligne d'équation $y(x,t)$ de masse linéique μ uniforme.

En un point $M(x,y)$ de la passerelle, on définit le vecteur unitaire tangent \hat{u}_τ à la passerelle tel que $\hat{u}_\tau(x,t) = \cos[\alpha(x,t)]\hat{u}_x + \sin[\alpha(x,t)]\hat{u}_y$. Les déplacements sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant $\alpha(x,t) \simeq \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \ll 1$. Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé que selon la verticale. En chaque point $M(x,y)$ de la passerelle règne à chaque instant t une tension $\vec{T}(x,t)$ portée par \hat{u}_τ . Un tronçon de corde est représenté sur la figure 5.

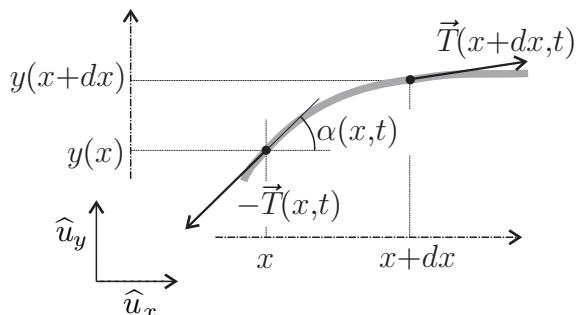


FIGURE 5 – Tronçon de corde élastique

□ 12 — En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal de longueur $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension de la corde est indépendant de x . On le notera T_0 .

□ 13 — Montrer alors que l'on peut écrire $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_\ell^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ où l'on exprimera c_ℓ en fonction de T_0 et μ .

FIN DE LA PARTIE II

III. — Modèle de la poutre élancée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon (O, \hat{u}_z) et de hauteur h selon (O, \hat{u}_y) . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x)$ très petit devant h ou b , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section S , de masse volumique ρ , de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe (O, \hat{u}_z) est $I = \frac{1}{12}bh^3$. L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

□ 14 — On cherche des solutions sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$. De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

□ 15 — Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. En déduire que $g(t)$ est une fonction périodique de pulsation ω constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution $y(x,t)$ correspondant à la situation étudiée ?

□ 16 — Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

où A, B, C et D sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de β en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=0,t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=L,t} = 0$.

□ 17 — Déterminer les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode.

□ 18 — Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondants à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur $h = 1,07$ m (42 pouces) et de largeur $b = 4$ m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de $L_1 = 70$ m, $L_2 = 144$ m et $L_3 = 108$ m. On donne la masse volumique de l'aluminium $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et son module d'Young $E = 69 \times 10^9 \text{ SI}$.

□ 19 — Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur b . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

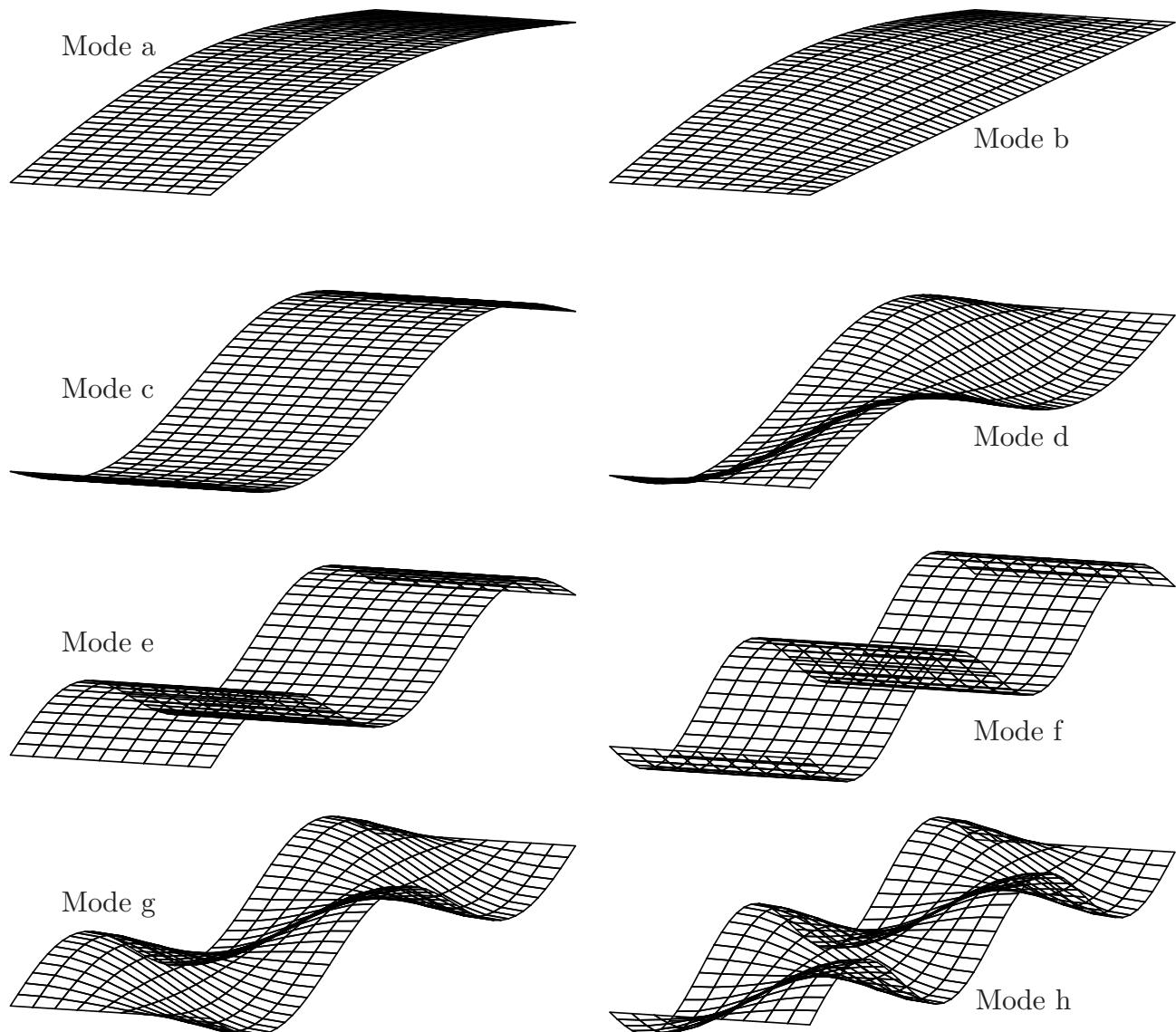


FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités

FIN DE LA PARTIE III

FIN DE L'ÉPREUVE

A2017 – PHYSIQUE I MP



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.**

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

En 1971, le professeur LEON CHUA - qui exerça à l'Université de Berkeley - prédit l'existence d'un dipôle passif nouveau capable de servir de mémoire¹, ce dipôle venant compléter la liste des trois dipôles fondamentaux de l'électricité à savoir le résistor, la bobine et le condensateur. Le terme de memristor qu'il inventa résulte de la contraction des deux termes memory et resistor.

En 2008, des chercheurs² des HP Labs ont publié un article³ dans la revue Nature[©] intitulé *The missing memristor is found*, dans lequel ils annoncent avoir mis au point un memristor présentant les propriétés prévues par LEON CHUA en 1971. La photographie de la figure 1 montre un ensemble de ces memristors.

En 2015, HP[®] et SanDisk[®] se sont associés pour développer la technologie des mémoires à base de memristors. Les atouts espérés de ce type de mémoires peuvent laisser rêveur : 1 000 fois plus rapides que les mémoires flashs actuelles, 1 000 fois plus de cycles lecture-écriture qu'actuellement et, pour couronner le tout, une densité inégalée au point de pouvoir doter un smartphone d'une mémoire de 100 To en 2020 !

Le problème proposé comporte 4 parties largement indépendantes qui abordent différents aspects des memristors. L'ensemble des données fournies sont dans le formulaire situé à la fin du sujet.

I. — Généralités sur les memristors

I.A. — Le quatrième dipôle

Les 4 grandeurs fondamentales de l'électricité sont la charge q , le courant i , le flux magnétique ϕ et la tension u . Elles sont en général dépendantes du temps t . On considère les 3 dipôles classiques que sont le résistor de résistance R , la bobine d'inductance L et le condensateur de capacité C . Ces trois dipôles sont considérés comme parfaits. Il est possible de représenter les 4 grandeurs fondamentales de l'électricité au sommet d'un graphe – carré en l'occurrence – où les arêtes représentent des relations fondamentales ou des relations fonctionnelles des dipôles. Ce carré est représenté sur la figure 2. Avant 1971, on connaissait 5 relations entre les sommets de ce graphe et une était manquante. On se placera systématiquement en convention récepteur pour tout dipôle étudié dans la suite du problème.

1 — Rappeler l'expression de la relation fondamentale liant q , i et t ainsi que les relations fonctionnelles des 3 dipôles parfaits classiques. Ces 4 relations seront exprimées sous la forme différentielle suivante : $dx = y dz$. à chaque fois, on précisera le sens physique de y et on donnera son unité.

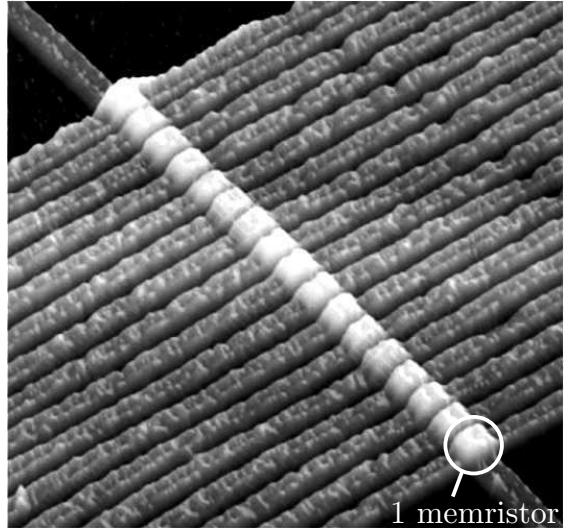


FIGURE 1 – Un ensemble de memristors (échelle nanométrique) © HP Labs

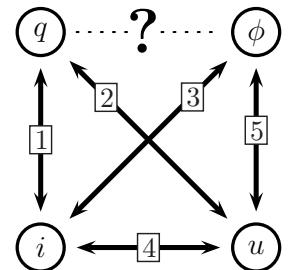


FIGURE 2 – Le carré fondamental de l'électricité

1. IEEE Transactions on circuit theory, vol. CT-18, n°5, September 1971

2. Dmitri Strukov, Gregory Snider, Duncan Stewart & Stanley Williams

3. Nature, Vol 453— 1 May 2008— doi :10.1038/nature06932

- 2 — La relation fondamentale entre le flux ϕ et la tension u s'écrit $\phi(t) = \int_{-\infty}^t u(t')dt'$. Ecrire la cinquième relation dans le graphe de la figure 2 sous forme différentielle.
- 3 — Dans son article de 1971, LEON CHUA prédit l'existence d'une relation $f(\phi, q) = 0$ que l'on peut soit expliciter sous la forme $\phi = \phi(q)$, on dit que l'on a un memristor contrôlé par la charge; soit sous la forme $q = q(\phi)$, on dit alors que l'on a un memristor contrôlé par le flux. La sixième relation différentielle est posée sous la forme $d\phi = M(q)dq$ où $M(q)$ est la memristance. Quelle est l'unité usuelle de la memristance? Justifier la réponse.
- 4 — On associe deux memristors de memristances M_1 et M_2 en série. Quelle est la memristance M du dipôle équivalent? On justifiera sa réponse. Même question si on associe M_1 et M_2 en parallèle.

Afin de concrétiser la notion de memristor, on propose de le modéliser par la relation $\phi(q) = \alpha q + \frac{\beta}{3} q^3$ où α et β sont des coefficients réels positifs. On impose dans le memristor une intensité $i(t) = i_0 \sin \omega t$ pour $t \geq 0$ et on suppose que pour $t < 0$, $i = 0$. Enfin, on considère qu'à la date $t = 0$, on a $q(t = 0) = 0$.

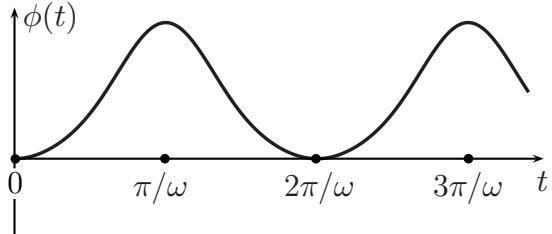


FIGURE 3 – Graphe de $\phi(t)$

- 5 — Déterminer l'expression de $q(t)$ et tracer sur un même graphique les courbes représentatives de $i(t)$ et $q(t)$.
- 6 — On donne sur la figure 3 la courbe représentative de $\phi(t)$. Reproduire cette courbe en y rajoutant sans calcul l'allure de la courbe représentative de $u(t)$.

- 7 — En analysant la courbe $u(i)$ du memristor précédent représentée sur la figure 4, pourquoi peut-on dire, en simplifiant un peu, que le memristor étudié présente deux régimes de fonctionnement : l'un dans lequel il laisse passer le courant et l'autre dans lequel ce n'est pas le cas.

- 8 — La courbe $u(i)$ de la figure 4 présente donc un phénomène particulier. De quoi dépend la résistance du memristor? Expliquer la possibilité d'utiliser le memristor pour mémoriser une information.

- 9 — LEON CHUA qualifia le memristor de *non volatile memory*, c'est-à-dire de mémoire permanente. Quel élément sur le graphique de la figure 4 permet de dire que le memristor est une telle mémoire?

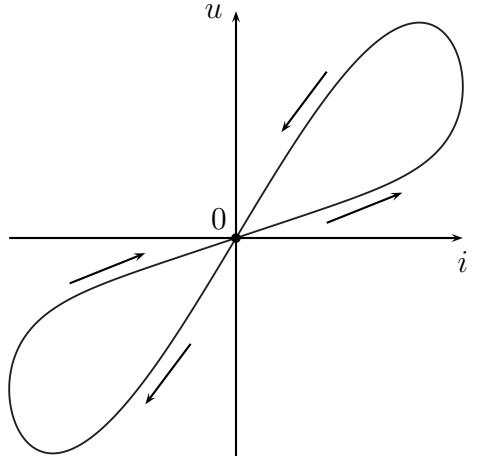


FIGURE 4 – Courbe $u(i)$ du memristor proposé

I.B. — Conductivité

On considère un milieu conducteur où les porteurs de charge possèdent chacun une charge q et une masse m . Ils sont présents dans le milieu conducteur supposé homogène et isotrope à raison d'une densité volumique n en m^{-3} . Ces porteurs sont soumis à un champ électrique qui va les mettre en mouvement pour créer un courant. Lorsqu'elles se déplacent, ces charges interagissent avec d'autres porteurs en mouvement mais aussi avec leur environnement fixe constitué par le réseau cristallin du conducteur. Elles subissent alors des interactions que l'on peut assimiler à des chocs. Il résulte de l'ensemble des interactions une force de type $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse des porteurs mobiles et τ la durée moyenne qui sépare deux chocs successifs subis par une charge q .

On étudie un conducteur cylindrique de section S , de rayon a et de longueur ℓ constitué du milieu conducteur défini ci-dessus. Ce conducteur est soumis à une différence de potentiel U_0 indépendante du temps qui impose un champ électrique \vec{E}_0 uniforme et indépendant du temps.

- 10** — Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse des porteurs de charge. Donner la solution $\vec{v}(t)$ sans se préoccuper de déterminer la constante d'intégration. Quelle est l'expression de la vitesse en régime permanent ? Sauf précision contraire, on considère que l'on est en régime permanent. Faire l'hypothèse du régime permanent est-il contraignant ou non ?
- 11** — La mobilité μ des porteurs de charge est définie de telle sorte que $\vec{v} = \mu \vec{E}_0$. Donner l'expression de la mobilité d'une charge q . Après avoir rappelé la définition de la densité volumique de courant \vec{j}_0 , établir l'expression de la conductivité électrique γ_0 du conducteur définie par la loi $\vec{j}_0 = \gamma_0 \vec{E}_0$. Quel est le nom de la loi précédente ?
- 12** — Exprimer la résistance électrique R_0 du cylindre conducteur en fonction de γ_0 , ℓ et S .
- 13** — LEON CHUA indiqua dans son article fondateur que la résistance était un dipôle *memory less*⁴ car la tension suivait instantanément les évolutions du courant. Qu'en pensez-vous ?
- 14** — On impose maintenant au dipôle non plus le champ électrique \vec{E}_0 mais un champ électrique \vec{E}_1 toujours uniforme mais dépendant du temps selon $\vec{E}_1 = \vec{E}_{1m} \cos \omega t$. Montrer que le dipôle peut être décrit au moyen d'une impédance complexe \underline{Z} correspondant à l'association de deux dipôles et que la tension ne suit plus instantanément les évolutions de l'intensité. On exprimera \underline{Z} en fonction, entre autres, de R_0 . À quelle condition retrouve-t-on la situation où le dipôle est un résistor de résistance R_0 ? Qualifier le comportement du conducteur et l'interpréter.

On revient à la situation où le champ électrique \vec{E}_0 imposé est indépendant du temps. On étudie à nouveau la situation du régime permanent.

- 15** — Quelle est la puissance transférée à la charge q par le champ électrique \vec{E}_0 ? Quelle est la puissance volumique associée à ce transfert d'énergie ?
- 16** — En considérant l'ensemble du conducteur cylindrique, montrer que la puissance qu'il reçoit est $p = u i$. Cette expression peut être généralisée aux régimes lentement variables puisque la puissance instantanée $p(t)$ est alors donnée par : $p(t) = u(t) i(t)$.
- 17** — Dans le cas où le dipôle est un memristor, exprimer la puissance qu'il reçoit en fonction de sa memristance et de l'intensité du courant.

II. — Le memristor des HP Labs

Le memristor mis au point aux HP Labs est constitué par un mince film de dioxyde de titane de 5 nm d'épaisseur et de longueur $\ell = 10$ nm. À chaque extrémité de ce dipôle, le contact électrique est assuré par 2 électrodes de platine. La particularité de ce memristor est que le dioxyde de titane présente dans une zone des lacunes en oxygène, la formule brute du dioxyde de titane étant alors TiO_{2-x} si x représente les lacunes. On admet que cette situation est équivalente à celle d'un milieu dopé dans lequel les charges mobiles portent deux charges élémentaires positives $q = +2e$. Dans le reste du film, on trouve du dioxyde de titane sans lacune de formule TiO_2 . Si le film est totalement dopé, sa résistance électrique est faible et vaut $R_{on} \simeq 1 \text{ k}\Omega$. Au contraire, si le film n'est pas dopé du tout alors sa résistance électrique est élevée : $R_{off} \simeq 100 R_{on}$. Supposons que la frontière entre la zone dopée et la zone non dopée soit située à l'abscisse z , voir le schéma de la figure 5.

4. sans mémoire

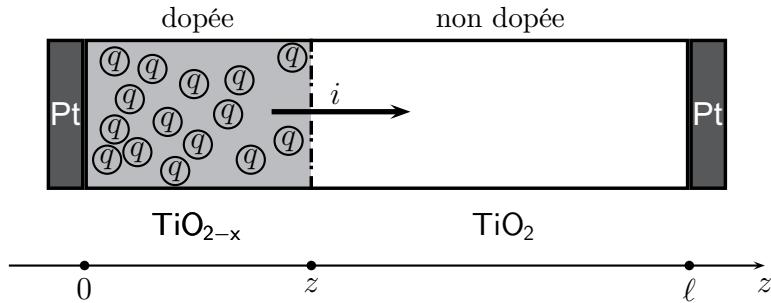


FIGURE 5 – Représentation schématique du memristor des HP Labs

□ 18 — Donner l'expression de la résistance électrique du memristor lorsque la frontière entre la zone dopée et la zone non dopée se situe à l'abscisse z_0 , on notera cette résistance R_{mem0} .

La particularité du film de dioxyde de titane est que la position de la frontière évolue au cours du temps en fonction de l'intensité du courant qui est passé mais aussi en fonction du sens de ce courant. C'est cela qui en fait un memristor. On peut donc passer d'un dispositif bon conducteur à un autre presque isolant. On note dorénavant $z(t)$ la position de la frontière entre la zone dopée et la zone non dopée.

Pour le déplacement de la frontière, on reprend le modèle linéaire de la mobilité étudié à la question 11 où l'on note toujours μ la mobilité des charges mobiles. On propose alors d'écrire la relation

$$\frac{dz}{dt} = \mu \frac{R_{on} i(t)}{\ell}$$

dans laquelle le courant $i(t)$ est algébrique et son sens conventionnel précisé sur la figure 5.

□ 19 — Quelle lecture faites-vous de la relation précédente ?

□ 20 — On suppose que $i(t < 0) = 0$, puis que $i(t \geq 0) \neq 0$ et enfin qu'à la date $t = 0$, la frontière est située en $z = z_0$. Établir l'expression de $z(t)$ en fonction, entre autres, de la charge $q(t)$ qui a circulé depuis la date $t = 0$. Quelle est la charge minimale Q_{min} nécessaire, dans le cas le plus défavorable, pour que le memristor soit dans l'état le plus conducteur possible ?

□ 21 — Établir l'expression de la memristance $M(q)$ en fonction, entre autres, de R_{mem0} . Expliquer pourquoi le memristor a été réalisé pour la première fois avec un système nanométrique.

□ 22 — Pour simplifier les calculs, on considère que $R_{off} \gg R_{on}$, $z_0 = 0$ et $\phi(t = 0) = 0$. On impose dans le memristor, à partir de la date $t = 0$, un courant d'intensité $i(t) = i_0 \sin \omega t$. Établir les expressions de $q(t)$, $\phi(t)$ et $u(t)$.

□ 23 — Dans leur article de 2008, les chercheurs⁵ des HP Labs ont obtenu expérimentalement la courbe $u(i)$ de la figure 6. Commenter cette courbe.

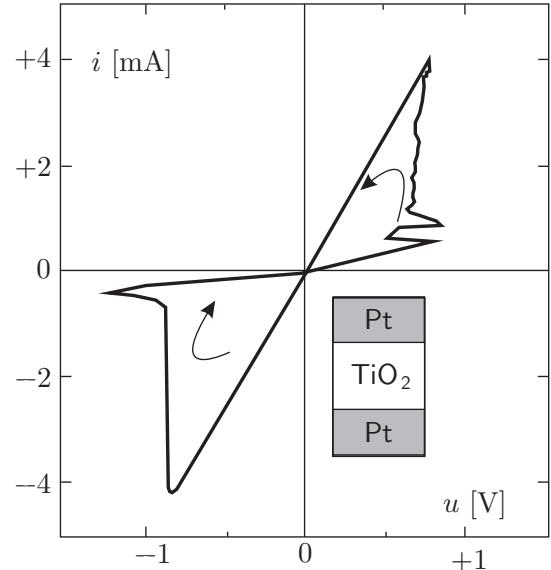


FIGURE 6 – Courbe $u(i)$ du film de TiO_2

5. D. Strukov, G. Snider, D. Stewart & S. Williams *The missing memristor is found* Nature Vol 453— 1 May 2008— doi :10.1038/nature06932

III. — Une falaise de potentiel ?

On étudie l'évolution d'un quanton de masse m qui aborde, avec une énergie $E > 0$, une falaise de potentiel de hauteur V_0 constante située en $x = 0$, voir le schéma de la figure 7. L'étude est undimensionnelle conduite sur un axe Ox .

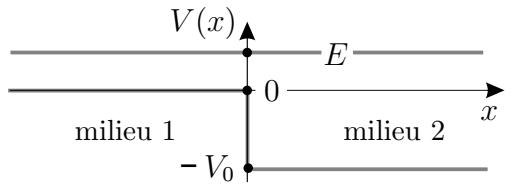


FIGURE 7 – Falaise de potentiel et énergie du quanton

- 24 — À partir de l'équation de SCHRÖDINGER, établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ associée au quanton.
- 25 — Dans le cas où le quanton arrive depuis $x \rightarrow -\infty$, établir les expressions de la fonction d'onde $\varphi_1(x)$ dans le milieu 1 et $\varphi_2(x)$ dans le milieu 2. Il n'est pas nécessaire de déterminer les constantes d'intégration.
- 26 — Établir l'expression du coefficient r rapport de l'amplitude de la fonction d'onde spatiale correspondant à l'onde réfléchie et de l'amplitude de l'onde incidente. De la même façon, établir l'expression du coefficient t rapport de l'amplitude de la fonction d'onde spatiale correspondant à l'onde transmise et de l'amplitude de l'onde incidente.
- 27 — En déduire les coefficients R et T de réflexion et de transmission de la densité de courant de probabilité. Faire l'application numérique lorsque $8E = V_0$.

Dans le cas du memristor des HP Labs, les charges constituant le courant $i(t)$ traversent le film de dioxyde de titane facilement dans un sens et beaucoup plus difficilement dans l'autre sens. On s'interroge pour savoir si ces charges peuvent être décrites comme le quanton des questions précédentes abordant une falaise de potentiel par un côté ou bien par l'autre pour expliquer la différence de conductivité du memristor en fonction du sens du courant.

- 28 — Qu'en pensez-vous ? Que proposeriez-vous ?

Formulaire

Analyse vectorielle en coordonnées polaires

Dans le système des coordonnées cylindro-polaires (r, θ, z) de base associée $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$, on rappelle quelques formules d'analyse vectorielle.

Soit f une fonction scalaire telle que $f = f(r, \theta, z, t)$, le gradient de cette fonction est :

$$\mathbf{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

Soit \vec{A} un vecteur fonction des coordonnées cylindriques, l'expression la plus générale du vecteur est :

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, z, t)\hat{e}_r + A_\theta(r, \theta, z, t)\hat{e}_\theta + A_z(r, \theta, z, t)\hat{e}_z$$

La divergence du vecteur \vec{A} est :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le rotationnel du vecteur \vec{A} est :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_z$$

Quelques règles sur les opérateurs :

$$\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = \vec{0} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{rot} \vec{A} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{A} &= \mathbf{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\Delta} \vec{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{rot} (f \vec{A}) = f \mathbf{rot} \vec{A} + \mathbf{grad} f \wedge \vec{A} \\ \operatorname{div} (f \vec{A}) &= f \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \mathbf{grad} f) f \end{aligned}$$

Soit S une surface fermée entourant un volume τ . Le flux d'un vecteur sur la surface S orientée vers l'extérieur est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur tout le volume τ :

$$\text{Théorème de Green - Ostrogradski} \quad \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau/S} \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$

Soit C une courbe fermée sur laquelle s'appuie une surface Σ . La circulation d'un vecteur le long de C est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers Σ orientée selon la règle du tire-bouchon.

$$\text{Théorème de Stokes} \quad \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma/C} \mathbf{rot} \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Mécanique quantique

On note $\hbar = h/2\pi$ avec h la constante de PLANCK. On rappelle l'équation de SCHRÖDINGER pour un quanton de masse m possédant l'énergie E , évoluant en milieu unidimensionnel d'axe Ox dans un potentiel⁶ $V(x)$ indépendant du temps. Le quanton est représenté par la fonction d'onde $\psi(x,t)$. On a :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x,t)$$

Dans le cas d'un potentiel $V(x)$ indépendant du temps, les états stationnaires du quanton sont décrits par la fonction d'onde $\psi_{es}(x,t)$ telle que :

$$\psi_{es}(x,t) = \varphi(x) \exp -i\frac{E}{\hbar}t$$

où $\varphi(x)$ est la fonction d'onde spatiale.

On rappelle enfin que la densité de courant de probabilité de présence est définie par :

$$\vec{J} = \pm \frac{\hbar k}{m} |\varphi(x)|^2 \hat{e}_x$$

où k est le module du vecteur d'onde associé au quanton.

FIN DE L'ÉPREUVE

6. Attention : en Mécanique quantique, on nomme potentiel $V(x)$ en réalité une énergie potentielle.

A2018 – PHYSIQUE I MP



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.**

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 9 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Interaction laser plasma à haut éclairement

Au début des années 2000, des mécanismes de génération d'impulsions électromagnétiques très brèves et de forte intensité, jusque là théoriques, ont été concrétisés sur le plateau de Saclay notamment par le Laboratoire d'Optique Appliquée de l'ENSTA PARISTECH et le Laboratoire de Physique à Haute Intensité du CEA.

Lorsqu'un faisceau laser de forte puissance est focalisé sur de la matière (gaz ou solide), cette dernière est ionisée quasi-instantanément et se transforme alors en un plasma globalement neutre. L'interaction entre le champ électromagnétique du laser et le plasma ainsi formé met en jeu une physique particulièrement riche et complexe. Sous certaines conditions, un rayonnement laser de haute fréquence (UV ou X) peut être émis par ce plasma. Dans le domaine temporel, ce rayonnement peut être associé à des impulsions très brèves dont la durée se situe dans la gamme des femto-secondes (10^{-15} s) voire atto-secondes (10^{-18} s). Les applications de ce type de laser sont maintenant largement mises en place en recherche, dans l'industrie et dans le domaine des applications biomédicales. Nous proposons d'étudier certains de ces mécanismes d'émission issus de l'interaction laser-plasma.

Hormis le nombre i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{E} pour un champ électrique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{u}_x tel que $\|\hat{u}_x\| = 1$. Les résultats numériques attendus sont des ordres de grandeur comportant au plus deux chiffres significatifs. Quatre documents d'information sont rassemblés à la fin du sujet.

I. — Génération d'harmoniques dans les gaz

I.A. — Champ laser et champ coulombien.

Cette partie s'appuie principalement sur le document I.

On adopte dans un premier temps une description semi-classique de l'atome d'hydrogène dans le référentiel du proton supposé fixe :

- la position de l'électron est repérée par le vecteur \vec{r} et sa vitesse par le vecteur \vec{v} ;
- l'électron est assimilé à un point matériel de masse $m \simeq 9.10^{-31}$ kg et de charge $q = -e$ où $e = 1.6.10^{-19}$ C désigne la charge élémentaire ;
- l'électron est animé d'un mouvement circulaire, de rayon $r = \|\vec{r}\|$ et de vitesse $v = \|\vec{v}\|$;
- on néglige le poids de l'électron ;
- la norme du moment cinétique est quantifiée : $mr v = n\hbar$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 10^{-34}$ J·s désigne la constante de Planck réduite et n est un entier naturel non nul.

1 — Donner l'expression de la force électrique coulombienne subie par l'électron, due au proton. Montrer qu'il s'agit d'une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle W_p dont on déterminera l'expression.

2 — Déterminer l'expression de l'énergie mécanique W_m de l'électron sur son orbite circulaire de rayon r , en fonction de r , e et $\epsilon_0 = 9.10^{-12}$ F·m $^{-1}$. Montrer que le rayon de la trajectoire s'écrit sous la forme $r = a_0 n^2$ où l'on exprimera a_0 en fonction de ϵ_0 , h , m , et e . Préciser la valeur de n lorsque l'électron est dans son état fondamental. Calculer la valeur numérique en électron-volt de l'énergie mécanique de l'état fondamental notée $-W_0$.

- 3 — On donne $a_0 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$ m, calculer la valeur de la norme du champ électrique coulombien E_c ressenti par l'électron dans son état fondamental. Calculer la puissance P de l'impulsion laser. Déterminer, notamment en fonction de P , les expressions de l'amplitude du champ électrique laser avant son passage à travers la lentille $E_\ell = E_0(z = -f')$ et au niveau du foyer $E_f = E_0(z = 0)$. En utilisant les valeurs numériques (fournies dans le tableau du document I relatives à la cible « gaz »), comparer E_c et E_f . Que peut-on en conclure ?

I.B. — Un mécanisme en trois étapes

Cette partie s'appuie principalement sur le document II.

Pour simplifier le problème, on limite l'étude au mouvement de l'électron le long d'un axe (O, \hat{u}_x) perpendiculaire à (O, \hat{u}_z) et x représente la coordonnée de l'électron le long de l'axe (O, \hat{u}_x). L'impulsion laser est modélisée par une onde électromagnétique plane. Le champ électrique du laser, au niveau de l'atome d'hydrogène situé au foyer du faisceau s'écrit

$$\vec{E}(z,t) = E_f \cos(\omega_0 t - k_0 z) \hat{u}_x$$

pour $0 \leq t \leq T$, avec $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = k_0 c = \frac{2\pi}{\lambda_0} c$. Le noyau, constitué d'un proton, est situé en O , il est supposé fixe.

- 4 — Justifier que pour l'étude du mouvement de l'électron, on peut négliger le terme $k_0 z$ dans l'expression du champ électrique du laser.

- 5 — Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction W_p entre le proton et l'électron en fonction de l'abscisse x . Vérifier qu'elle correspond bien à l'allure donnée sur la figure II.a

- 6 — Donner l'expression de la force de Lorentz subie par l'électron et causée par le champ électromagnétique du laser. Rappeler la relation de structure pour une onde électromagnétique plane harmonique. On la supposera applicable localement. A quelle condition, supposée vérifiée par la suite, cette force est-elle conservative ? Déterminer, en fonction de e , E_f , ω_0 , t et x , l'énergie potentielle $W_{p,\text{las}}(x,t)$ associée à cette force ainsi que l'expression de l'énergie potentielle totale

$$W_{p,\text{tot}}(x,t) = W_p(x) + W_{p,\text{las}}(x,t).$$

Préciser le sens du champ électrique dans la situation de la figure II.b .

- 7 — Justifier qu'il y a deux instants privilégiés par cycle optique où l'ionisation, c'est-à-dire la traversée de la barrière de potentiel, est la plus facile. Déterminer \tilde{x}_0 , la position correspondant au maximum de $W_{p,\text{tot}}$ selon x . Déterminer l'expression de $E_{f,i}$ correspondant à une ionisation en $x = \tilde{x}_0$ à l'un des instants privilégiés. Cette ionisation est-elle possible dans les conditions expérimentales précisées dans le tableau du document I, avec une cible « gaz » ?

On s'intéresse maintenant à la deuxième étape du mécanisme représentée sur la figure II.c . L'ionisation a lieu à un instant $t_i > 0$. On considère qu'elle confère une vitesse négligeable ($v(t = t_i) \simeq 0$) à l'électron et qu'elle s'effectue au niveau du noyau ($x(t = t_i) \simeq x_0 \simeq 0$). Pour $t \geq t_i$, l'électron n'est soumis qu'au champ électrique du laser $\vec{E}(t) = E_f \cos(\omega_0 t) \hat{u}_x$.

- 8 — Ecrire l'équation du mouvement, puis déterminer, en fonction de e , E_f , m , ω_0 , t et t_i , l'expression de la vitesse $\dot{x}(t)$, de la position $x(t)$ pour $t \geq t_i$. A posteriori, quelle condition doit être vérifiée pour que x_0 soit bien négligeable lors de l'étude du mouvement de l'électron dans le champ laser.

On s'intéresse enfin à la troisième étape du mécanisme représentée sur la figure II.d.

- 9** — Déterminer l'expression de l'énergie cinétique W_c de l'électron lors de sa recombinaison avec le noyau à un instant $t > t_i$. Exprimer sa valeur moyenne sur une période $\langle W_c \rangle$ en fonction de e , E_f , m et ω_0 . On admet que l'énergie cinétique maximale de l'électron est donnée par la relation $W_{c,\max} \simeq 3,2 \langle W_c \rangle$ et on donne $\langle W_c \rangle \simeq 60 \text{ eV}$. Lors de cette recombinaison, l'électron « retombant » dans son état fondamental, un photon est émis. On interprète cette émission comme étant celle d'une impulsion brève dont l'étendue du spectre correspond à la fréquence maximale possible d'un photon issu de la recombinaison. Estimer un ordre de grandeur de la durée δT de cette impulsion.

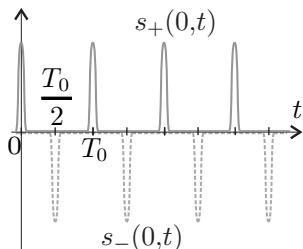


FIGURE 1 – Graphe du signal $s(0,t)$

L'émission de ces impulsions lumineuses très brèves a lieu deux fois par période : une fois après une ionisation du côté des $x > 0$ et une autre fois après une ionisation du côté des $x < 0$.

On modélise le train d'impulsions émis par l'atome par un signal $s(x,t) = s_+(x,t) + s_-(x,t)$. Au niveau de l'atome, on considère que $s_+(0,t) = s_0(t)$ et $s_-(0,t) = -s_0(t - \frac{T_0}{2})$ où la fonction $s_0(t)$ est périodique de période T_0 . Une allure possible de $s_+(0,t)$ et $s_-(0,t)$ est donnée par la figure 1. On souhaite déterminer les pulsations présentes dans le spectre associé au signal $s(t)$.

- 10** — Justifier le fait qu'il suffit de raisonner sur un signal sinusoïdal : $s_0(t) = S_0 \cos(\omega t)$. Donner les expressions des signaux $s_+(x,t)$ et $s_-(x,t)$ reçus à une distance x de l'atome. A quelle condition reliant ω à $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, le signal $s(x,t)$ est-il d'amplitude maximale ? Préciser les caractéristiques spectrales du train d'impulsions brèves émises lors de l'interaction d'un laser avec un plasma peu dense.

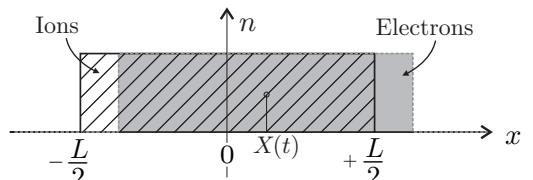
II. — Génération d'harmoniques sur un miroir plasma

Cette partie s'appuie principalement sur le document III.

Dans le cas où la cible est initialement un solide, l'émission d'impulsions brèves se fait par conversion d'énergie entre les oscillations d'un plasma et une impulsion lumineuse brève.

II.A. — Pulsation propre

Dans un premier temps on souhaite déterminer la pulsation propre des oscillations d'un plasma dans un problème unidimensionnel. Initialement, pour $t < 0$, le plasma est neutre, immobile et localisé entre les abscisses $x = -L/2$ et $x = +L/2$. Le vide règne de part et d'autre du plasma. On note n la densité particulaire des électrons, de masse m et de charge $q = -e$. On étudie le mouvement d'ensemble des électrons consécutif à une perturbation se produisant à l'instant $t = 0$. On considère que les ions restent fixes et qu'à chaque instant $t > 0$ la distribution des électrons reste homogène sur une longueur L . Étudier le mouvement du nuage revient alors à étudier celui d'un électron situé au centre de la distribution, à l'abscisse $X(t)$. L'effet de la perturbation peut donc se résumer à un déplacement impulsional du nuage électronique par rapport aux ions : pour $t < 0$ on a $X(t) = 0$ et $X(0) = X_0 > 0$.



- 11** — Tracer l'allure de la densité volumique de charge $\rho(x)$. Déterminer le champ électrique qui règne à l'intérieur du plasma, où la densité volumique de charge est nulle. Déterminer l'équation du mouvement d'un électron du plasma et en déduire que la pulsation propre du plasma est donnée par la relation $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

II.B. — Propagation dans un plasma homogène

On souhaite étudier la propagation d'une onde électromagnétique plane, de vecteur d'onde \vec{k} et de pulsation ω , dans un plasma homogène au sein duquel on néglige l'agitation thermique. On cherche les champs électrique et magnétique sous la forme $\vec{E} = \Re e(\underline{\vec{E}})$ et $\vec{B} = \Im m(\underline{\vec{B}})$, avec $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $\underline{\vec{B}} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

12 — Rappeler les équations de Maxwell. Le plasma étant supposé peu dense, localement neutre et le mouvement des électrons étant supposé non-relativiste, exprimer la conductivité complexe du milieu puis déterminer l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le plasma. Montrer que la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$. La pulsation ω étant fixée, en déduire qu'à partir d'une certaine densité particulaire électronique critique n_c , que l'on explicitera, la propagation n'est pas possible dans le plasma. Qu'advient-il alors de l'onde électromagnétique ?

On s'intéresse maintenant à la propagation, sous incidence normale, de l'onde électromagnétique dans la zone hétérogène de la surface du plasma. Cette zone de transition entre le vide et l'intérieur homogène est modélisée par une évolution exponentielle de la densité particulaire électronique décrite sur la figure III.b. On considère que la relation de dispersion établie à la question précédente est encore valable, mais avec $\omega_p = \omega_p(x)$.

13 — Déterminer l'abscisse x_c correspondant à la réflexion de l'onde électromagnétique.

On reprend la situation de la question précédente à l'exception notable du fait que l'onde électromagnétique arrive désormais sur la surface avec un angle d'incidence β . On s'intéresse à la propagation de cette onde dans le plan (xOy). La relation de dispersion précédente est toujours supposée valable.

14 — Justifier que la composante du vecteur d'onde le long de la surface, c'est-à-dire la composante k_y , se conserve au cours de la propagation. En déduire l'abscisse x_r de réflexion de l'onde électromagnétique en fonction de x_c , L et β . Comparer ce résultat avec celui obtenu sous incidence normale.

II.C. — Excitation d'ondes plasma à la surface.

On modélise dans cette partie la seconde étape du mécanisme décrit dans le document III. Dans un premier temps, on raisonne sur une seule dimension d'espace : x . On suppose qu'un paquet d'électrons traverse la surface vers les $x > 0$ avec une vitesse $\vec{v} = v\hat{u}_x$ constante. On choisit l'origine des temps lorsque le paquet passe en $x = -3L$. Lors de son passage, il excite localement des ondes plasma (voir figure 2) qui se mettent à osciller comme dans la partie II.A avec $X(x,t) = X_0 \cos \phi(x,t)$.

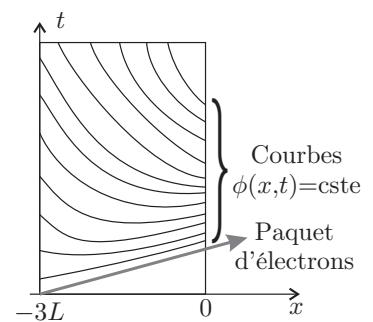
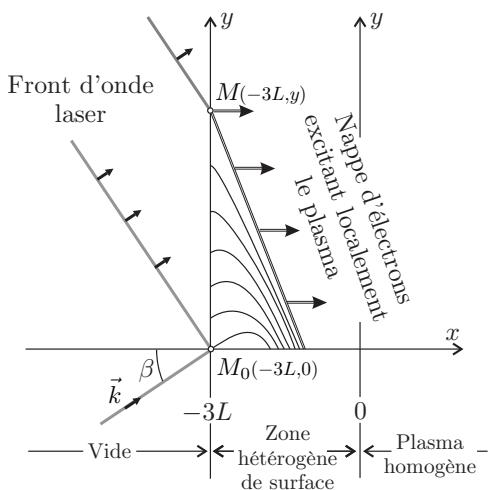


FIGURE 2 – Cas 1D

15 — Donner l'expression de l'instant $t_0(x)$ de passage du paquet d'électrons à l'abscisse x . Déterminer, pour $t > t_0(x)$, l'expression de la phase $\phi(x,t)$ en un point d'abscisse x . On prendra $\phi(x,t = t_0(x)) = 0$ et on exprimera le résultat en fonction de t , $t_0(x)$ et $\omega_p(x)$ puis en fonction de t , v , L , x et ω_{\max} , où ω_{\max} désigne la pulsation plasma associée à la densité particulaire maximale n_{\max} .

On définit le vecteur d'onde des oscillations plasma $\vec{k}_p = -\mathbf{grad} \phi(x,t)$ et on admet que les oscillations plasma ne peuvent émettre une onde électromagnétique que lorsque $\vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = 0$.

16 — Montrer que les oscillations plasma peuvent effectivement émettre un rayonnement mais qu'elles n'auraient pas pu le faire si elles avaient été excitées par un paquet d'électrons se déplaçant vers les $x < 0$.



caractérisera. Expliquer pourquoi l'on parle d'« Emission Cohérente de Sillage » (ECS). Conclure cette partie en précisant les propriétés remarquables du spectre de l'ECS.

III. — Interaction d'une impulsion avec une feuille mince

Cette partie s'appuie principalement sur le document IV.

L'impulsion laser est celle décrite dans le document I dans le cas d'une cible solide.

On étudie l'effet de l'expansion du plasma dans le vide sur le spectre du rayonnement émis afin d'estimer un ordre de grandeur de la température du plasma dans un modèle simplifié.

□ 18 — Justifier que si la température θ_e du plasma est assez élevée, alors on pourra, en première approximation, modéliser le plasma comme un gaz parfait. Montrer alors que la température θ_e du plasma reste inchangée pendant l'expansion du plasma dans le vide.

□ 19 — Déterminer l'expression de $n_{L,\max}$ en fonction de δ , L et de la densité particulaire électronique $n_{0,\max}$ avant expansion. En déduire l'expression de la pulsation plasma maximale $\omega_{L,\max}$ en fonction de δ , L et de la pulsation plasma $\omega_{0,\max}$ associée à la densité particulaire $n_{0,\max}$. Pour des éventuelles applications numériques, on prendra par la suite $\omega_{0,\max} \simeq 18,7 \omega_0$.

On suppose dans un premier modèle que la température θ_e des électrons du plasma est indépendante de l'épaisseur δ de la cible choisie.

□ 20 — Estimer dans ce modèle et à partir de la figure IV.b, un ordre de grandeur de la température électronique θ_e du plasma.

On suppose dans un second modèle que l'énergie cinétique totale des électrons du plasma ne dépend pas de l'épaisseur du plasma. On note δ_0 l'épaisseur de la feuille la plus épaisse lors de l'expérience ($\delta_0 = 100 \text{ nm}$) et L_0 la longueur caractéristique du gradient de ce plasma d'épaisseur δ_0 .

□ 21 — Comment varie alors la température électronique θ_e du plasma avec l'épaisseur δ ? Déterminer l'expression de $\omega_{L,\max}$ en fonction de δ , $\omega_{0,\max}$, δ_0 et L_0 . Que penser de ces deux modèles compte-tenu des spectres expérimentaux de la figure IV.b?



Document I : Modélisation du faisceau laser incident

Le faisceau laser est modélisé de la façon suivante :

- L'amplitude du champ laser est constante durant la durée de l'impulsion $T = 50 \text{ fs}$ ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$) et elle est nulle avant et après cette impulsion (Fig I.a). La période des oscillations du champ laser est notée T_0 et correspond dans le vide à une longueur d'onde $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$. L'énergie totale de l'impulsion laser est W_T .
- Le faisceau présente une symétrie cylindrique d'axe (Oz). Dans un plan transverse ($z = \text{constante}$), l'éclairement $I(r,z)$ est uniforme dans un disque de rayon $R(z)$ et il est nul au-delà (fig I.b). On rappelle la relation entre l'éclairement $I(r,z)$ (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) et l'amplitude du champ laser $E(r,z)$: $I(r,z) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E(r,z)^2$ où ε_0 désigne la permittivité du vide et $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide. On notera $I_0(z)$ et $E_0(z)$ l'éclairement et le champ électrique sur l'axe $r = 0$.

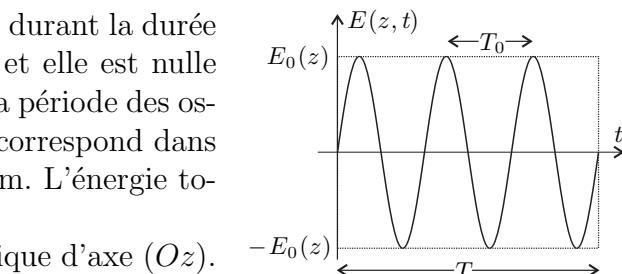
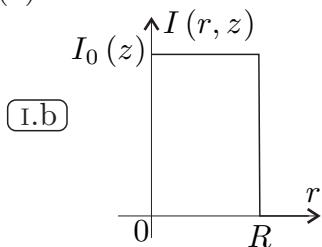
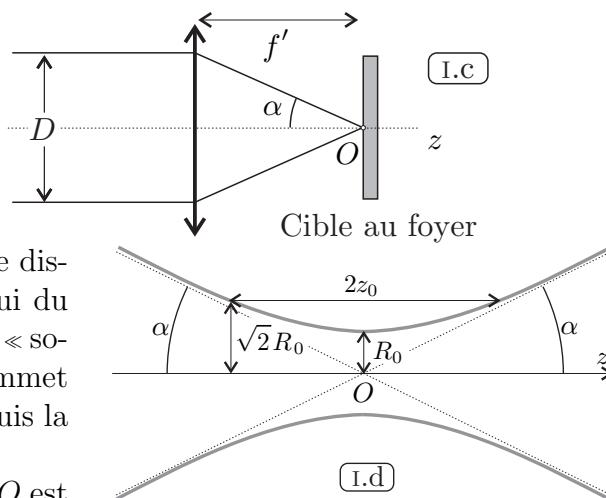


FIG. I.a – Amplitude laser

- Le faisceau est focalisé, par une lentille de distance focale f' et de diamètre égal à celui du faisceau laser D , sur une cible (« gaz » ou « solide »). L'angle α est le demi-angle au sommet du cône sous lequel est vue la lentille depuis la cible, placée au foyer O (fig. I.c).
- L'allure du faisceau au voisinage du foyer O est représentée sur la figure I.d, il est caractérisé par les relations $z_0 = \frac{\pi R_0^2}{\lambda_0}$, $\tan \alpha \simeq \frac{\lambda_0}{\pi R_0}$ et $R(z) = R_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$.

Les conditions physiques expérimentales sont rassemblées ci-contre.

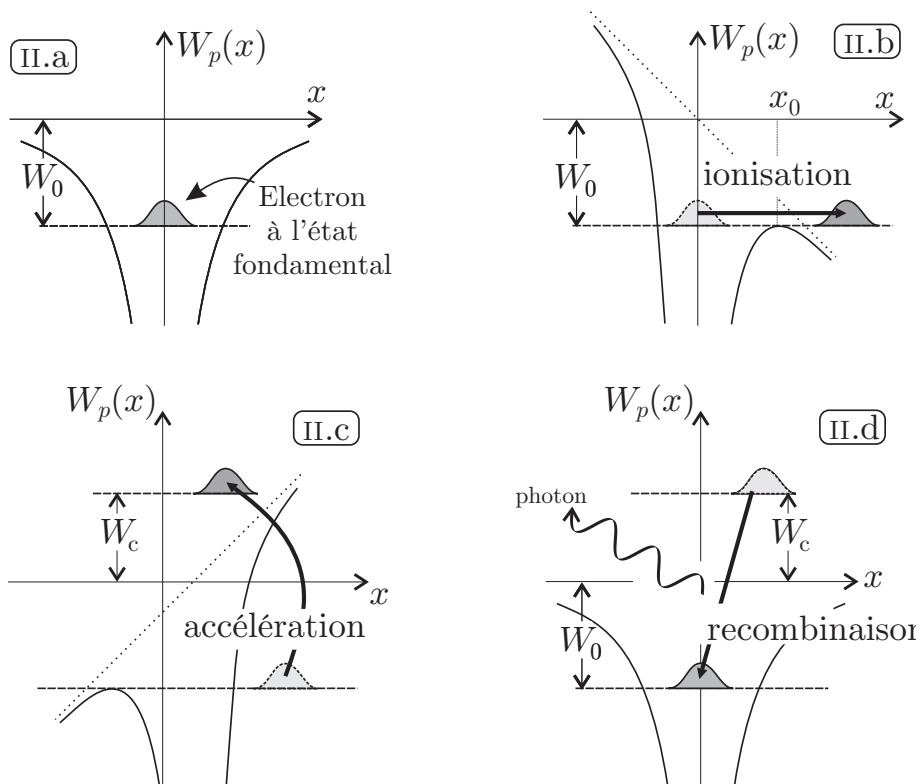


Nature de la cible	gaz	solide
Durée impulsion T	50 fs	30 fs
Energie totale laser W_T	1 mJ	1 J
Diamètre faisceau D	1 cm	5 cm
Focale de la lentille f'	1 m	30 cm



Document II : Cas où la cible est un « gaz »

La cible étant un gaz, on peut, pour comprendre le mécanisme d'émission d'impulsions attoseconds, se ramener à l'interaction d'un champ électrique laser avec un atome, par exemple l'hydrogène. Avant l'arrivée de l'impulsion laser, l'électron de l'atome d'hydrogène est « au repos » dans son état fondamental caractérisé par une énergie potentielle négative $-W_0$. On représente, en mécanique quantique, l'électron par un paquet d'ondes stationnaires. (Fig II.a)



Dans le cadre d'un modèle semi-classique qui donne des résultats satisfaisants, on peut décomposer le mécanisme d'émission d'impulsions en trois étapes :

- Première étape (Fig II.b) : sous l'influence du champ laser, le puits de potentiel dans lequel se trouve l'électron de l'atome d'hydrogène est modifié et la hauteur de la barrière de potentiel s'annule. L'électron s'extract alors de l'attraction coulombienne due au noyau atomique. En réalité l'ionisation peut avoir lieu par effet tunnel avant l'annulation de la barrière de potentiel. Nous n'étudierons pas cette possibilité dans ce problème.
- Deuxième étape (Fig II.c) : l'électron, libéré de l'attraction du noyau, est accéléré par le champ laser. Il peut revenir vers le noyau avec une énergie cinétique W_c
- Troisième étape (Fig II.d) : lors de son retour sur le noyau, l'électron se recombine avec le noyau et émet un photon d'énergie $h\nu$.

Les trois étapes de ce mécanisme se déroulent au cours d'un cycle optique du laser dont la période est notée T_0 .



Document III : Cas où la cible est « solide »

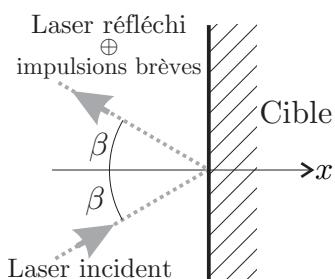


FIG. III.a – Miroir

Lorsque la cible est un « solide », le plasma formé dès le début de l'arrivée de l'impulsion laser est très dense. Comme la cible est totalement ionisée, la densité particulaire en électron n_e vaut : $n_e = Z \times n_i$ où n_i est la densité particulaire atomique du solide et Z le nombre de charge de l'élément.

Le faisceau laser peut s'y réfléchir comme sur un miroir. On parle alors de « miroir plasma ». Les impulsions brèves sont émises, lors de l'interaction du faisceau laser avec ce « miroir plasma », dans la direction du faisceau réfléchi. On considère que cette direction satisfait les lois de Descartes de l'optique géométrique (fig III.a).

La surface du « miroir plasma » présente une très forte hétérogénéité de densité particulaire entre le vide (à l'extérieur) et une région très dense et homogène (à l'intérieur). On modélisera cette densité particulaire en électrons par une fonction exponentielle (fig III.b).

$$n_e(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -3L \\ n_{\max} e^{x/L} & \text{pour } -3L \leq x < 0 \\ n_{\max} & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

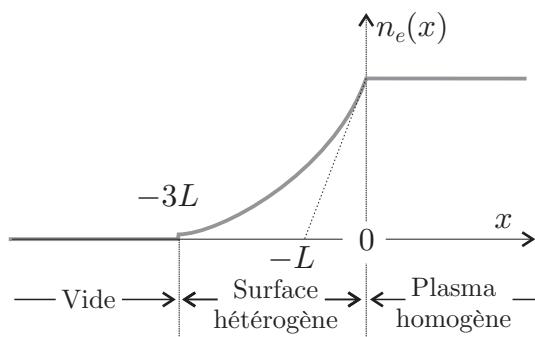
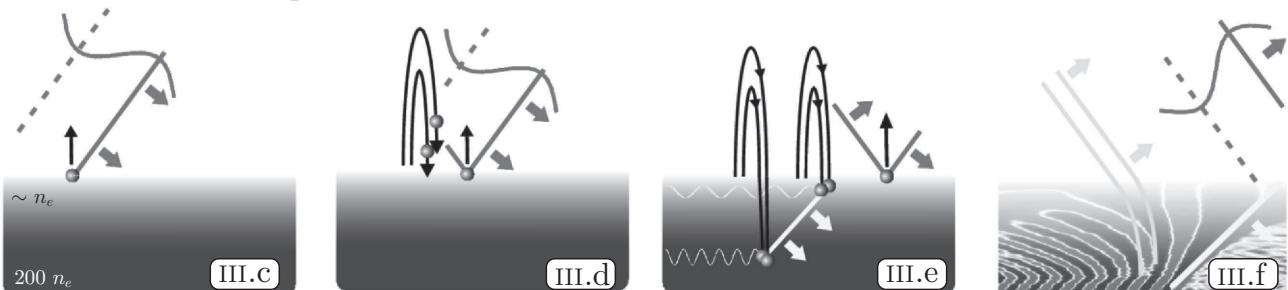


FIG. III.b – Transition de n_e

La densité particulaire des ions est de la même forme afin que le plasma soit localement neutre avant arrivée de l'onde électromagnétique. On suppose que n_{\max} , qui correspond à la densité particulaire électronique lorsque la cible est totalement ionisée est supérieur à n_c .

Le mécanisme d'émission que nous allons décrire est appelé Emission Cohérente de Sillage. Pour être efficace ce mécanisme nécessite que le faisceau laser incident arrive de façon oblique sur le « miroir plasma ». On note β l'angle d'incidence sur la surface plane ($x = 0$) de la cible devenue un « miroir plasma ».



Figures extraites de la thèse de Cédric Thaury - 2008

Ce mécanisme peut être décrit en trois étapes :

- Première étape : Les électrons, de la surface du miroir plasma, sont arrachés par le champ électrique du laser (fig III.c), puis renvoyés par paquet vers le plasma (fig III.d)
- Deuxième étape : Lors de la traversée de la surface hétérogène du miroir plasma, les paquets d'électrons excitent des oscillations plasma (à la fréquence plasma locale $\omega_p(x)$). Du fait de l'incidence oblique, la superposition des paquets d'électrons formés à différents points de la surface résulte en un front de densité oblique qui se propage dans le plasma (fig III.e et fig III.f)
- Troisième étape : Ces oscillations plasma émettent une impulsion lumineuse attoseconde dans la direction du faisceau réfléchi lorsque le front des oscillations plasma est perpendiculaire à la surface du miroir plasma (fig III.f)

Ce mécanisme se répète à chaque cycle optique du laser (de période T_0).



Document IV : Cas où la cible est une « feuille mince »

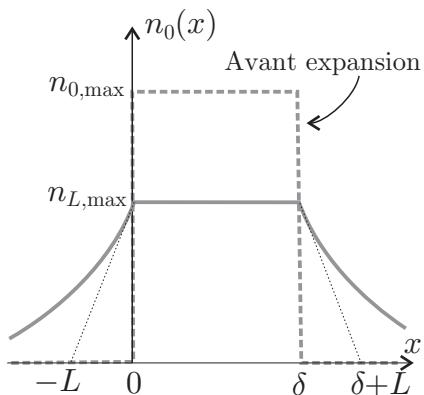


FIG. IV.a – Profil

On s'intéresse au cas où l'épaisseur du miroir plasma est nanométrique (de 10 nm à 100 nm). Dans ce cas, la totalité de la cible est vaporisée et ionisée pour former un plasma. L'expansion de ce plasma dans le vide a pour conséquence une diminution de la densité particulaire maximale de la cible.

L'allure du profil de densité particulaire électronique avec et sans expansion est reportée sur la figure IV.a. On note δ l'épaisseur de la cible, et L la longueur caractéristique de l'hétérogénéité de densité aux surfaces. Cette dernière longueur dépend de la température θ_e du plasma et de la durée T de l'impulsion laser incidente. On peut l'estimer par une relation de la forme $L = c_s T$ avec $c_s = \sqrt{\frac{Z k_B \theta_e}{m_i}}$ où $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ désigne la constante de Boltzmann, m_i la masse ionique et Z le nombre

de charge de l'atome. La cible est ici en carbone avec $Z = 6$ et $m_i = 2 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. On peut estimer que l'énergie cinétique moyenne d'un électron du plasma est égale à $\frac{3}{2} k_B \theta_e$.

Nous modéliserons le profil de densité particulaire des électrons $n_L(x)$ de la façon suivante :

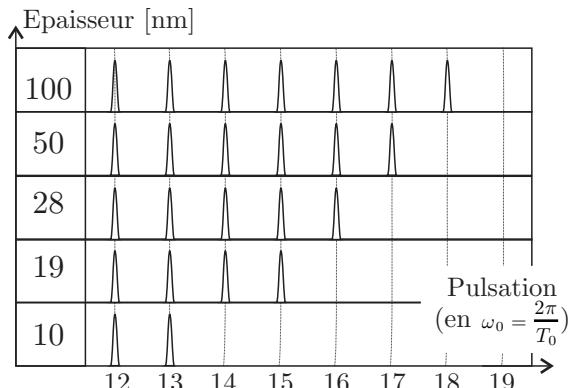


FIG. IV.b – Spectres

$$n_L(x) = \begin{cases} n_{L,\max} e^{x/L} & \text{pour } x < 0 \\ n_{L,\max} & \text{pour } 0 < x < \delta \\ n_{L,\max} e^{-(x-\delta)/L} & \text{pour } \delta < x \end{cases}$$

Dans ce modèle l'épaisseur δ de l'intérieur homogène du plasma ne varie pas pendant l'interaction.

Lorsque l'on fait varier l'épaisseur δ de la cible, on observe que l'étendue du spectre varie. L'harmonique maximale du spectre augmente avec l'épaisseur du miroir plasma (fig IV.b).

FIN DE L'ÉPREUVE

A2019 – PHYSIQUE I MP



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.**

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Physique en arctique

Ce sujet aborde différentes questions relatives aux propriétés physiques particulières aux régions polaires. Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème ainsi qu'un formulaire sont regroupés à la fin de l'énoncé.

Les exemples seront tous traités dans le cas des régions polaires nord (également appelées arctiques ou boréales). Les notations géographiques usuelles sont également rappelées en fin d'énoncé. Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.

Les deux parties sont indépendantes.

I. — Pôles géographiques et magnétiques

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques ; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires. Les parties I.A et I.B sont indépendantes entre elles.

La partie I.A est consacrée à la description dipolaire du champ géomagnétique (le dipôle disposé au centre de la Terre et modélisant des courants électriques dans le noyau de la planète).

La partie I.B présente le modèle autodynamo du champ géomagnétique, susceptible de rendre compte des inversions du champ géomagnétique qui ont eu lieu dans le passé et ont laissé une trace dans les propriétés magnétiques de certains sédiments sous-marins.

I.A. — Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant supposée indiquer le nord.

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur \vec{e}_r local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

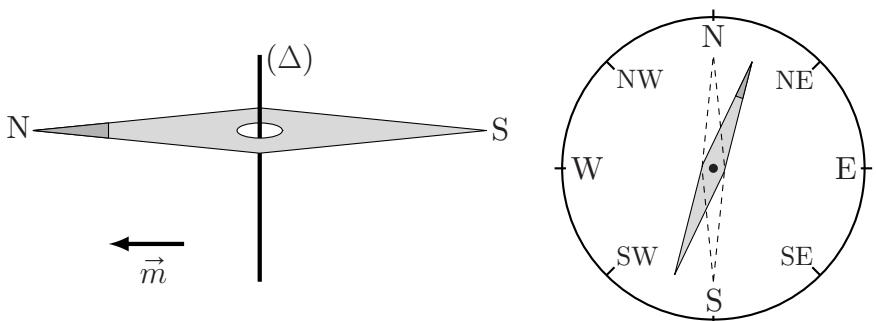


FIGURE 1 – Boussole de navigation

1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) ; légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

2 — Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 7). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .

□ 4 — Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique \vec{B} , projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle D formé par \vec{B} avec le nord magnétique local; la déclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles »? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud?

I.B. — Modèle autodynamo et fluctuations du champ

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau métallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (cf. fig. 2). Le système comporte N spires (circulaires de rayon a , de centre O et d'axe (Oz), qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon $b < a$, qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega(t)$ et le moment d'inertie I (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru par le même courant $i(t)$ que les spires; il est aussi entraîné par la rotation de la Terre avec un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$. Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée R .

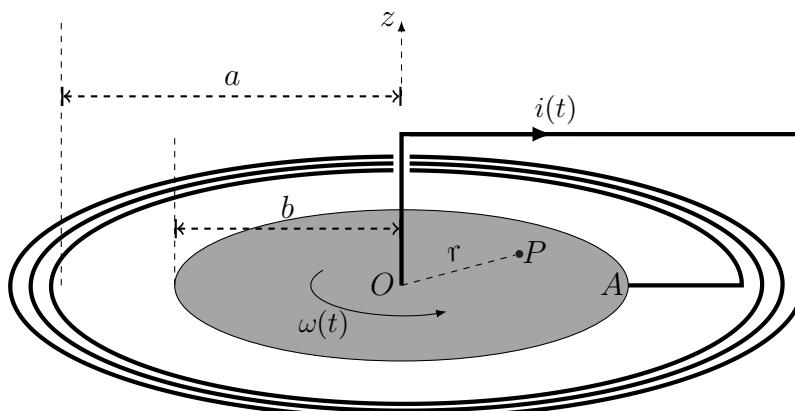


FIGURE 2 – Le modèle autodynamo pour le champ géomagnétique

On note $\vec{B}(P)$ le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P du disque tournant, avec $r = OP$; on supposera $N \gg 1$. Si $i(t) \neq 0$, on note $M_{r_{\max}} = -\frac{1}{i(t)} \int_0^{r_{\max}} r \vec{e}_z \cdot \vec{B}(P) dr$; en particulier on pourra utiliser dans ce qui suit les intégrales M_a et M_b pour $r_{\max} = a$ ou b respectivement.

□ 6 — Quelle est la direction de $\vec{B}(P)$? Quels sont les signes de M_a et M_b ? Comparer M_a et M_b . Expliciter l'inductance propre L du circuit électrique de la figure 2 en fonction notamment d'une de ces intégrales.

□ 7 — On suppose d'abord que le courant $i(t)$ traverse le disque uniquement en ligne droite du point A de sa périphérie à O . Exprimer la force de Laplace $d\vec{F}_L$ s'exerçant sur un élément de longueur du segment AO . Exprimer alors le moment $\Gamma_L = \vec{F}_L \cdot \vec{e}_z$ des forces de Laplace exercées sur ce disque en fonction de $i(t)$ et M_b . Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de A à O , on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

□ 8 — En faisant l'hypothèse de la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique, relier la force électro-motrice $e(t)$ induite par les mouvements de rotation du disque à M_b , $i(t)$ et $\omega(t)$.

□ 9 — Établir les équations régissant les évolutions du courant dans le noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = i(t) [\alpha\omega(t) - \beta] \\ \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \delta i^2(t) \end{cases}$$

On exprimera les constantes positives α , β , γ , et δ en fonction de R , L , M_b , I et Γ_0 .

Soit i_0 un courant constant arbitraire, on considère la fonction

$$\mathcal{H}(\omega, i) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Li^2 - \frac{L\Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{IR}{M_b}\omega$$

□ 10 — Calculer $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ et simplifier son expression. Comment peut on interpréter la fonction \mathcal{H} ? Déterminer les points du plan (i, ω) pour lesquels le gradient de \mathcal{H} s'annule. Comment s'interprétent ces points?

□ 11 — Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure 3.

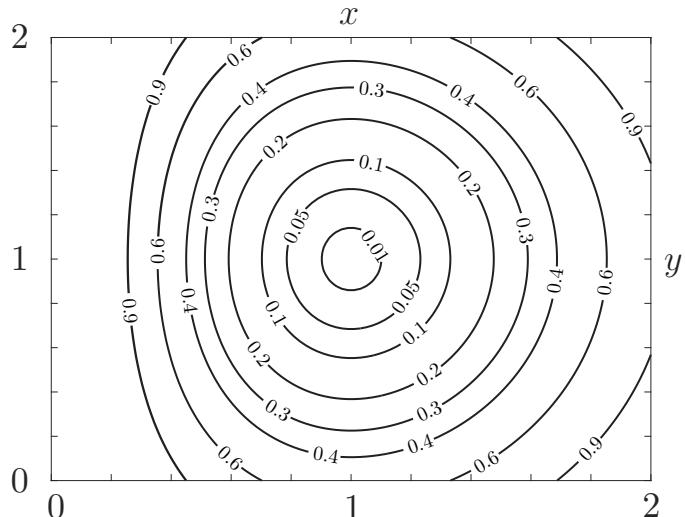


FIGURE 3 – Courbes de valeurs constantes définies par la fonction $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \ln(x) - y = c$. Les valeurs de c sont indiquées sur les courbes.

II. — La glace de la banquise

L'existence de couverts de glace de grande épaisseur au-dessus des océans polaires est bien sûr une caractéristique remarquable des régions polaires. On étudie ici deux propriétés de ces couverts de glace :

- quelques propriétés mécaniques d'un traîneau glissant sur sa surface (partie II.A) ;
- un modèle simple de croissance de l'épaisseur de la glace en hiver (partie II.B).

II.A. — Un traîneau sur la glace

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou *musher*, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d .

□ 12 — Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Montrer qu'un tel élément de corde transmet les tensions et que celles-ci sont colinéaires à la corde.

□ 13 — Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ'_d , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2 \text{ kg}$, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

□ 14 — Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.

□ 15 — La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5 \text{ s}$. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. fig. 4). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.

□ 16 — Déterminer en fonction des données la tension \vec{T} de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

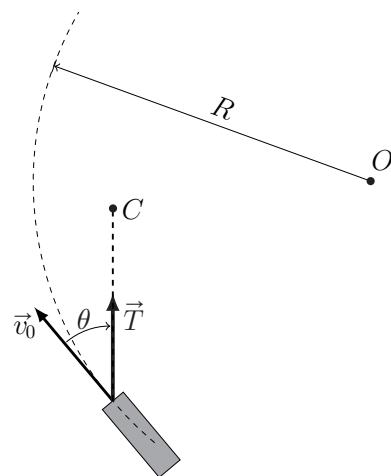


FIGURE 4 – Trajectoire circulaire du traîneau

II.B. — Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante (cf. fig. 5) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à $T_1 = 4^\circ\text{C}$ par les courants océaniques. Sur une hauteur constante e sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à l'altitude $z = 0$ de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante $z_g(t)$ qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante $T_2 = -40^\circ\text{C}$. On notera λ_e et λ_g les conductivités thermiques et c_e et c_g les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace, ρ_g et l_f la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

L'épaisseur de glace $z_g(t)$ augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface S unité (cf. fig. 5) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

□ 17 — Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur δz prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_g(z,t)$ au sein de la glace.

□ 18 — Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur Δz . Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température T_g ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entend par « assez lentes ».

On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi-statiques.

□ 19 — Définir et exprimer les résistances thermiques R_g et R_e , pour une aire donnée S , des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

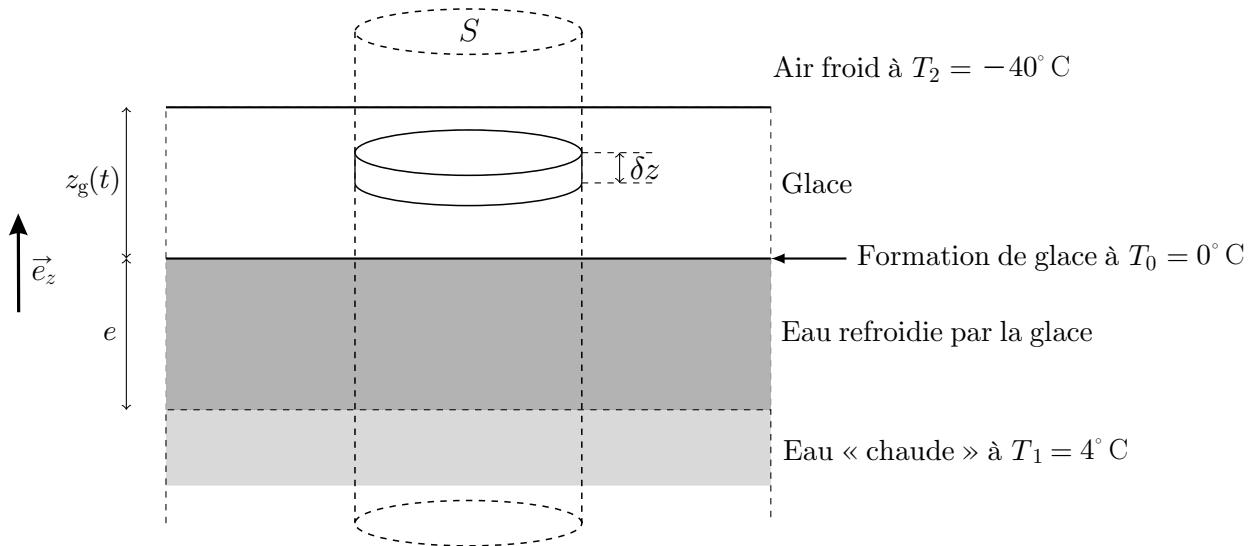


FIGURE 5 – L'océan sous la banquise en formation

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto-conductifs) : la puissance échangée par unité d'aire de cette surface vérifie $|\mathcal{P}_u| = h|T_s - T_2|$ où T_s est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient $h > 0$ de la loi de Newton est supposé connu et constant.

- ❑ 20 — Exprimer la résistance thermique R_i , pour une aire S , de l'interface entre l'air et la glace.
- ❑ 21 — Montrer que le régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure 6 et préciser l'expression du « courant » Φ du « générateur de courant » en fonction notamment de l_f , ρ_g et de la vitesse de croissance $v_g = \frac{dz_g}{dt}$ de la couche de glace.

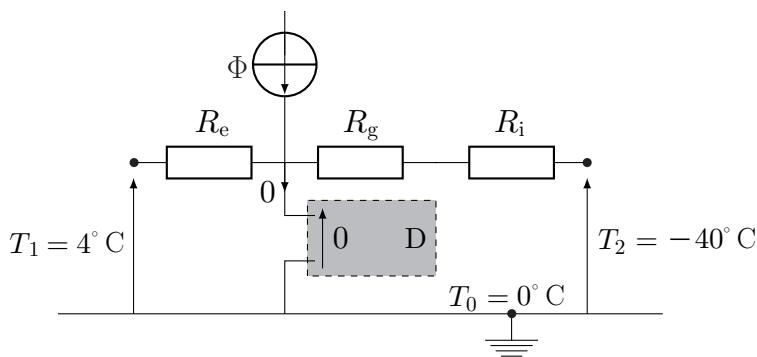


FIGURE 6 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace. Le dipole D représenté sur cette figure permet d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant dans cette branche du circuit.

- ❑ 22 — Établir l'équation différentielle vérifiée par $z_g(t)$. On suppose que pour toutes les valeurs de t considérées on a $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$, en déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche de glace sous la forme $\tau_g [\ell_g z_g(t) + z_g^2(t)] = \ell_g^2 t$ où l'exprimera les grandeurs τ_g et ℓ_g en fonction des paramètres du modèle. L'instant $t = 0$ correspond au début de la formation de la banquise.

- ❑ 23 — Tracer et commenter l'allure de la courbe donnant z_g en fonction de t . On montrera notamment l'existence de deux régimes successifs.

Données et formulaire utiles pour l'ensemble du sujet

Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Logarithme népérien du nombre 20	$\ln(20) \simeq 3,0$

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera $(Oxyz)$ les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 7 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre ; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$) ; celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 7 à droite.

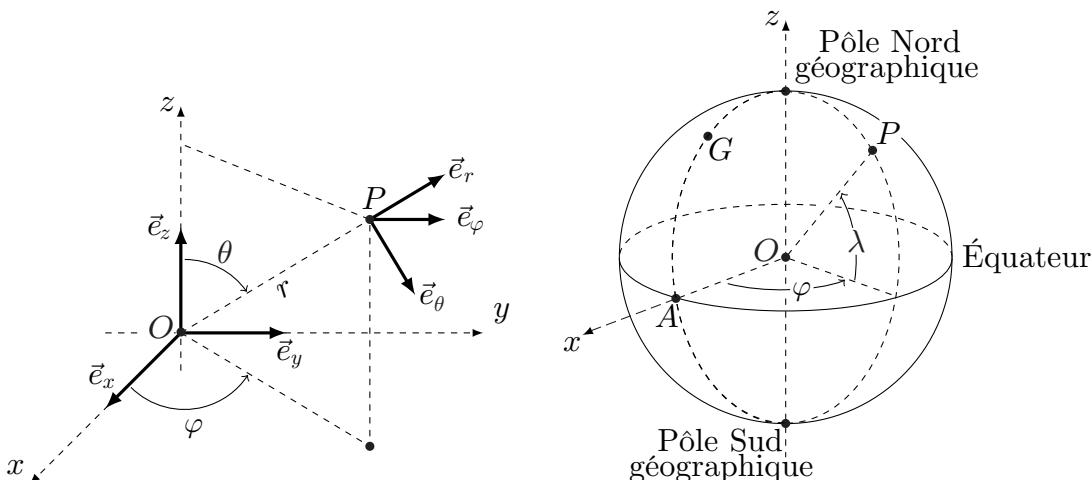


FIGURE 7 – Coordonnées sphériques et géographiques

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où} \quad \vec{R} = \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

FIN DE L'ÉPREUVE



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 9 pages de texte et 1 document réponse.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Au temps des Mayas

Les phénomènes naturels terrestres ou célestes ont nourri, au fil des âges, les cultures des civilisations anciennes et contribué à forger leur vision du monde. Les exemples astronomiques sont nombreux. Il n'est pas rare de trouver, par exemple, des bâtiments orientés selon les directions astronomiques des levers et couchers du Soleil ou de Vénus, astres qui furent souvent associés à des divinités importantes. Dans ce problème, on se propose d'étudier quelques phénomènes physiques auxquels les Mayas, civilisation précolombienne d'Amérique centrale, ont été confrontés ou pour lesquels ils ont manifesté de l'intérêt :

- i) La couleur de la Lune totalement éclipsée,
- ii) L'écho de la grande pyramide de Chichén Itzá.

Notations et valeurs numériques :

- Notations : les notations adoptées sont les notations internationales (norme ISO 80000-2).
- Vecteurs : conformément aux notations internationales, les vecteurs sont représentés en caractères gras. Par exemple, le champ vectoriel de pesanteur terrestre, supposé uniforme, est noté \mathbf{g} . Les vecteurs de base, unitaires, sont désignés par un e .
- Valeurs numériques : lorsqu'une valeur numérique non nulle est demandée, l'écart relatif de la réponse par rapport à la valeur exacte ne doit pas excéder 20%.
- Données astronomiques : les données numériques astronomiques sont regroupées à la fin de l'énoncé. Les deux parties du problème sont indépendantes.

I. — Couleur de la Lune totalement éclipsée

Lorsqu'une éclipse de Lune se produit, cet astre, majeur pour les Mayas, change d'aspect durant plusieurs heures. Dans une société où le mécanisme précis d'une éclipse est méconnu, l'interprétation et la signification du phénomène se réfère souvent, sinon toujours, à une origine mythologique ou religieuse. C'est en particulier le cas de la couleur évocatrice prise par la Lune lorsqu'elle se trouve totalement immergée dans l'ombre de la Terre, couleur dont l'analyse fait l'objet de cette dernière partie.

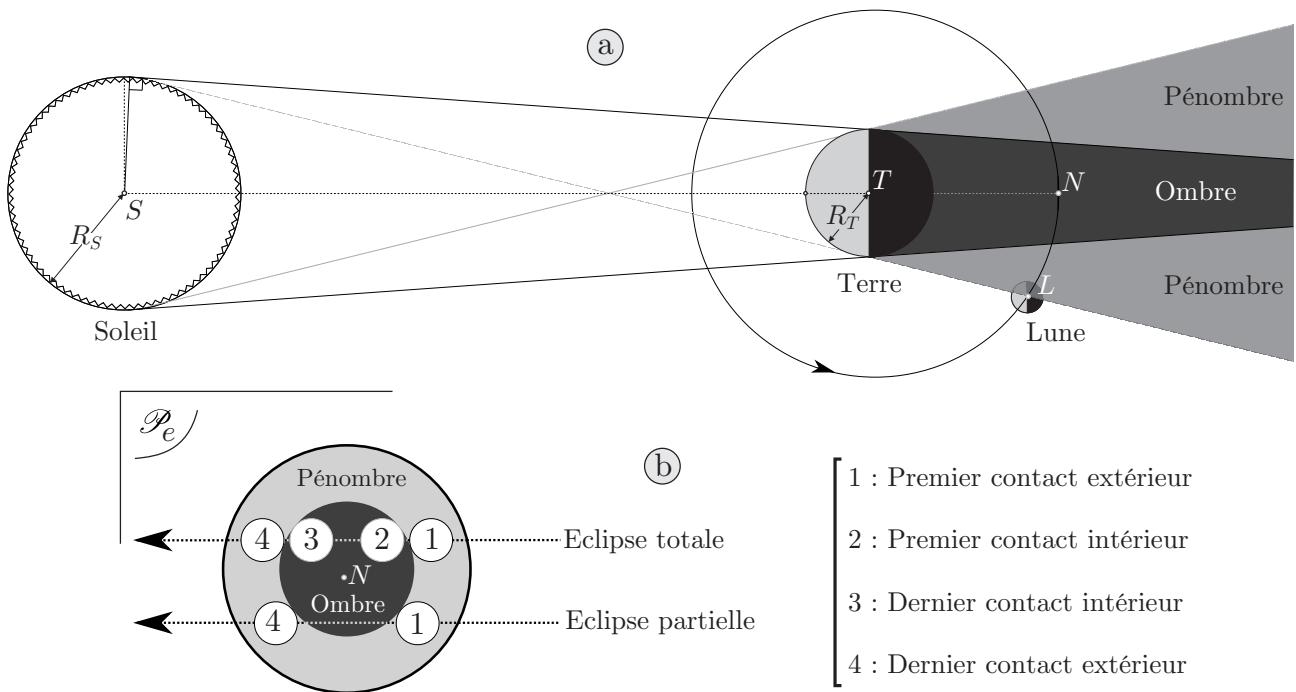


FIGURE 1 – Chronologie d'une éclipse de Lune : a) Phénomène général ; b) Vision depuis la Terre de l'évolution dans une section droite du cône d'ombre terrestre au niveau de l'orbite lunaire. Les disques blancs contenant un chiffre représentent le disque lunaire dans l'étape repérée par ce chiffre

Une éclipse se produit lorsque la Lune entre dans le cône d'ombre de la Terre (Fig. 1a). On note N le point situé sur l'axe ST de symétrie de révolution du cône d'ombre terrestre (S centre du Soleil et T centre de la Terre) à la distance $r_L = TL$ de T (L centre de la Lune) à l'opposé du Soleil (Fig. 1a). Dans un plan frontal \mathcal{P}_e orthogonal à ST , et placé en N , l'éclipse suit la chronologie indiquée sur la figure 1b. On note respectivement R_S , R_T et R_L les rayons solaire, terrestre et lunaire.

Des considérations de géométrie élémentaire montrent que dans le plan \mathcal{P}_e , la Lune tient plus de deux fois dans le cône d'ombre de la Terre. Pourtant, durant la totalité (entre le premier contact intérieur et le dernier contact intérieur), c'est-à-dire lorsque la Lune est entièrement plongée dans l'ombre de la Terre, elle est nettement visible dans le ciel !

I.A. — Sources de lumière éclairant la Lune

La photographie reproduite sur la figure 2 a été prise, depuis Toulouse, lors de l'éclipse totale de Lune du 28 septembre 2015. La direction du zénith (sens de la verticale ascendante) est indiquée sur la figure.

- 1 — Situer la photographie de la figure 2 dans la chronologie de la figure 1b.

On suppose désormais que la Lune est totalement immergée dans l'ombre de la Terre (éclipse totale) et que son centre L occupe le point N de son orbite.

Imaginons, pour commencer l'analyse, que la Terre soit dépourvue d'atmosphère.

- 2 — Proposer un ordre de grandeur de l'angle θ_d caractéristique de la diffraction de la lumière solaire par la Terre, en admettant que cet angle est identique au phénomène de diffraction produit par une ouverture de même taille caractéristique que le diamètre de la Terre, éclairé par une onde plane de direction ST . En déduire la taille caractéristique a_d de la figure de diffraction dans le plan d'observation \mathcal{P}_e . La diffraction peut-elle éclairer le disque lunaire durant la phase de totalité ? Citer, dans le contexte de l'hypothèse envisagée, d'autres sources possibles d'éclairage du disque lunaire.

On tiendra désormais compte de la présence de l'atmosphère terrestre, toutes les autres sources de lumière envisageables étant insuffisantes pour expliquer l'éclairement de la Lune durant la phase de totalité.

I.B. — Modèle d'atmosphère isotherme

On suppose que l'atmosphère terrestre est en équilibre mécanique à une température $T \approx 20^\circ\text{C}$ uniforme et stationnaire. On cherche le profil altimétrique de masse volumique : c'est-à-dire l'expression de la masse volumique ρ_a en fonction de l'altitude Z mesurée depuis un point G de la surface terrestre (Fig. 3). Le vecteur unitaire e_Z sera dirigé dans le sens de la verticale ascendante, et on note $g \approx 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, l'intensité du champ de pesanteur terrestre. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On note $R \approx 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

- 3 — Déterminer le profil altimétrique de masse volumique $\rho_a(Z)$ en fonction de $\rho_a(0)$ et d'une hauteur caractéristique H_c que l'on exprimera et dont on calculera la valeur numérique.
- 4 — Évaluer numériquement la masse volumique de l'air au niveau de la mer (pression d'environ 1 bar) puis en déduire celle de l'air au sommet du mont Everest (8 848 m d'altitude) : on indique que $\exp(-1) \approx 1/3$. Les valeurs moyennes annuelles de pression et de température au sommet de l'Everest sont respectivement 321 hPa et -23°C . Le modèle isotherme est-il réaliste ?

Eclipse de Lune du 28 septembre 2015



FIGURE 2 – Éclipse de Lune

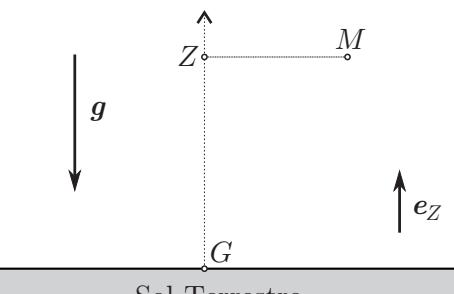


FIGURE 3 – Un point dans l'atmosphère terrestre.

I.C. — Onde électromagnétique incidente

Une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique, se propage dans le vide illimité le long et dans le sens d'un axe (O, \mathbf{e}_x), l'espace étant rapporté à un repère orthonormé ($O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) dans lequel on note x, y et z les coordonnées spatiales d'un point de l'espace et t , le temps.

Le champ électrique de l'onde est polarisé rectilignement selon \mathbf{e}_y . On note $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide, c la constante d'Einstein (célérité dans le vide des ondes électromagnétiques), $E_m > 0$ l'amplitude du champ électrique, $B_m > 0$ celle du champ magnétique, ω la pulsation de l'onde, $E(x, t)$ la composante du champ électrique et $B(x, t)$, celle du champ magnétique. La phase du champ électrique, à l'origine spatio-temporelle, est nulle.

5 — Donner les expressions réelles des champs de vecteur électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} puis exprimer B_m en fonction notamment de E_m . Représenter sur un même graphique, à une date t donnée, l'évolution spatiale du champ électrique ainsi que celle du champ magnétique.

6 — Exprimer le vecteur de Poynting $\mathbf{R}(x, t)$ en fonction notamment de E_m . Calculer l'ordre de grandeur de E_m pour une onde électromagnétique véhiculant une intensité $I_0 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.

I.D. — Transfert du rayonnement solaire à travers l'atmosphère terrestre

L'onde électromagnétique précédente se propage désormais dans l'atmosphère terrestre et rencontre sur son trajet, des molécules du gaz atmosphérique, mais aussi, dans la stratosphère (entre 15 et 20 km d'altitude), de fines poussières en suspension (aérosols).

Le gaz atmosphérique a pour effet de diffuser sélectivement l'onde incidente (dépendance fréquentielle), réduisant ainsi la puissance transportée par l'onde. On modélise la diffusion atmosphérique en supposant que chaque molécule rencontrée diffuse, en moyenne temporelle, la puissance \mathcal{P}_a donnée par :

$$\mathcal{P}_a = k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 I$$

où k_a et ω_0 sont des constantes qui caractérisent la composition chimique du gaz atmosphérique et I l'intensité de l'onde électromagnétique. On note $\eta_a(x)$ le nombre de molécules par unité de volume du gaz atmosphérique, x désignant toujours l'abscisse mesurée le long de la direction de propagation.

Les poussières ont pour effet d'absorber non sélectivement (indépendance fréquentielle) l'onde incidente, réduisant aussi la puissance transportée. On modélise l'effet des poussières sur le rayonnement en supposant que chaque poussière rencontrée absorbe, en moyenne temporelle, la puissance \mathcal{P}_p donnée par :

$$\mathcal{P}_p = k_p I$$

où k_p est une constante qui caractérise la composition chimique des poussières. On note $\eta_p(x)$ le nombre de poussières par unité de volume.

7 — Exprimer $\eta_a(x)$ en fonction notamment de la masse volumique du gaz atmosphérique $\rho_a(x)$ au point d'abscisse x .

8 — Effectuer un bilan unidimensionnel de puissance électromagnétique moyenne pour une tranche d'air limitée par les plans d'abscisse x et $x + dx$; en déduire la relation liant l'intensité $I(x + dx)$ de l'onde en $x + dx$ en fonction notamment de l'intensité $I(x)$ en x : il faudra prendre en compte les deux phénomènes, de diffusion et d'absorption.

9 — Montrer qu'il est possible d'écrire $I(x)$ sous la forme suivante :

$$I(x) = I(0) \exp [-d_o(x)]$$

où $d_o(x)$ est un facteur, appelé « densité optique », que l'on exprimera en fonction des quantités intégrales :

$$\int_0^x \eta_a(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad \int_0^x \eta_p(\xi) d\xi$$

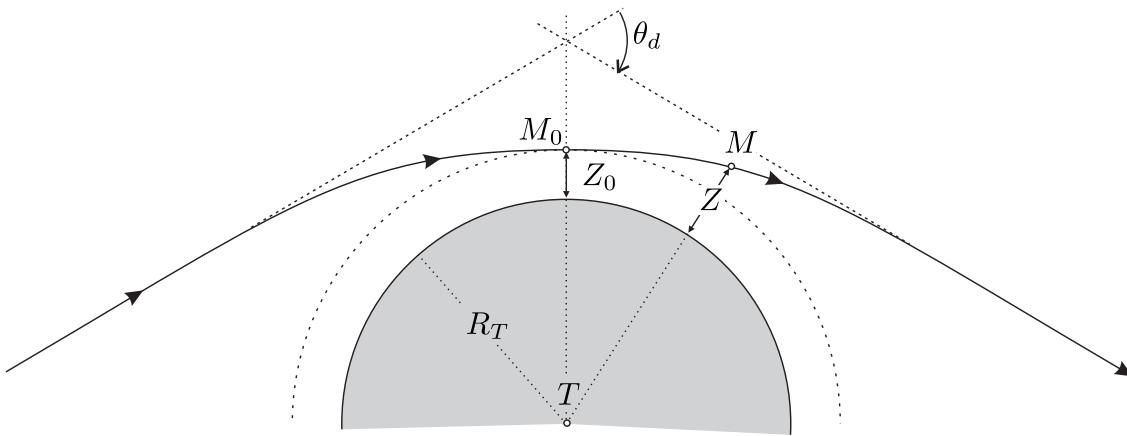


FIGURE 4 – Déviation d'un rayon lumineux par l'atmosphère terrestre.

I.E. — Réfraction atmosphérique

Lorsqu'un rayon lumineux solaire traverse l'atmosphère terrestre, il subit une réfraction (Fig. 4). On note M un point quelconque sur la trajectoire du rayon, et Z , son altitude. On note M_0 le point de la trajectoire le plus proche du sol, et Z_0 son altitude. On pose :

$$r = TM = R_T + Z \quad \text{et} \quad r_0 = TM_0 = R_T + Z_0$$

Pour une longueur d'onde donnée, l'indice de l'air $n(Z)$ dépend de l'altitude, selon la loi de variation suivante :

$$n(Z) = 1 + \varepsilon_\lambda \frac{\rho_a(Z)}{\rho_a(0)} \quad \text{où } \varepsilon_\lambda = a + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda} \right)^2, \quad a = 2,8 \times 10^{-4} \text{ et } \lambda_r = 0,42 \text{ nm}, \quad \text{on note } n_0 = n(Z_0).$$

L'angle θ_d , de déviation totale du rayon après traversée de l'atmosphère (Fig. 4), est donné par :

$$\theta_d(Z_0, \lambda) \approx 2 \int_1^{n_0} \left\{ \left[\frac{r(n)}{r_0(n_0)} \right]^2 - 1 \right\}^{-1/2} dn$$

□ 10 — Pourquoi l'atmosphère terrestre réfracte-t-elle les rayons lumineux qui la traversent ?

□ 11 — En tenant compte des ordres de grandeur du problème, précisément $Z \ll R_T$ et $Z_0 \ll R_T$, exprimer $\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}$ en fonction de $u = Z - Z_0$. Exprimer dn en fonction de $d\rho_a$ puis $d\rho_a$ en fonction de H_c , $\rho_a(Z_0)$, u et du .

On donne la valeur de l'intégrale suivante, qui se ramène aisément à l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv = \sqrt{\pi}$$

□ 12 — Déduire des expressions obtenues à la question précédente que l'angle de déviation totale, d'un rayon monochromatique passant en M_0 , s'écrit :

$$\theta_d(Z_0, \lambda) \approx \Theta(Z_0) \varepsilon_\lambda$$

où $\Theta(Z_0)$ est une fonction de Z_0 que l'on exprimera en fonction de R_T et H_c et Z_0 . Pour quelle valeur particulière de Z_0 , notée Z_m , la déviation d'un rayon lumineux est-elle maximale ?

□ 13 — Exprimer l'écart de déviation $\delta\theta_d$ correspondant à deux rayons incidents passant au même point M_0 (et donc caractérisés par le même Z_0) mais possédant des longueurs d'ondes qui diffèrent de $\delta\lambda$.

La minute d'arc ($1'$), soit le soixantième de degré, vaut environ : $1' \approx 3 \times 10^{-4}$ rad.

En adoptant la valeur numérique réaliste $H_c \approx 7,3$ km du profil atmosphérique de masse volumique, et pour la longueur d'onde $\lambda_m = 504$ nm du maximum d'émission spectrale solaire : $\theta_d(Z_m, \lambda_m) \approx 70'$. Avec les valeurs $\delta\lambda \approx 350$ nm, $Z_0 = Z_m$ et $\lambda = \lambda_m$, sur l'étendue du domaine visible, l'application numérique donne $|\delta\theta_d| \approx 0,25'$. La dépendance chromatique de la déviation étant négligeable devant l'angle de déviation, on supposera que les rayons sont identiquement déviés, indépendamment de leur longueur d'onde, avec un angle pouvant varier entre $0'$ et $\theta_{d,M} = 70'$.

14 — L'angle sous lequel le rayon terrestre est vu depuis N est d'environ $\theta_T \approx 57'$ tandis que celui sous lequel le rayon solaire est vu depuis la Terre vaut environ $\theta_S \approx 16'$. L'atmosphère terrestre est-elle capable de dévier la lumière solaire pour éclairer le point N ? On justifiera quantitativement la réponse en s'appuyant sur un schéma.

I.F. — Prévision du spectre de la lumière reçue par la Lune

Le spectre de la lumière solaire hors de l'atmosphère terrestre est donné sur la partie gauche de la figure 5 (spectre de référence E-490-00). Le calcul numérique basé sur le modèle qui vient d'être développé permet de tracer, sur la partie droite de la figure 5, l'atténuation $\exp(-d_o)$ en N en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde incidente.

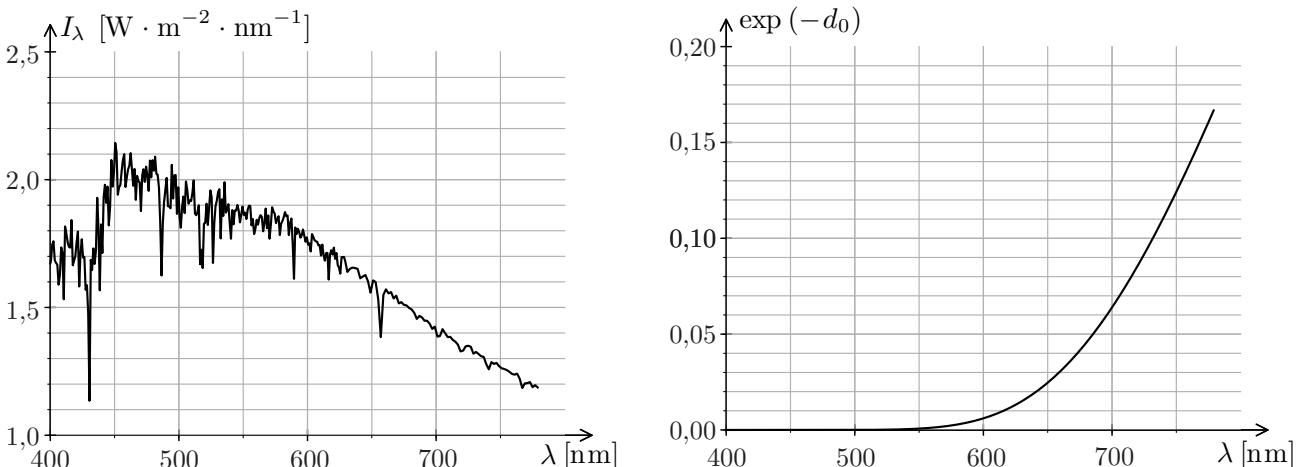


FIGURE 5 – A gauche : Spectre solaire hors de l'atmosphère terrestre. À droite : facteur d'atténuation spectrale $\exp(-d_o)$

15 — À l'aide des deux schémas de la figure 5, déterminer quelques points du spectre de la lumière reçue par la Lune en N permettant de représenter la courbe correspondante sur la feuille réponse. Conclure sur la couleur de la Lune totalement occultée.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Écho de la grande pyramide de Chichén Itzá

Sur le site archéologique de Chichén Itzá, situé dans le Yucatán à 200 km à l'ouest de Cancún, se trouve le temple Maya Cuculcán, en forme de pyramide à base carrée (Fig. 6). Sur chaque face de la pyramide, se trouve un grand escalier central comportant 91 marches qui culmine à $H = 24$ m au-dessus du sol (Fig. 7).

Ce monument, érigé autour du X^e siècle de notre ère, est classé au patrimoine mondial de l'UNESCO. Une de ses particularités a fait l'objet d'études archéoacoustiques : un clap produit en frappant dans ses mains face à l'escalier retourne un écho qui imite, de manière stupéfiante, le chant de l'oiseau sacré endémique quetzal (*pharomachrus mocinno*).

La question se pose alors de savoir si ce monument a été érigé en respectant les contraintes acoustiques de reproduction du gazouillement de l'oiseau, ou bien s'il s'agit d'une simple coïncidence.



FIGURE 6 – Vue d'une arête de la grande pyramide Maya de Chichén Itzá (Cuculcán).



FIGURE 7 – Vue d'une face de la grande pyramide Maya de Chichén Itzá (Cuculcán). Au centre de la photographie, se trouve le grand escalier.

Si la question reste ouverte, l'analyse physique apporte à l'archéologie quelques éléments notamment en permettant de comprendre l'origine de ce phénomène. Cette partie s'appuie sur les fondamentaux des phénomènes ondulatoires. Aucune connaissance spécifique d'acoustique n'est requise.

II.A. — Sonogramme

On enregistre, à l'aide d'un microphone, le son d'une note de musique tenue produite en sifflant avec la bouche.

On note $s_a(t)$ le signal obtenu. Le spectre d'amplitude du signal en sortie du microphone est donné sur la figure 8, l'échelle verticale étant graduée en décibels. L'amplitude du pic 1 vaut $a_1 = 100 \text{ mV}$.

16 — Déterminer la fréquence f_1 du fondamental (pic 1) de cette note ainsi que l'amplitude a_2 du pic 2. On donne $10^{0,5} \approx 3,16$.

Les pics 1 et 2 sont assimilés à des composantes harmoniques et on néglige tout autre contenu spectral. On note T_a la durée totale de l'enregistrement et f_e la fréquence d'échantillonnage. La méthode d'analyse spectrale employée génère un spectre dont la résolution spectrale, notée δf , est l'inverse de la durée d'acquisition du signal.

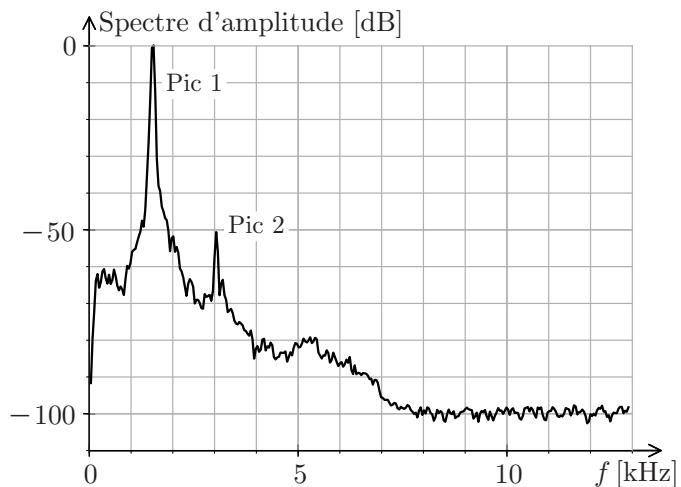


FIGURE 8 – Spectre d'amplitude d'un son sifflé tenu.

- 17 — Calculer numériquement la plus petite valeur de f_e respectant la condition de Nyquist-Shannon, et la durée d'acquisition T_a donnant une résolution spectrale de 100 Hz.

Un sonogramme est une représentation graphique permettant de visualiser l'évolution des composantes harmoniques d'un son au cours du temps. Dans sa version simplifiée, c'est un diagramme à deux dimensions ayant en abscisse le temps et en ordonnée les fréquences. À un instant t donné, une composante harmonique de fréquence f est représentée par un point de coordonnées (t, f) .

Le sonogramme simplifié de $s_a(t)$ est représenté sur la figure 9a. Dans un sonogramme complet, on ajoute l'information sur l'amplitude des composantes harmoniques en grisant les points du diagramme à l'aide d'une échelle allant du blanc pour les faibles amplitudes (< -50 dB), au noir pour les fortes (> 0 dB). Le sonogramme complet de $s_a(t)$ est donné sur la figure 9b.

Pour construire un sonogramme, on calcule les spectres successifs du signal entre les dates nT_a et $(n+1)T_a$, n étant un entier positif ou nul et T_a , la durée des intervalles temporels d'acquisition.

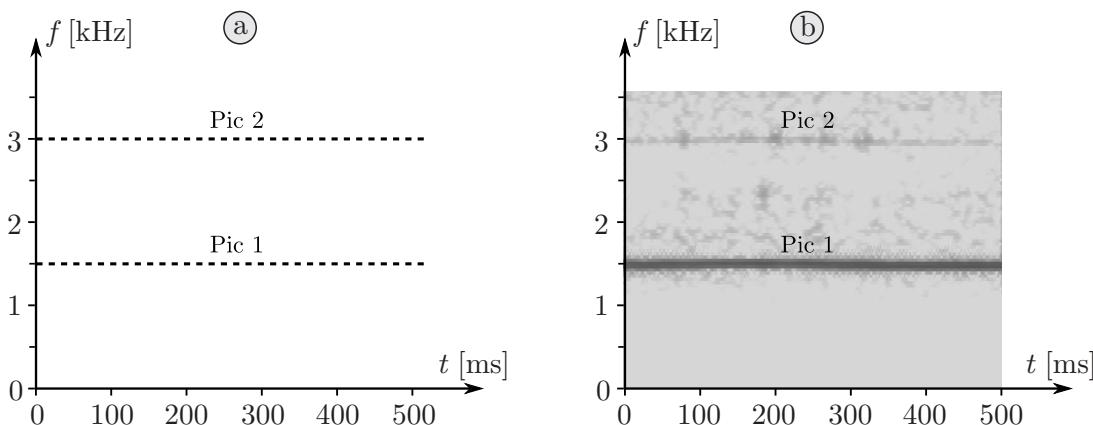
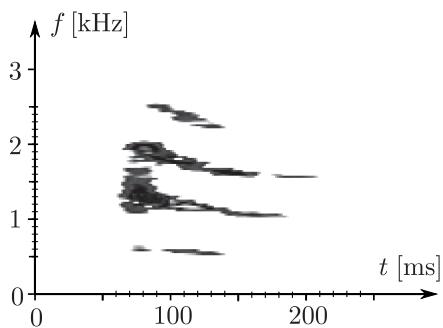


FIGURE 9 – Sonogramme d'un son sifflé tenu a) simplifié b) complet.

- 18 — On note τ la durée totale de l'enregistrement sonore. La résolution spectrale δf du sonogramme dépend-elle de T_a ou de τ ? Combien de pixels (rectangles élémentaires composant le sonogramme) comporte un sonogramme de fréquence maximale f_M et de durée τ ? Effectuer l'application numérique lorsque $f_M = 3,5$ kHz et $\tau = 500$ ms.

On produit un nouveau son sifflé, $s_b(t)$, mais cette fois, de hauteur décroissante (donc vers les sons graves). Ce son possède encore deux composantes harmoniques, mais la fréquence f'_1 du fondamental décroît au cours du temps de manière affine : $f'_1(t) = f_1 \times (1 - t/\tau_d)$, $\tau_d > 0$ étant une constante temporelle.

- 19 — Quelle condition doit vérifier τ_d afin que l'on puisse suivre l'évolution temporelle de la fréquence du fondamental sur le sonogramme? Construire le sonogramme simplifié de $s_b(t)$ dans l'intervalle temporel $[0; 0,5 \tau_d]$. On prendra soin de mentionner sur le graphique toutes les informations connues.



Le chant d'un oiseau est plus riche en harmoniques que le sifflement précédent.

Le sonogramme d'un quetzal *jeune* est représenté sur la figure 10 extraite de Lubman, D., J. Acoust. Soc. Am. 112 (5), 2008.

- 20 — Déterminer la durée approximative τ_q du chant du quetzal puis mesurer, à la date $t = 140$ ms, la fréquence $f_{q,1}$ du fondamental du chant ainsi que celles $f_{q,i}$ (i entier) des autres harmoniques visibles sur le sonogramme.

FIGURE 10 – Sonogramme du quetzal

II.B. — Diffraction du son par une marche de l'escalier

Lorsque l'on frappe dans ses mains en face de l'escalier, depuis une position S que l'on supposera voisine du sol (Fig. 11), le clap produit se propage dans l'air en direction des marches. Ces dernières sont modélisées par des obstacles de petite dimension, qu'on localise arbitrairement en S_n (les arêtes des marches), n allant de 0 à $N = 91$. On note $a = 20\text{ m}$ la distance entre S et le bas S_0 des marches de la pyramide. La hauteur $b = 26,3\text{ cm}$ des marches est égale à leur profondeur de sorte que les arêtes S_n soient contenues dans un plan formant un angle de 45° par rapport au plan horizontal. L'hypothèse testée est que l'écho entendu par l'auteur du clap, ressemblant à s'y méprendre au chant du quetzal, résulte de la diffraction du son sur les marches de l'escalier.

Le clap émis en S , à un instant pris comme origine temporelle, est un signal bref, noté $s(t)$ au point d'émission S . La distance entre S et l'arête de la n -ième marche est appelée $d_n = SS_n$. Pour modéliser la propagation du son, on note $\Psi(M, t)$ la fonction qui décrit l'onde sonore en un point M de l'espace à l'instant t : par exemple ici $\Psi(S, t) = s(t)$. On note $c_s \approx 340\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité du son dans l'air. On assimilera la propagation de l'onde le long de l'axe SS_n à une propagation unidimensionnelle linéaire non dispersive ; ainsi, on ignore toute variation d'amplitude au cours de la propagation. Lorsque l'onde atteint une arête S_n , elle est « renvoyée » dans toutes les directions (par diffraction), et en particulier, dans la direction S_nS . On suppose qu'après diffraction, la fonction décrivant l'onde retour, notée $\Psi'(M, t)$, dont la propagation est encore supposée unidimensionnelle (modélisation identique à celle de l'onde incidente), s'écrit en S_n : $\Psi'(S_n, t) = \kappa\Psi(S_n, t)$ où κ est un facteur (nombre sans dimension) indépendant de n .

21 — Exprimer $\Psi(S_n, t)$ puis $\Psi'(S, t)$ en fonction notamment de la fonction s .

Le spectre du clap $s(t)$ dans le domaine audible est continu : toutes les fréquences y sont présentes. On supposera par ailleurs qu'elles ont toutes la même amplitude. On considère une composante harmonique $s_\omega(t)$ du clap, de pulsation ω , dont on suppose la phase $\phi(t)$ nulle à l'origine temporelle soit $s_\omega(t) = s_m \cos[\phi(t)]$. On prendra $\phi(t) = \omega t$ et on considère que s_m ne varie pas dans le temps.

22 — Exprimer la phase $\phi'_n(t)$ à l'instant t de la composante harmonique de pulsation ω de l'onde retour en S diffractée en S_n , en fonction notamment de d_n .

II.C. — Superposition constructive en S

Le clap étant bref, on suppose seules deux marches consécutives diffractent le son incident. On note la différence de phase en S entre les deux ondes retour diffractées $\Delta\phi'_n = \phi'_n(t) - \phi'_{n+1}(t)$.

23 — Exprimer $\Delta\phi'_n$ en fonction notamment des distances d_n et d_{n+1} .

On fait l'hypothèse que les seules fréquences audibles sont celles pour lesquelles les ondes diffractées se superposent constructivement.

24 — Déduire de cette hypothèse l'ensemble des fréquences $\{\nu_m, m \in \mathbb{N}\}$ entendues lors du retour du son diffracté par les marches S_n et S_{n+1} , en fonction notamment des distances d_n et d_{n+1} .

25 — Exprimer d_n en fonction de a , b et n . Calculer l'expression exacte de $d_{n+1}^2 - d_n^2$. On admet que la condition de l'expérience $a \gg b$ permet d'écrire $d_n + d_{n+1} \simeq 2d_n$: en déduire l'expression approchée suivante $\nu_1 \simeq \frac{c_s}{2ab} g(n)d_n$ où $g(n)$ est une fonction que l'on explicitera.

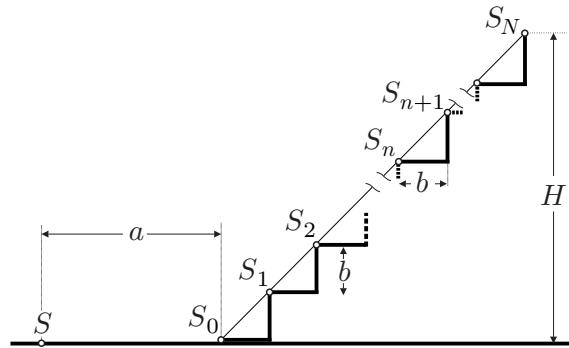


FIGURE 11 – Les marches de la pyramide

L'écho entendu par l'auteur du clap, ressemblant à s'y méprendre au chant du quetzal, résulte de la diffraction du son sur les marches de l'escalier.

La figure 12 donne la représentation graphique de $g(n)d_n$ en fonction de d_n pour les 91 valeurs de n . Elle permet d'éviter des calculs fastidieux à la main...

❑ 26 — En exploitant la figure 12 déterminer la distance d_N entre le sommet de l'escalier et S . On fixe l'origine temporelle à l'instant du clap. Calculer numériquement la date t_1 d'arrivée du début de l'écho en S , puis celle t_N de fin de l'écho. Combien de temps l'écho dure-t-il ?

❑ 27 — Calculer numériquement les fréquences $\nu_1(t_1)$ et $\nu_1(t_N)$.

❑ 28 — Sur la feuille réponse, tracer l'allure du sonogramme simplifié de l'écho comportant le fondamental du son ainsi que les trois harmoniques qui le suivent.

On marquera d'une croix bien visible les points du sonogramme d'abscisses t_1 et t_N .

❑ 29 — Comparer le sonogramme construit à la question précédente, au sonogramme du quetzal (Fig. 10). L'écart fréquentiel est-il négligeable ? L'écart se réduirait-il si l'enregistrement du quetzal était celui d'un oiseau adulte ?

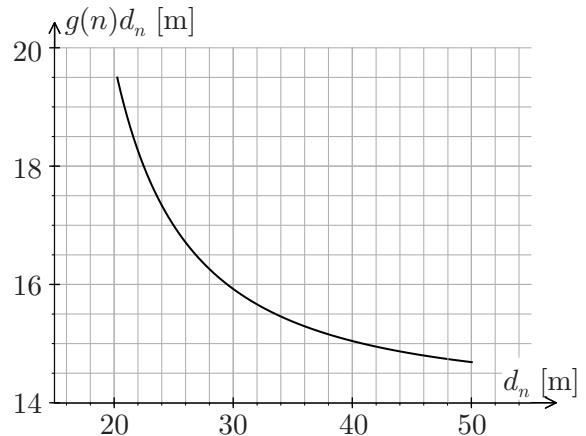


FIGURE 12 – $g(n)d_n$ en fonction de d_n

FIN DE LA PARTIE II

Données astronomiques

Constante d'Einstein : $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Distance Terre-Lune (centre à centre) : $r_L = TL \approx 3,84 \times 10^8 \text{ m}$

Rayon du Soleil : $R_S \approx 6,96 \times 10^8 \text{ m}$

Rayon de la Terre : $R_T \approx 6,37 \times 10^6 \text{ m}$

Rayon de la Lune : $R_L \approx 1,74 \times 10^6 \text{ m}$

FIN DE L'ÉPREUVE

Numéro d'inscription



Né(e) le

The diagram consists of three sections separated by diagonal lines. The first section has two empty boxes. The second section has two empty boxes. The third section has four empty boxes.

Signature

Nom

A horizontal row of 20 empty square boxes, intended for students to write their answers in a grid format.

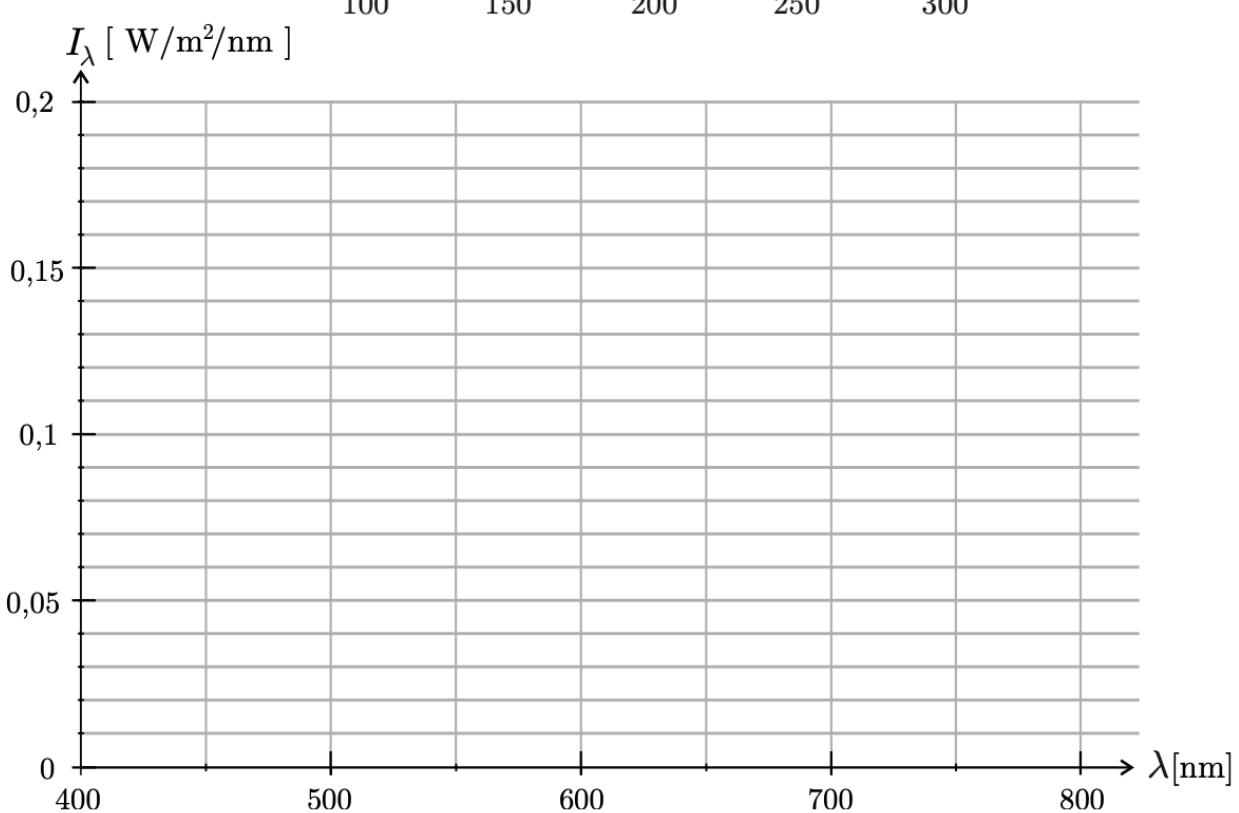
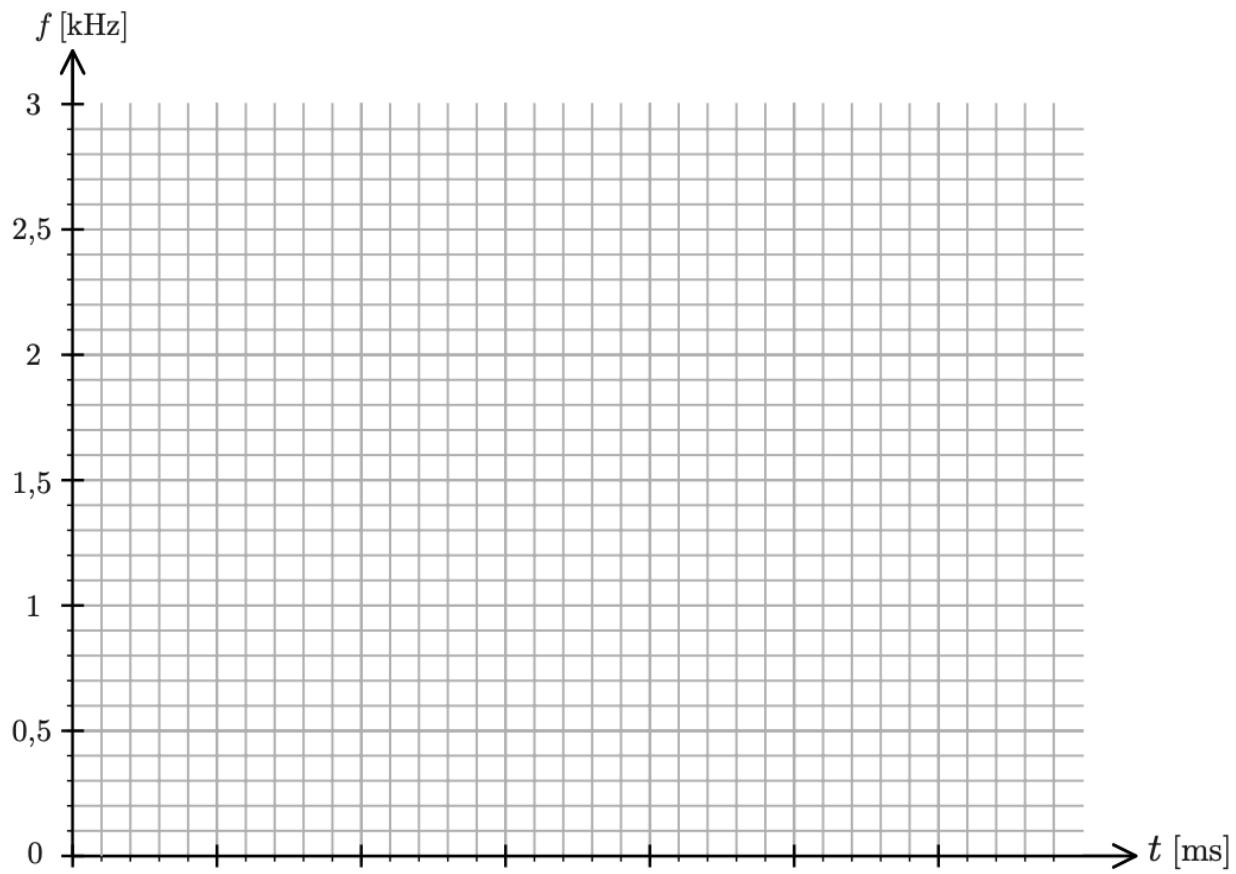
Prénom (s)

Feuille réponse - Physique MP - épreuve 1

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.



Concours commun
Mines-Ponts





**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



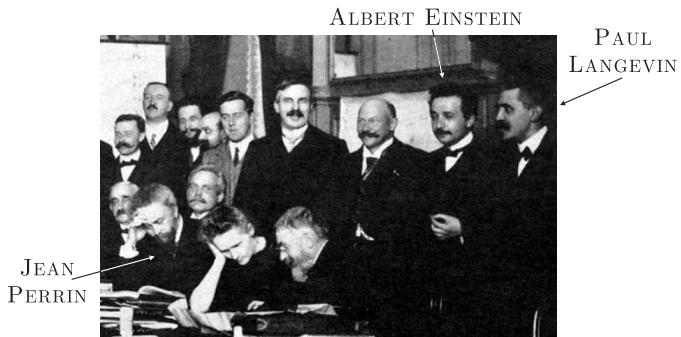
JEAN PERRIN et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par ALBERT EINSTEIN en 1905 et complétées par celles de PAUL LANGEVIN en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par JEAN PERRIN dont nous fêtons le 150^e anniversaire de naissance. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la « controverse atomiste » ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de PERRIN, en 1908, l'un des derniers farouches anti-atomistes, WILHELM OSTWALD, déclare « *Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires* ».

Les expériences de PERRIN et le modèle de LANGEVIN reposent entièrement sur les modèles microscopiques de LUDWIG BOLTZMANN, fondateur dans la seconde moitié du XIX^e siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de PERRIN lui permirent notamment de mesurer la constante de BOLTZMANN k_B . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, BOLTZMANN se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'OSTWALD...

En 1926, PERRIN obtint le prix NOBEL pour ses expériences !



Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de LANGEVIN et de certaines des expériences réalisées par PERRIN. Sur la photo ci-contre, prise lors du Congrès SOLVAY de 1911, on retrouve les trois acteurs de cette histoire, entourés de prestigieux collègues. Pour réaliser ses expériences, JEAN PERRIN utilise des grains de gomme-gutte. Ecoumons le décrire son procédé d'obtention de ses grains : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon $R_b = 0,2 \mu\text{m}$, de volume $V_b = 3,4 \times 10^{-20} \text{ m}^3$ et de masse volumique $\mu_b = 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On note $m_b = 4,1 \times 10^{-17} \text{ kg}$ la masse d'un grain. Dans ses expériences, JEAN PERRIN fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'ARCHIMÈDE : cette force $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$ est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ où $\alpha > 0$ et \vec{v} désigne la vitesse des grains. La formule de STOKES précise que, pour un grain sphérique, $\alpha = 6\pi\eta R_b$ dans laquelle $\eta = 1,2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici $\alpha = 4,5 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

En dehors de ces données, aucune connaissance relative à la viscosité n'est nécessaire à cette étude. Ce problème est décomposé en 4 parties relativement indépendantes : la partie **I** est consacrée au modèle du gaz parfait ; la partie **II** est dédiée aux expériences de sédimentation pratiquées sur les émulsions ; la partie **III** présente le modèle théorique du mouvement brownien de LANGEVIN complété par les expériences de diffusion de PERRIN ; la partie **IV** étudie les moyens optiques mis en œuvre par JEAN PERRIN pour réaliser ses mesures.

Dans ce qui suit on utilisera la fonction $A(z) = \exp(-z/H)$. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche \vec{f} , sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ($\|\hat{\mathbf{e}}_x\| = 1$). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction $\varphi(t)$ sera notée $\langle \varphi \rangle$. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. **Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte.**

I Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire $M = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, en équilibre thermique à la température ambiante T_0 . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume V , de hauteur h de l'ordre de quelques mètres, et de section $S = 1 \text{ m}^2$. L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon R_m de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, de la constante de BOLTZMANN, $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, de la constante d'AVOGADRO, $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ et éventuellement de leur produit $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- – 1. En précisant les valeurs choisies de température T_0 et de pression (supposée provisoirement uniforme) P_0 , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.
- – 2. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
- – 3. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{cm} et de l'énergie potentielle E_{pm} d'une particule de masse m_m de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression $P(z)$ n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude z .

- – 4. En déduire que la masse volumique ρ du gaz dépend aussi de z et l'exprimer en fonction de $P(z)$. Ecrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes z et $z + dz$ pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé. En déduire une équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
- – 5. En notant $P_0 = P(z = 0)$, montrer que $\frac{P(z)}{P_0}$ s'exprime simplement grâce à la fonction $A(z)$. Exprimer la distance caractéristique H en fonction de k_B , g , T_0 et m_m . Calculer la valeur numérique de H . La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
- – 6. Préciser la fonction $E(z)$ telle que $A(z) = \exp\left[-\frac{E(z)}{k_B T_0}\right]$. Que représente la fonction $E(z)$? Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à BOLTZMANN.
- – 7. Montrer que la concentration $c_g(z)$ du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire $c_g(z) = c_{g_0} A(z)$, où c_{g_0} représente la concentration au niveau du sol ($z = 0$) dont on précisera l'expression.

II Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, JEAN PERRIN lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ($N = 13\,000$) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section S et une hauteur h_1 suffisante pour être considérée comme infinie.

- – 8. Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.

- – 9. On note $\vec{v}(t) = -v(t)\hat{e}_z$ la vitesse de chute du grain, \hat{e}_z étant l'axe vertical ascendant, et $v(t) > 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ puis donner sa solution.

Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite $v_\ell = m^*g/\alpha$.

Exprimer le paramètre m^* en fonction de V_b et des masses volumiques μ_b et μ_e . Justifier qu'on nomme cette quantité « masse apparente ».

Exprimer la durée caractéristique τ du régime transitoire en fonction de m_b et α . Evaluer un ordre de grandeur de v_ℓ et de τ .

Même au bout d'une longue durée, les grains ne se tassent pas au fond du récipient. On observe un phénomène de sédimentation : les grains se répartissent sur l'ensemble de la hauteur et la densité de grains, notée $c(z)$ et exprimée en m^{-3} , n'est pas uniforme.

Afin d'interpréter ce phénomène, on introduit deux vecteurs, appelés « densité de flux de particules » et qui s'expriment dans les mêmes unités mais par des lois distinctes :

- Un premier vecteur densité de flux, \vec{j}_c , est associé au mouvement de chute des grains. Il est à l'origine d'un phénomène de convection et défini par la relation $\vec{j}_c(z) = -c(z)v_\ell\hat{e}_z$;
- Un deuxième vecteur densité de flux est associé au gradient de densité, ici sur l'axe z . L'inhomogénéité crée un courant de particules dont l'expression est donnée par la loi de FICK qui s'écrit ici $\vec{j}_n(z) = -\frac{dc}{dz}D\hat{e}_z$. Le coefficient D se nomme coefficient de diffusion. Il dépend de la nature du milieu et des particules étudiées. Aucune connaissance relative à la loi de FICK n'est nécessaire à l'étude du problème.

- – 10. Donner les unités (ou dimensions) communes aux vecteurs \vec{j}_c et \vec{j}_n , ainsi que l'unité de D . À l'état d'équilibre macroscopique, caractérisé par une température uniforme T_0 et une répartition de concentration $c(z)$ indépendante du temps, quelle est la relation entre \vec{j}_c et \vec{j}_n ? En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $c(z)$.

En posant $c(z=0) = c_0$, exprimer $c(z)$ en fonction de $A(z)$, on déterminera la distance caractéristique H_b apparaissant dans $A(z)$ en fonction de R_b , D , η , m^* , et g .

- – 11. Compte tenu des forces conservatives s'exerçant sur un grain, quelle est l'expression de l'énergie potentielle $E_p^*(z)$ correspondant au poids de la masse apparente m^* du grain à l'altitude z ? En déduire l'expression de D en fonction de k_B , T_0 , η et R_b permettant d'écrire $A(z) = \exp\left[-\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0}\right]$.

- – 12. Sachant que le nombre N de grains est conservé sur la hauteur h_1 du récipient, suffisamment grande pour être supposée infinie, exprimer la concentration c_0 en fonction de N , de la section S , et de la distance caractéristique H_b .

Une fois la température de l'émulsion stabilisée à une valeur uniforme $T_0 = 20^\circ\text{C}$, JEAN PERRIN a compté le nombre moyen $n(z)$ de grains dans des petites tranches régulièrement réparties en hauteur et d'épaisseur e constante. Il publie les résultats que nous avons synthétisés sur la figure 1 (Annales de Chimie et de Physique, Mouvement brownien et réalité moléculaire, 8^e série, sept. 1909).

- – 13. En exprimant $c(z)$ en fonction de $n(z)$, déduire de ces données une estimation de la hauteur caractéristique H_b associée ici au phénomène. La hauteur du récipient utilisé par JEAN PERRIN, $h_1 = 100 \mu\text{m}$, était-elle suffisante au regard des hypothèses faites ici ?

- – 14. Estimer la valeur de k_B qu'a pu déduire JEAN PERRIN de cette expérience. Identifier des causes d'erreurs expérimentales.

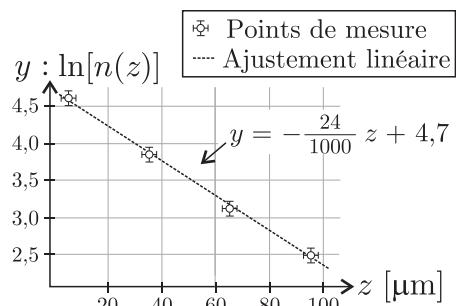


FIGURE 1 – Sédimentation de grains

III Le modèle de Langevin

En 1828, le botaniste ROBERT BROWN publie un article dans lequel il décrit le mouvement erratique de grains de pollen dans l'eau observés au microscope. Ce type de mouvement était apparemment connu depuis l'invention du microscope (fin XVI^e – début XVII^e siècle). Le mérite de BROWN est d'en faire une étude systématique avec des grains de pollen, de suie, de poussière, de roches pulvérisées et même d'un fragment du SPHINX. Ce dernier cas était destiné à éliminer l'hypothèse vitaliste qui prévalait et attribuait ce mouvement à des propriétés organiques propres aux particules. En 1888, le physicien français LOUIS-GEORGES GOUY résume les observations sur ce mouvement, appelé depuis *brownien* :

- le mouvement est extrêmement irrégulier et ne semble pas avoir de tangente ;
- deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants ;
- le mouvement est d'autant plus actif que la particule est petite, que le fluide est moins visqueux ou la température est élevée ;
- la nature et la densité des particules n'ont pas d'influence sur le mouvement qui de plus ne s'arrête jamais !

Pour interpréter les expériences de BROWN, on étudie le mouvement unidimensionnel – le long d'un axe (O, \hat{e}_x) – des mêmes grains sphériques que ceux étudiés dans la partie **II** (masse m_b , rayon R_b). Ces grains sont plongés dans le même liquide sucré que celui utilisé dans l'expérience de JEAN PERRIN, en équilibre thermique à la température T_0 , mobiles sous l'effet de l'agitation thermique. Ce modèle unidimensionnel peut éventuellement se généraliser à trois dimensions.

On note $\vec{x} = x(t)\hat{e}_x$ la position et $\vec{v} = v(t)\hat{e}_x$ la vitesse d'un grain. A $t = 0$, le grain étudié est en O . Le mouvement ne s'arrêtant jamais, en 1908, PAUL LANGEVIN propose l'idée qu'il existe des chocs à l'échelle microscopique qui entretiennent cette agitation. Il introduit une force qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide sur les grains. Cette force « indifféremment positive ou négative, dont le but est de maintenir l'agitation microscopique » est notée $\vec{F}_c = F_c \hat{e}_x$. En des termes moins prosaïques, cela revient à faire l'hypothèse que la moyenne temporelle du produit $\vec{x} \cdot \vec{F}_c$ est nulle, soit $\langle x F_c \rangle = 0$. Dans son modèle, LANGEVIN néglige *tous* les effets de la pesanteur mais tient compte de la résultante des forces de frottement visqueux.

- 15. Ecrire l'équation, notée (E_L) , vérifiée par \vec{v} en tenant compte de la force \vec{F}_c . Montrer qu'en l'absence de la force \vec{F}_c , le mouvement s'atténue très vite.
- 16. Ecrire le produit $x \frac{dv}{dt}$ en fonction de $\frac{d(xv)}{dt}$ et v^2 .
- 17. Donner la définition de la vitesse quadratique moyenne, notée u . En appliquant le théorème d'équipartition de l'énergie au cas particulier étudié, exprimer u en fonction de m_b , T_0 et k_B .

Le point délicat de la théorie de Langevin revient à considérer que la fonction $\varphi = \langle xv \rangle$, qu'il calcule comme une moyenne temporelle, peut néanmoins être considérée comme une fonction du temps $\varphi = \varphi(t)$, nous ferons cette hypothèse, dite ergodique, qui permet d'écrire ici $\langle \frac{d(xv)}{dt} \rangle = \frac{d\varphi}{dt}$ ou même $\langle \frac{d(x^2)}{dt} \rangle = \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}$. L'étude de l'hypothèse ergodique alimente depuis de nombreux travaux théoriques tant physiques que mathématiques.

- 18. En partant de l'équation (E_L) , obtenir une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par la fonction $\varphi(t)$. En supposant que $\varphi(0) = 0$, en déduire l'expression de $\varphi(t)$ en fonction de t , k_B , T_0 , m_b et α .
- 19. En utilisant l'hypothèse ergodique, déterminer la relation entre $\varphi(t)$ et $\psi(t) = \langle x^2 \rangle$. Après avoir obtenu l'expression générale de $\psi(t)$, montrer que les ordres de grandeur de ce problème permettent d'écrire $\psi(t) \simeq D_x t$ où l'on précisera l'expression de la constante D_x en fonction de T_0 , k_B et α .

La constante D_x est appelée coefficient de diffusion d'un grain selon (Ox) dans le milieu. En prenant en compte le modèle de LANGEVIN, JEAN PERRIN réalise toute une série d'expériences de diffusion de grains au cours du temps. Avec une extrême minutie, il repère la position de l'un d'entre eux toutes les 30 secondes pendant deux minutes, puis recommence avec un autre grain. En itérant cette procédure un grand nombre de fois, il se place sans le savoir sous l'hypothèse ergodique et obtient les résultats expérimentaux donnant $\langle x^2 \rangle$ en fonction du temps que l'on a synthétisés sur la figure 2 ci-contre (source identique à celle des données de la figure 1).

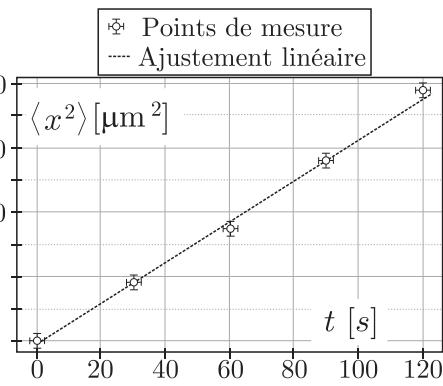


FIGURE 2 – Diffusion de grains

- – 20. En déduire la valeur de k_B qu'a obtenue JEAN PERRIN avec ses expériences de diffusion toujours effectuées à $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Comparer cette valeur avec celle obtenue grâce aux résultats des expériences de sédimentation de la partie II. Commenter.

IV Observations optiques

Lors de ses expériences JEAN PERRIN doit compter ou suivre le mouvement de très petits grains : il doit donc utiliser un microscope.

Un microscope est constitué de deux lentilles minces convergentes utilisées dans les conditions de GAUSS : un objectif, L_1 , de focale f'_1 et un oculaire, L_2 , de focale f'_2 . La distance F'_1F_2 , entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire, est l'intervalle optique Δ . Les ordres de grandeur usuels sont tels que : $f'_1 = 1\text{ mm}$, $f'_2 = 2\text{ cm}$ et $\Delta = 15\text{ cm}$ par exemple. L'oculaire L_2 fournit une image à l'infini. On observe un objet AB situé à proximité de F_1 et perpendiculaire à l'axe optique. L'image intermédiaire A_1B_1 est telle que $AB \xrightarrow{\text{objectif } L_1} A_1B_1$. L'image finale A_2B_2 est telle que $A_1B_1 \xrightarrow{\text{oculaire } L_2} A_2B_2$. L'ensemble est représenté sur la figure 3.

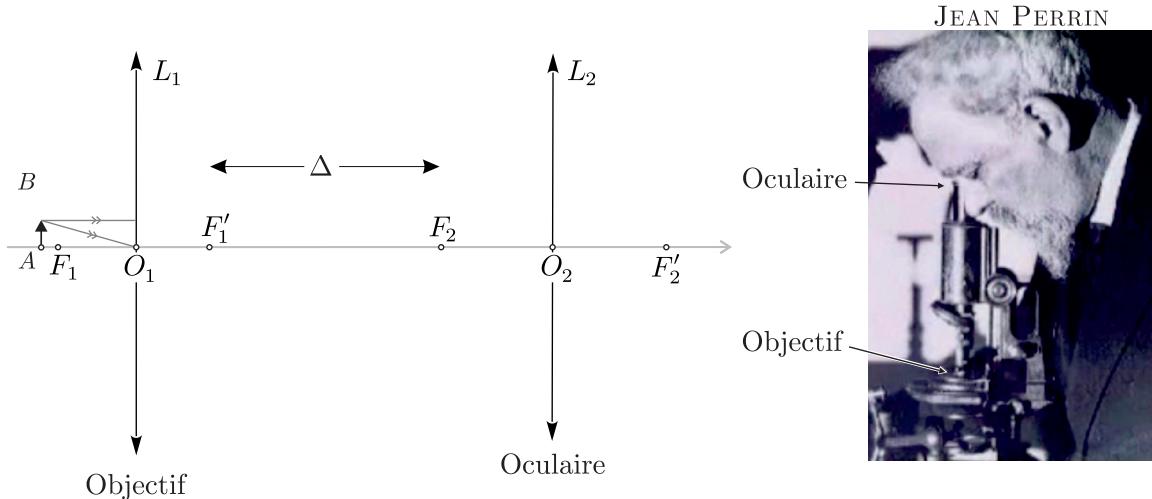


FIGURE 3 – Schéma d'un microscope (à gauche) – JEAN PERRIN observant les grains (à droite)

- – 21. Rappeler ce que sont les conditions de GAUSS et les deux propriétés qu'elles impliquent pour une lentille mince.
- – 22. Sur un schéma clair, sans forcément respecter d'échelle, tracer les rayons issus d'un objet AB tel que $|AO_1| \gtrsim f'_1$ et ressortant de L_2 afin de former une image à l'infini. On pourra reproduire et compléter le schéma de la partie gauche de la figure 3.

- – 23. Justifier, grâce à une évaluation d'ordres de grandeur, que l'objet AB se trouve quasiment sur le foyer F_1 de l'objectif, tout en restant en amont ($\overline{AF_1} > 0$). Quel est l'intérêt pour un observateur dont la vision n'a pas de défaut, d'observer une image à l'infini ? Où se forme alors l'image intermédiaire A_1B_1 ? Où se formerait-elle si $\overline{AF_1} < 0$?

On définit la puissance intrinsèque d'un microscope par : $P_i = \frac{\alpha'}{AB}$. Son unité est la dioptrie δ , égale à 1 m^{-1} . L'angle α' est l'angle sous lequel l'objet AB est vu en sortie de l'instrument, comme indiqué sur la figure 4.

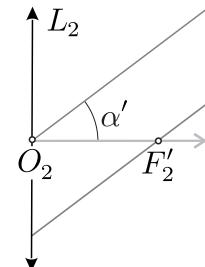


FIGURE 4 – Angle α'

- – 24. Compte tenu des données numériques précédentes, exprimer P_i en fonction de Δ , f'_1 et f'_2 .

Evaluer la puissance d'un microscope permettant d'observer les grains de gomme-gutte étudiés par JEAN PERRIN. Un microscope usuel peut-il permettre d'observer les grains avec un œil supposé emmétrope ?



Formulaire d'optique géométrique pour une lentille mince

Dans les conditions de GAUSS, si A est un point objet sur l'axe optique et A' le point image conjugué par une lentille mince située en O , dont le foyer objet est en F et le foyer image en F' , on a :

Formules d'optique géométrique de NEWTON (origines aux foyers)

Formule de conjugaison :

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = \overline{FO} \times \overline{F'O}$$

Formule du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

où $A'B'$ est l'image de l'objet AB perpendiculaire à l'axe optique.

Formules d'optique géométrique de DESCARTES (origines au centre optique)

Formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}}$$

Formule du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Fonctions spéciales

Ce sujet comporte trois parties indépendantes.

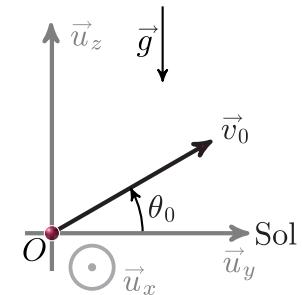
Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales » .

I La fonction de W de LAMBERT

I.A Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



- – 1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- – 2. Établir les équations horaires du mouvement.
Montrer que le mouvement est plan.
- – 3. Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- – 4. Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

I.B Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

- – 5. Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- – 6. Établir, en fonction $g, \tau, v_0 = \|\vec{v}_0\|, \theta_0$ et t , les nouvelles équations horaires du mouvement.
- – 7. Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.
- – 8. Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite v_∞ .
Où retombe le projectile ?
- – 9. Déduire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- – 10. Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ .

FIGURE 1 – Tir d'un projectile

I.C La portée maximale d'un tir avec frottement

- – 11. Dresser le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$ et déterminer la valeur β de son minimum global.

La fonction W de LAMBERT est définie comme étant la fonction réciproque de T sur $[\beta, +\infty[$. Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

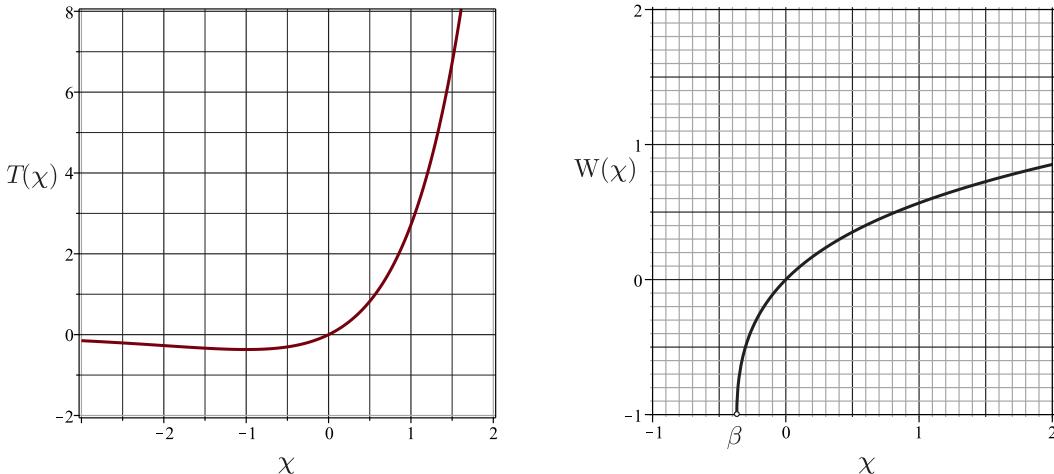


FIGURE 2 – Représentations graphiques de $T(\chi)$ (à gauche) et $W(\chi)$ (à droite)

- – 12. On peut montrer que : $(\chi + \exp[W(\chi)]) W'(\chi) = 1$. Quelle est la valeur de $W(0)$?

On souhaite appliquer le schéma d'EULER explicite avec un pas $h = 0.0001$ pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de $W(\chi)$ sur l'intervalle $[0 ; 2,5[$.

La fonction $W(\chi)$ est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler avec : `from scipy.special import lambertw`.

On montre que si $ad \neq 0$, la solution de l'équation $at + b + ce^{dt} = 0$ pour l'inconnue t est donnée par l'expression

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right).$$

- – 13. En déduire à quel instant $t^* > 0$ le projectile touche le sol. On posera $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$.

- – 14. On rappelle que par définition $W \exp(W) = \text{Id}$ où Id est la fonction identité : $\chi \mapsto \chi$.

En déduire que la portée est donnée par $\ell = \tau v_0 \cos \theta_0 (1 - W(ue^u)/u)$.

En posant $\gamma = v_0/v_\infty$, on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}\right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{e - 1}\right) \simeq 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

- – 15. À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\tau = 0,4 \text{ s}$.

II L'intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y).

On repère sa position par l'angle $\theta(t)$. À $t = 0$ on lâche le pendule sans vitesse initiale avec $\theta(t = 0) = \theta_0 \in]0, \pi/2[$.

□ – 16. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $\theta(t)$.

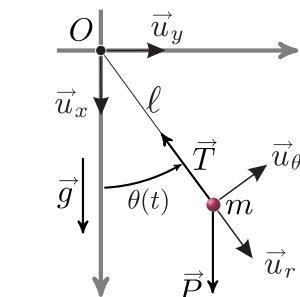


FIGURE 3 – Pendule simple

□ – 17. On fait l'approximation des petits angles tels que $\sin \theta \sim \theta$.

Établir dans ces conditions la période T_0 des oscillations.

Quelle est la propriété remarquable de la période dans le cadre de cette approximation ?

□ – 18. Déterminer l'expression générale de $\frac{d\theta}{dt}$ sans faire l'approximation des petits angles.

En déduire que la période T des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}.$$

La propriété remarquable de la question précédente est-elle conservée ?

En effectuant le changement de variable $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$, on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K}\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}.$$

On souhaite calculer l'intégrale $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians pour un angle $\theta_0 = \pi/3$.

□ – 19. Après avoir tracé le graphe de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$ pour $\chi \in [0; 9]$, illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel $I = \int_0^9 (\sqrt{\chi} + 1) d\chi$ en utilisant 9 rectangles.

Si on double le nombre de rectangles utilisés qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de I et la valeur approchée numériquement par la méthode des rectangles médians ?

□ – 20. Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```

1 import math as m
2 def f(x, phi):
3     return .....
4
5 S = 0.
6 N = 100
7 a = 0.
8 b = m.pi/2.
9 pas = .....
10 theta_0 = m.pi/3.
11 x = m.sin(theta_0)**2
12 for i in range(N):
13     phi = .....
14     S = .....
15
16 print(pas * S)           python code

```

La fonction $\chi \mapsto \mathcal{K}(\chi)$ est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. Elle est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler directement avec : `from scipy.special import ellipk`.

- – 21. En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que $T_0 = 1$ s, évaluer T lorsque $\theta_0 = 50^\circ$. Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

Au XVII^e siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de FRANCE et d'ANGLETERRE avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

Christiaan HUYGENS (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

- – 22. Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?

III La fonction d'erreur de GAUSS : $\text{erf}(\chi)$

III.A Introduction au problème de STEFAN

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

- – 23. Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

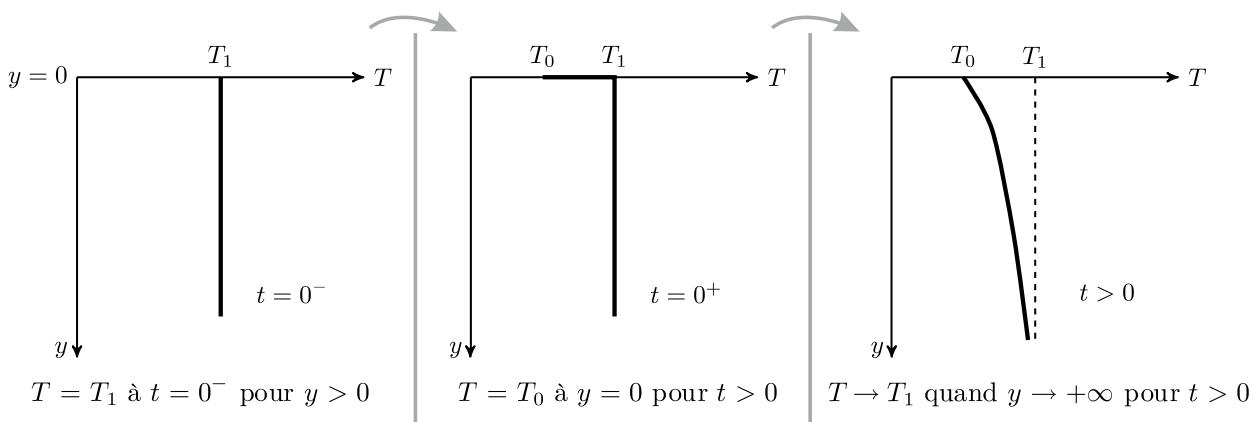


FIGURE 5 – Évolution de la température

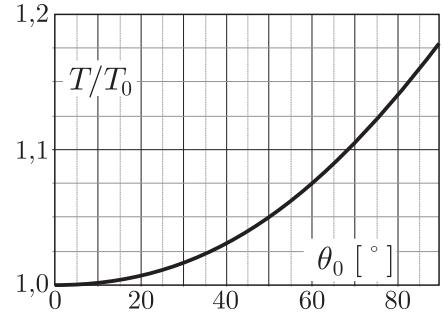


FIGURE 4 – $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$.

- – 24. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.
En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface \mathcal{S} .

- – 25. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique »?
Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, \mathcal{S} , dy et dt
puis en fonction de ρ , c , \mathcal{S} , $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .
En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.
En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_1}{T_0 - T_1}.$$

- – 26. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y,t)$?
Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

- – 27. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0.$$

- – 28. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y,t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS, elle est implémentée dans `scipy`.

Elle est souvent notée `erf`(χ). On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

III.B Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

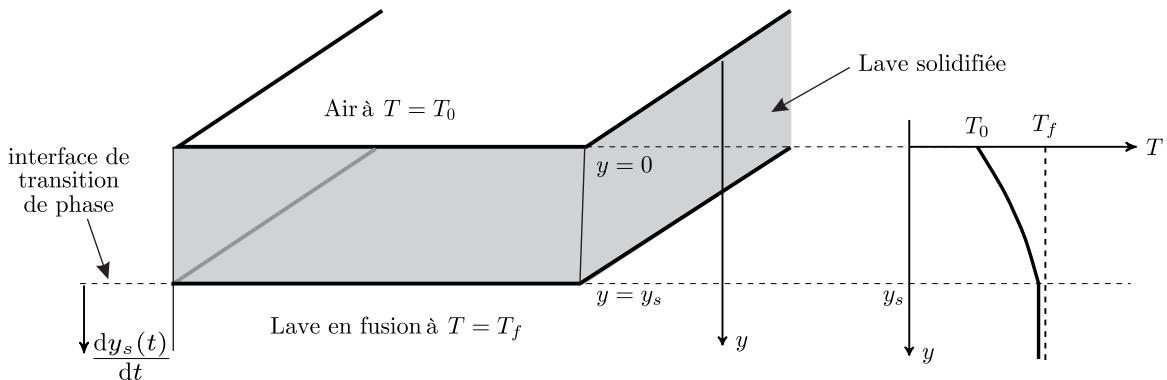


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposerons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = cte = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

□ – 29. En reprenant l'équation de la question 27, montrer que

$$\theta(\eta) = \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)} .$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$

- – 30. Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.
- – 31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

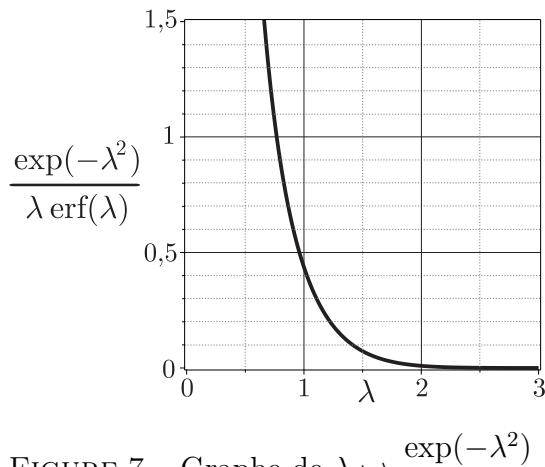


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

□ – 32. En déduire que

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f).$$

□ – 33. Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ?

Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

□ – 34. À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .

En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.

Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

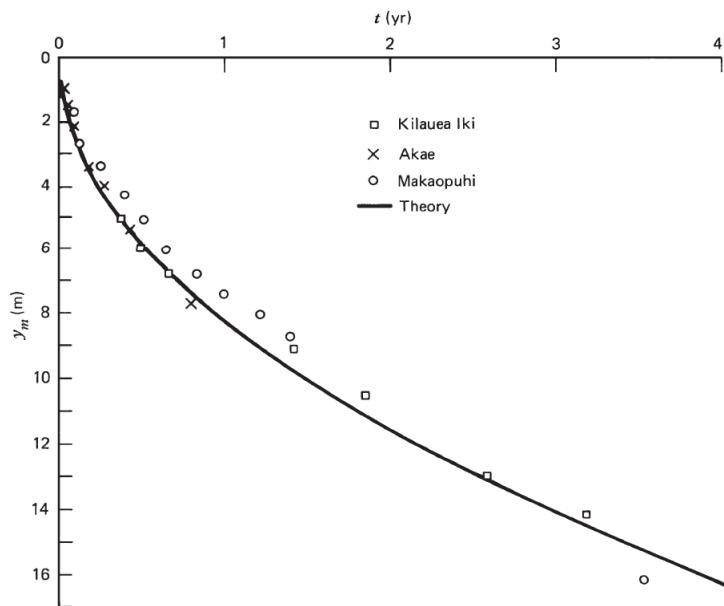


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaii (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

FIN DE L'ÉPREUVE

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAfee, vol. 19 of Geophysical Monograph Series, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375–90



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Des objets astronomiques, de Mars à Sirius

Ce sujet comporte deux problèmes totalement indépendants étudiant différents aspects de l'astronomie (la science des planètes et des étoiles) et en particulier de l'astrophysique (l'étude des modèles physiques des astres). Le problème **I** décrit des notions connues depuis le XVII^e siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de KEPLER et NEWTON). Le problème **II** propose une étude de quelques propriétés énergétiques des étoiles en comparant leur énergie gravitationnelle avec des termes comparables liés aux autres interactions au sein de l'étoile.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des *constantes fondamentales utiles*, des *données numériques* et des rappels de *yntaxe Python* sont regroupés en fin d'énoncé. On pourra noter $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy) , cf. figure 1.

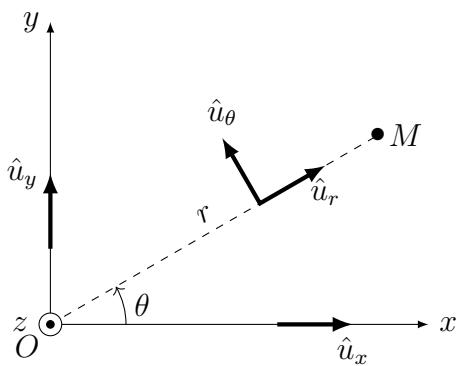


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $j^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Les vecteurs \vec{w} sont surmontés d'une flèche, sauf les vecteurs unitaires notés \hat{u} .

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique

Ce problème est consacré aux lois de KEPLER (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont tous deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par NEWTON (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

I.A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen (\mathcal{R}_0), le mouvement d'un astre \mathcal{P} assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur \mathcal{A} de masse m_A et de centre fixe A . On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\hat{u}_r$.

□ – 1. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle \vec{F} exercée par \mathcal{A} sur \mathcal{P} si les deux astres sont assimilés à des points ?

- 2. Que devient l'expression de \vec{F} si \mathcal{P} reste ponctuel tandis que l'astre \mathcal{A} , de rayon $R_A < r$, possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.
- 3. Cette expression reste-t-elle encore applicable si \mathcal{P} et \mathcal{A} sont tous deux à symétrie sphérique ? *On pourra, dans tout ce qui suit, considérer \mathcal{A} et \mathcal{P} comme des points matériels A et P.*
- 4. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy) .

On note \vec{v} la vitesse de P et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P . \vec{v} est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ .

- 5. Exprimer $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta) = C \frac{\hat{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ où \vec{e} est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation \mathcal{G} .

Montrer que le vecteur \vec{e} est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e\hat{u}_y$ avec $e = \|\vec{e}\| \geq 0$.

- 6. Exprimer \dot{r} et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ .

En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné.

Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T .

I.B Période du mouvement

- 7. En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T = \mathcal{I}p^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}m_A}$ où la constante \mathcal{I} s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$.

- 8. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des *lois de Kepler*, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique » sous forme d'une phrase en français.

Le calcul de l'intégrale \mathcal{I} en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

- 9. Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leq e \leq \frac{1}{2}$.

Note : on pourrait mener le calcul exact de l'intégrale qui fournit $\mathcal{I}(e) = (1 - e^2)^{-3/2} \mathcal{I}_{e=0}$. Ce calcul n'est pas demandé !

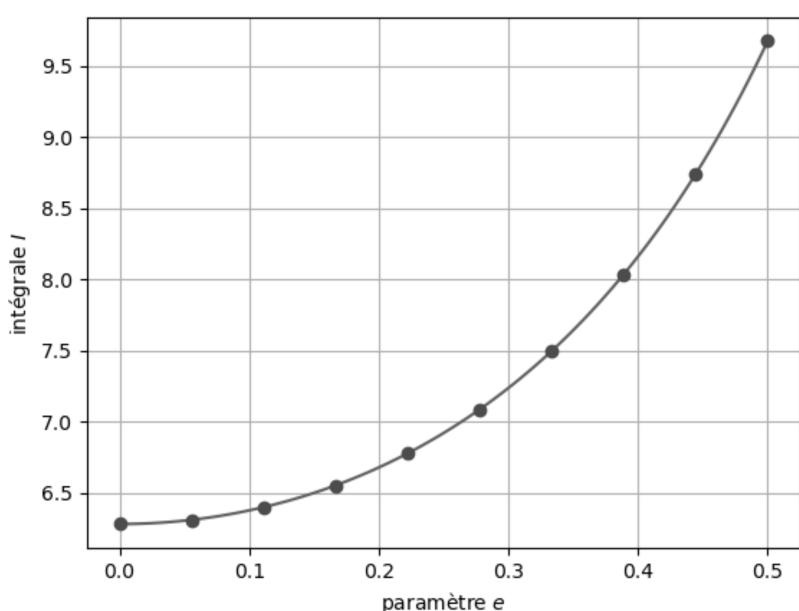


FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale \mathcal{I}

I.C Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de COPERNIC, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1 , de périodes T_0 et T_1 .

Le principe de la mesure de a_0 proposée par CASSINI, à la fin du XVII^e siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7\,070$ km) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance *minimale* de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris → Mars et Cayenne → Mars).



FIGURE 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde *Mars Global Surveyor*, photo NASA

- – 10. Sans soucis d'échelle, représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0 , a_1 , ℓ , α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).
- – 11. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0 , T_1 , ℓ et α .
- – 12. La valeur annoncée par CASSINI était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci-dessus ?

II Structure et énergie des étoiles

Les parties II.A, II.B et II.C sont très largement indépendantes. Les étoiles à l'équilibre seront ici décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile : il s'agira de la pression thermodynamique associée à l'agitation thermique dans la partie II.B et d'une propriété strictement quantique, la pression de confinement, dans la partie II.C.

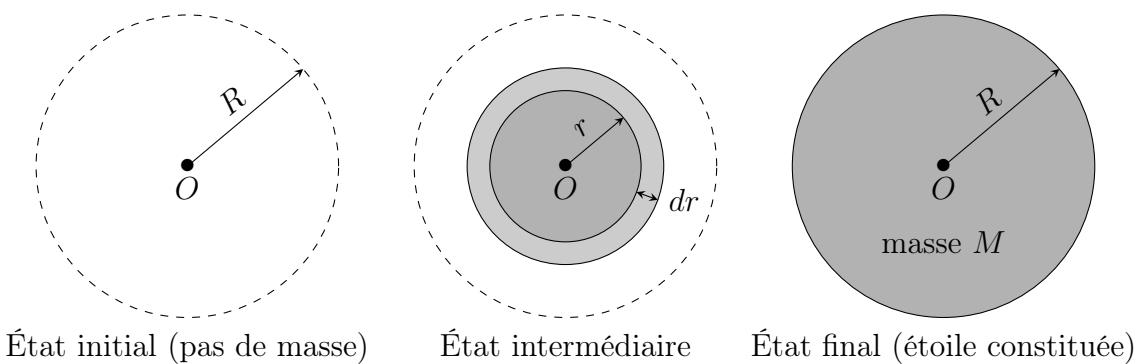


FIGURE 4 – Constitution progressive de l'étoile

II.A L'énergie gravitationnelle

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur *fournit* à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4). Ce calcul sera effectué pour une évolution *quasi-statique*, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

- – 13. Donner et justifier physiquement le signe de W_g . Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = -W_g$ l'*énergie de liaison* de l'étoile.
- – 14. Exprimer la masse volumique ρ , supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R .
En déduire, en fonction de M , R et r , les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de dm (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à $r + dr$).
- – 15. Justifier que la contribution dW_g à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à $r + dr$) s'écrit $dW_g = -\mathcal{G} \frac{m dm}{r}$.
Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de \mathcal{G} , M et R .

II.B Pression cinétique

Certaines étoiles sont en équilibre sous l'action de la pression cinétique liée à l'agitation thermique qui résiste seule à l'effondrement gravitationnel. On va tout d'abord décrire cet équilibre dans une géométrie cartésienne, l'axe (Oz) étant dirigé selon le champ de gravitation local $\vec{G}(z) = G(z)\hat{u}_z$ (figure 5) avec $G(z) < 0$. On note aussi $\rho(z)$ la masse volumique du fluide au repos et $P(z)$ la pression dans le fluide.

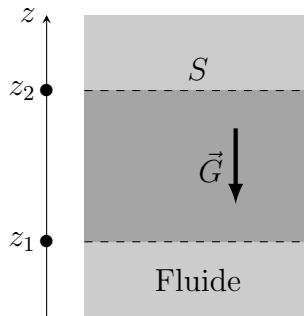


FIGURE 5 – Géométrie du champ de gravitation local

- – 16. On s'intéresse à l'équilibre de la colonne de fluide d'aire S et comprise entre les altitudes z_1 et z_2 . Expliciter, éventuellement sous forme intégrale, les forces exercées sur cette colonne.
En déduire l'équation différentielle reliant $P(z)$, $\rho(z)$ et $G(z)$.

La pression équilibrant la force gravitationnelle, les ordres de grandeur des énergies thermique et gravitationnelle doivent être comparables ; nous allons ici le vérifier en évaluant l'énergie cinétique de l'étoile dans le cadre d'un modèle très simplifié dans lequel la masse volumique ρ est constante mais qui prend maintenant en compte la géométrie sphérique du système. On suppose ainsi que l'équation d'équilibre local obtenue en géométrie cartésienne à la question 16 se généralise grâce à la symétrie sphérique en faisant $z \rightarrow r$ avec $\rho(r) = \text{cste.}$

- – 17. Un volume V de fluide est soumis à la pression P , supposée uniforme. Dans quel modèle l'énergie cinétique d'agitation thermique associée peut-elle s'écrire $E_c = \frac{3}{2}PV$? *Dans la suite de cette partie II.B on supposera que c'est bien le cas en chaque point intérieur à l'étoile.*
- – 18. Expliciter le champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ ressenti au sein de l'étoile en équilibre à la distance r du centre, en fonction de \mathcal{G} , M , R et r .
En déduire l'expression de la pression $P(r) = \frac{3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^6}(R^2 - r^2)$.
- – 19. Calculer l'énergie cinétique totale de l'étoile E_c en fonction de \mathcal{G} , M et R ; commenter.

II.C Pression de confinement quantique

Nous ne ferons plus ici l'hypothèse d'un équilibre de la gravitation par la pression cinétique ; au contraire, nous négligerons tout effet thermique pour les étoiles décrites dans cette partie **II.C**.

L'étoile sphérique étudiée ici, de rayon R , de masse M et de volume V est essentiellement constituée de N atomes hydrogène, donc de N protons de masse m_p et d'autant d'électrons de masse $m_e \ll m_p$, chacune de ces particules étant confinée dans un volume $\vartheta = V/N$. On va montrer que le principe d'incertitude impose à chacun des atomes une énergie cinétique dite de confinement quantique. Celle-ci sera évaluée dans un modèle très simplifié, chaque particule restant libre de toute interaction mais confinée dans un volume cubique de côté a tel que $a^3 = \vartheta$.

- – 20. Exprimer a en fonction de M , R et m_p seulement.

On rappelle pour un état stationnaire d'une particule de masse m , libre et à une dimension (Ox), l'équation de SCHRÖDINGER avec $\hbar = h/2\pi$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ pour la fonction d'onde $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-j\omega t}$.

- – 21. La particule étudiée étant confinée à l'intervalle $x \in [0, a]$, exprimer la fonction d'onde spatiale $\psi_1(x)$ et l'énergie e_1 de l'état fondamental en fonction de h , m et a .
Justifier que cette relation illustre le principe d'indétermination de HEISENBERG.
- – 22. Que deviennent ces expressions de la fonction d'onde et de l'énergie de l'état fondamental dans un modèle confiné à trois dimensions, $x \in [0, a]$, $y \in [0, a]$ et $z \in [0, a]$?
- – 23. En déduire que l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile se met sous la forme $E_c = \gamma M^{5/3}/R^2$ dans laquelle on exprimera γ en fonction de h , m_p et m_e .

II.D Le cas des naines blanches

On s'intéresse ici aux naines blanches, étoiles dans lesquelles la pression due au confinement quantique (avec l'énergie cinétique exprimée en fonction de M et R dans la partie **II.C**) est nettement supérieure aux effets de l'agitation thermique (que l'on négligera donc ici) et compense seule les effets de la gravitation (avec l'énergie de gravitation exprimée également en fonction de M et R dans la partie **II.A**).

La particularité de ces étoiles (essentiellement composées de carbone) et la prise en compte des dégénérescences des états d'énergie des électrons introduisent des facteurs numériques dans l'expression de γ obtenu dans un cas simple à la question **23**. Ces spécificités ne modifient toutefois pas l'expression de l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile. En 1926, FOWLER¹ propose la valeur $\gamma = 1,6 \cdot 10^6$ SI pour les naines blanches. On utilisera cette valeur dans le reste du problème.

- – 24. Pour une étoile de ce type, déterminer le rayon R_{eq} qui assure un minimum de l'énergie totale.
- – 25. Calculer numériquement R_{wd} dans le cas d'une masse égale à celle du Soleil et conclure.
En 1931, CHANDRASEKHAR² explique qu'il faut prendre en compte le caractère relativiste des électrons confinés dans les naines blanches. Il en deduira un modèle plus correct pour ces étoiles.
- – 26. En estimant la vitesse des électrons dans le modèle de FOWLER justifier l'argument de CHANDRASEKHAR.

FIN DE L'ÉPREUVE

1. R. H. FOWLER, *On dense matter*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **87**, 114, 1926
2. S. CHANDRASEKHAR, *The maximal mass of ideal white dwarfs*, Astrophysical Journal, **74**, 81, 1931

Formulaire en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} [F(r)] = \frac{dF}{dr} \hat{u}_r \quad \text{div } [F(r) \hat{u}_r] = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 F(r)]$$

Données numériques

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687 \text{ j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4,85 \mu\text{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1,6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Syntaxes Python

Syntaxe d'appel	Résultats ou commentaires
★ Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a, b]$:	
<code>r = numpy.linspace(a, b, n)</code>	<code>r</code> est un tableau de type <code>numpy.array</code>
★ Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique	
<code>r = scipy.integrate.quad(f, a, b)</code>	<code>r = (y, err)</code>
★ Créer ou activer une fenêtre de tracé :	
<code>r = matplotlib.pyplot.figure()</code>	exécuter <i>avant</i> de générer des tracés
★ Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$	
<code>matplotlib.pyplot.plot(x, y)</code>	<code>x</code> et <code>y</code> , énumérables de même dimension
★ Afficher la ou les fenêtres de tracé :	
<code>matplotlib.pyplot.show()</code>	exécuter <i>après</i> avoir généré des tracés



**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Impulsion mécanique et mesures optiques

Le sujet comporte quatre parties **I**, **II**, **III** et **IV** qui, bien que liées les unes aux autres, peuvent être abordées de manière totalement indépendante sous réserve d'admettre éventuellement les résultats affirmés par l'énoncé. Dans les questions posées, *exprimer* signifie donner une expression littérale et *calculer* signifie donner une valeur numérique ; toutes les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les vecteurs seront surmontés d'une flèche, \vec{p} ou \vec{v} . Les grandeurs complexes seront soulignées, Ψ ou \underline{z} , sauf i, tel que $i^2 = -1$.

Dans le langage général, le sens usuel du mot *impulsion* désigne l'élan initial qu'on peut donner à une particule élémentaire ou à un projectile macroscopique qui poursuit ensuite son mouvement. Le même mot a un sens plus spécifique en physique ; l'impulsion, d'abord définie en mécanique *classique* comme la quantité de mouvement dans de très nombreux cas, se retrouve en mécanique *quantique* comme en mécanique *relativiste* avec un sens étendu.

Nous *admettrons* dans tout ce qui suit que l'impulsion \vec{p} d'une particule ponctuelle *libre* (non engagée dans une liaison), de masse m et d'énergie E est, dans le cadre général de la théorie d'EINSTEIN (1905), donnée par la relation dite du *triangle relativiste* :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1)$$

où $p = \|\vec{p}\|$ et $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide ; par ailleurs, cette même impulsion \vec{p} est, dans la description *ondulatoire* des particules, associée à la longueur d'onde λ de l'onde associée à la particule par la relation de DE BROGLIE (1924) :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

où $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$ est la constante de PLANCK (1900).

I Impulsion de particules élémentaires

- 1. Quel est, à votre avis, la nature du « triangle relativiste » évoqué par la relation (1) ? Représenter celui-ci.

Quelle est l'unité usuelle, dans le système international, de l'impulsion p ? du produit pc ?

L'énergie des systèmes *macroscopiques* s'exprime usuellement en joule (J) ou en kilowatt-heure ($1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$). Dans toute la suite de la partie **I**, l'énergie des particules *élémentaires* sera donnée en MeV (méga-électron volt) où $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ et $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Les masses des particules seront données en MeV/c^2 et leurs impulsions en MeV/c . Par exemple la masse de l'électron vaut $m_e = 0,51 \text{ MeV}/c^2$ et celle du proton vaut $m_p = 940 \text{ MeV}/c^2$ (ou, si on préfère, $m_e c^2 = 0,51 \text{ MeV}$ et $m_p c^2 = 940 \text{ MeV}$).

- 2. On appelle *énergie de repos* d'une particule la valeur E_0 de l'énergie de celle-ci lorsque son impulsion est nulle. Exprimer E_0 pour un proton et calculer sa valeur numérique.

Pour une particule *en mouvement*, le supplément d'énergie $E_c = E - E_0$ porte le nom d'*énergie cinétique*.

- 3. On s'intéresse d'abord aux particules vérifiant la relation (1) dans le cas de la *limite classique*, lorsque $E_c \ll E_0$. En vous limitant au premier ordre non nul, donner dans ce cas une expression de E_c en fonction de l'impulsion p et de la masse m de la particule. Quelle est alors la relation entre l'impulsion \vec{p} et la vitesse \vec{v} d'une particule ?

Quelle vitesse maximale peut-on donner à un proton pour rester dans la limite classique telle que $E_c/E_0 < 1\%$? Même question pour un électron.

Si on ne se limite pas aux faibles vitesses, on peut montrer, et on l'admettra, la relation générale entre la masse m , la vitesse \vec{v} de norme $v = \|\vec{v}\|$, l'impulsion \vec{p} de la particule et la célérité c de la lumière :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

- – 4. En déduire l'expression générale de l'énergie totale $E = f(E_0, v, c)$ d'une particule de masse m .
- – 5. Un photon est une particule associée à une onde électromagnétique dans le vide et dont la vitesse est donc égale à c . Que peut-on en déduire, pour sa masse, de la relation $E = f(E_0, v, c)$ établie à la question précédente ?

Déduire de (2) l'expression de l'énergie E d'un photon en fonction de la longueur d'onde λ puis de la fréquence ν de l'onde. Faire l'application numérique dans les cas des ondes lumineuses des domaines bleu ($\lambda \sim 400 \text{ nm}$) puis rouge ($\lambda \sim 600 \text{ nm}$). On pourra exploiter le fait que $hc \simeq 1,2 \text{ eV} \times \mu\text{m}$ et on exprimera E en eV.

II Le spectre d'émission des atomes d'hydrogène

On s'intéresse ici à l'émission d'un photon, d'énergie E et d'impulsion $p = E/c$, par un atome initialement au repos, de masse m . Au cours de cette émission, l'atome passe de l'énergie initiale E_i à l'énergie finale $E_f = E_i - \Delta E < E_i$ et il recule avec, dans le cadre d'une description classique, l'impulsion $m\vec{v}$ et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ (figure 1) de sorte que l'impulsion *totale* du système complet reste nulle après l'émission, comme elle l'était avant émission. La direction de l'impulsion \vec{p} du photon est donc opposée à la vitesse \vec{v} de l'atome qui recule.

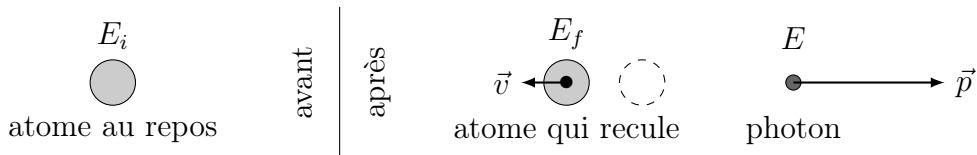


FIGURE 1 – Émission d'un photon par un atome au repos

- – 6. On admet que l'énergie totale du système après émission est identique à celle de l'atome au repos avant l'émission. En déduire la relation $E = mc^2 \left(\sqrt{1 + 2\eta} - 1 \right)$ et exprimer η en fonction de ΔE , m et c .
- – 7. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, ΔE est de l'ordre de quelques électrons-volts. En déduire qu'on peut négliger l'énergie de recul de l'atome et conclure quant à la relation entre $\Delta E = E_i - E_f$ et l'énergie E du photon émis.

La résolution de l'équation de SCHRÖDINGER (1922) dans le cas de l'atome d'hydrogène montre que les valeurs de l'énergie E_n de l'atome sont quantifiées en fonction du nombre quantique principal $n \in \mathbb{N}^*$ et de la grandeur $H = 27,2 \text{ eV}$ selon la relation : $E_n = -H/(2n^2)$. Cette expression est confirmée par l'étude des ondes lumineuses, de longueur d'onde λ , émises par un ensemble d'atomes d'hydrogène qui rayonnent par désexcitation depuis un état initial quantifié par n_i vers l'état final quantifié par $n_f < n_i$.

- – 8. Lorsque l'état final est $n_f = 1$, montrer qu'il existe une λ_{\max} telle que $\lambda \leq \lambda_{\max}$ et donner une estimation de λ_{\max} . Quel est le domaine spectral correspondant à ces raies d'émission ? Lorsque l'état final est $n_f > 2$, montrer qu'il existe une λ_{\min} que l'on estimera, telle que $\lambda \geq \lambda_{\min}$. Quel est le domaine spectral correspondant à ces raies d'émission ? Les raies d'émission de l'hydrogène dans le domaine visible (les raies de BALMER) ont été étudiées à partir de 1853 par ÅNGSTRØM ; à quelles valeurs de n_f correspondent-elles ?

C'est la connaissance précise de ce spectre qui a permis l'étude de la quantification de l'énergie des atomes donc l'introduction de la mécanique quantique au début de XX^e siècle. Cette connaissance a été par la suite améliorée au moyen de la spectrométrie interférentielle.

III Mesures interférométriques de longueurs d'onde

En 1907, MICHELSON est le premier américain à recevoir le prix Nobel de physique pour ses instruments optiques de précision et les mesures spectroscopiques et métrologiques réalisées au moyen de ceux-ci. En particulier, il publierà en 1892 des mesures relatives aux spectres d'émission de plusieurs sources, obtenues par spectroscopie interférentielle, et notamment pour les raies H_α (rouge) et H_β (bleue) d'émission par les atomes d'hydrogène.

III.A L'interféromètre de Michelson

Le schéma du montage utilisé par MICHELSON est proposé figure 2. Le dispositif monochromateur, formé d'un prisme de verre dispersif et d'une fente étroite, éclaire l'appareil en sélectionnant une raie quasi-monochromatique de longueur d'onde λ_0 , appartenant au domaine visible. L'observation est réalisée au moyen d'un oculaire afocal, réglé à l'infini : il donne d'un objet situé à grande distance une image également à grande distance, mais agrandie.

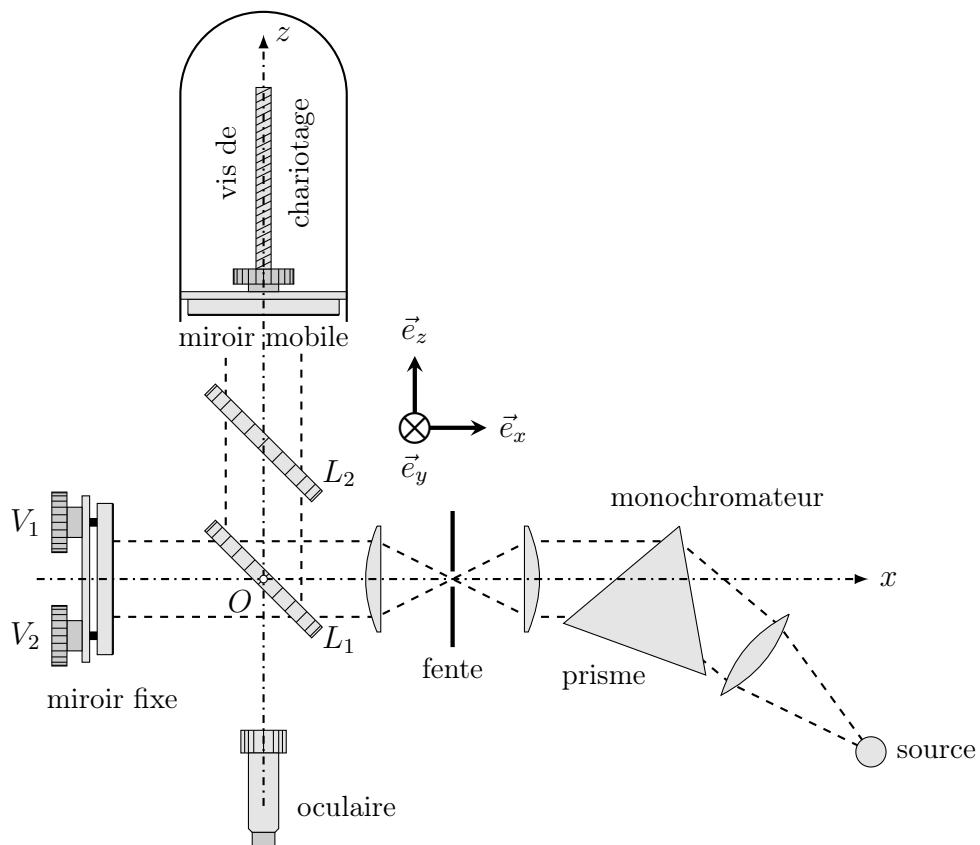


FIGURE 2 – Dispositif de mesure en spectroscopie interférentielle

- – 9. L'interféromètre comporte deux lames de verre L_1 et L_2 , parallèles, de même épaisseur e et de même indice optique n , inclinées d'un angle $\pi/4$ relativement à l'axe (O, \vec{e}_x) normal au miroir fixe. La lame L_1 est munie d'une couche semi-réfléchissante sur une seule de ses faces ; laquelle ? Justifier, en vous appuyant sur un schéma.

- – 10. Après réglage des vis V_1 et V_2 les miroirs fixe et mobile sont rendus rigoureusement perpendiculaires ; l'axe optique (O, \vec{e}_z) de l'oculaire est alors confondu avec la normale au miroir mobile et l'opérateur observe, au moyen de cet oculaire réglé à l'infini, des franges d'interférence. Quelle est la forme de ces franges ?
Peut-on encore les observer si l'oculaire est déréglé ?
- – 11. Tout en observant les franges, l'observateur peut actionner la vis micrométrique et déplacer le miroir mobile dans le plan (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y), le long de l'axe (O, \vec{e}_z). Relier le nombre ΔN de franges sombres qui défilent au centre du champ et le décalage Δz du miroir mobile.
- – 12. Exprimer, au moyen d'un schéma approprié, la différence de marche observée à l'infini dans une direction donnée, en fonction de l'écart séparant les deux miroirs.
Le déplacement maximal de la vis micrométrique à partir du contact optique est noté Δz_{\max} . Déterminer, après ce déplacement, l'angle $\Delta\theta$ qui sépare le centre de la figure de la première frange de même nature.
- – 13. Dans le cas d'une des raies de l'hydrogène atomique, on observe le défillement de $N = 3\,156$ franges pour un décalage $\Delta z = 1\,035 \pm 2 \mu\text{m}$. S'agit-il de la raie H_α ou H_β ?
Avec quelle précision relative mesure-t-on sa longueur d'onde λ_0 ?
Que vaut alors $\Delta\theta$? Commenter.

III.B Cohérence spectrale d'une source

Une source de lumière éclaire avec la même intensité I_0 les deux voies d'un interféromètre ; l'observation est réalisée en un point où la différence de marche est δ .

- – 14. Dans le cas où la source est rigoureusement monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , exprimer l'intensité $I(\delta)$ en fonction de I_0 , λ_0 et δ . Définir et calculer le facteur de contraste C des franges.

Certaines sources lumineuses sont en fait *bichromatiques* : elles émettent deux radiations de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2 et on pose alors $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ en admettant toujours $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

- – 15. Pour certaines sources bichromatiques les deux radiations émises sont de même intensité ; c'est le cas des lampes à vapeur de sodium, étudiées notamment par MICHELSON dans les conditions décrites en III.A. Expliciter l'intensité I observée en fonction de I_0 , de la différence de marche δ , de λ_0 et de $\Delta\lambda$.

Exprimer le facteur de contraste C des franges et montrer comment il permet la mesure de $\lambda_0/\Delta\lambda$.

- – 16. D'autres sources, comme celles émettant la raie H_α de l'hydrogène, peuvent être écrites comme bichromatiques mais les intensités I_1 et $I_2 < I_1$ émises aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Pour quelle(s) valeur(s) de δ le facteur de contraste des franges est-il minimal ? Quelle est cette valeur minimale ?

Dans le cas de la raie double H_α , l'écart $\Delta\lambda$ est de l'ordre de $1,4 \times 10^{-11} \text{ m}$. Est-il possible de le mettre en évidence avec le montage proposé ci-dessus ?

III.C Les tubes à hydrogène

Pour l'étude du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène, une première technique¹, initiée dans les années 1930, a consisté à utiliser un tube AB contenant de l'hydrogène moléculaire (dihydrogène, formule H_2) sous faible pression (150 mbar) soumis à des décharges électriques de

1. D. Chalonge et Ny Tsi Zé, *J. Phys. Radium*, 1930

haute tension entre deux électrodes E_1 et E_2 ; l'observation se fait au travers d'une fenêtre de quartz F (cf. figure 3). Le spectre d'émission obtenu présente la superposition d'un fond quasi-continu et de raies bien identifiées, comme le montre la figure 4 tirée de l'article présentant la technique originelle.

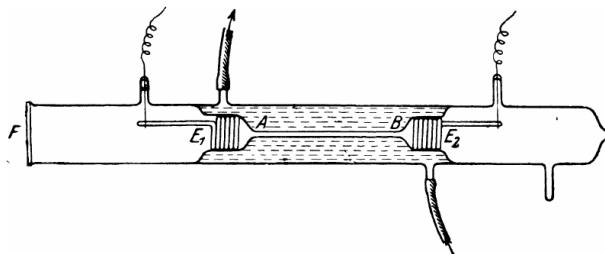


FIGURE 3 – Illustration du dispositif : reproduction de la figure 1 de l'article original

□ – 17. Quel est le rôle du circuit à circulation d'eau qui entoure le tube central ?

Sur le spectre proposé en figure 4, quelle est l'unité de la graduation donnée en abscisse ? Quelle est, à votre avis, l'origine du fond continu (essentiellement dans le proche ultraviolet) marqué en trait pointillé gris ?

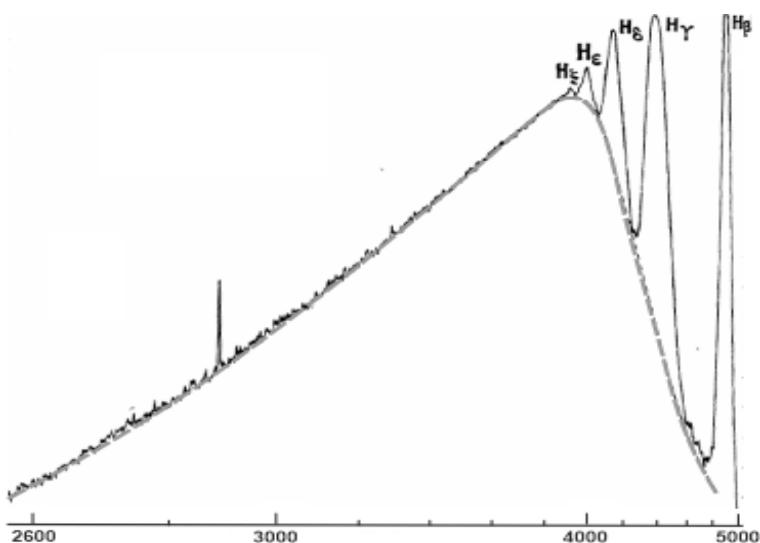


FIGURE 4 – Spectre d'émission du tube à hydrogène en échelle logarithmique

On préfère actuellement utiliser des lampes à décharge d'une constitution différente : il s'agit de tubes à décharge remplis de vapeur d'eau permettant l'obtention d'un spectre atomique sans bande continue. En présence des décharges à haute tension, ce type de lampe est le siège des réactions $\text{H}_2\text{O} = \text{HO} + \text{H}$.

□ – 18. Quelle propriété du spectre d'émission de la molécule hydroxyle HO est ici mise à profit ?

Ces lampes contiennent une certaine proportion d'*eau lourde*, molécules HDO dans laquelle un des deux atomes d'hydrogène ${}_1^1\text{H}$ est remplacé par un atome de deutérium ${}_1^2\text{D}$, dont le noyau est formé d'un proton et d'un neutron. Si on tient compte de la masse m_N du noyau atomique, on peut montrer que la longueur d'onde d'émission d'une des raies spectrales de l'hydrogène atomique vérifie la relation :

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{m_e + m_N}{m_N}$$

où m_e est la masse de l'électron et λ_∞ la longueur d'onde idéale si $m_N \rightarrow \infty$.

- – 19. Les raies d'émission du deutérium sont-elles, par rapport à celle de l'hydrogène ordinaire, décalées vers le bleu ou vers le rouge ?

De quelle résolution spectrale (en nanomètre) faut-il disposer pour séparer les raies de l'hydrogène et celles du deutérium ?

À partir d'une lecture de la courbe de la figure 4, faire l'application numérique dans le cas de la raie H_β .

IV L'équation de Klein–Gordon

Lors du développement de la mécanique quantique (ou mécanique ondulatoire), l'onde de matière $\underline{\Psi}(\vec{r},t)$ a d'abord été considérée comme solution de l'équation de SCHRÖDINGER (4) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\Psi} + V(\vec{r})\underline{\Psi} = i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} \quad \text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ et } i^2 = -1 \quad (4)$$

pour une particule de masse m repérée par sa positon \vec{r} et soumise à l'interaction décrite par la fonction potentiel scalaire $V(\vec{r})$. En 1926, KLEIN et GORDON en ont proposé une version modifiée qu'on écrira :

$$\hbar^2 c^2 \Delta \underline{\Psi} + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r}) \right)^2 \underline{\Psi}(\vec{r},t) = m^2 c^4 \underline{\Psi}(\vec{r},t) \quad (5)$$

Dans la suite on s'intéressera exclusivement aux solutions de l'une ou l'autre équation, de la forme :

$$\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - p(E)x) \right]$$

où $\underline{\psi}_0$ est une certaine constante complexe, x est l'une des coordonnées cartésiennes de \vec{r} , $E > 0$ est l'énergie de la particule et $p(E) > 0$ son impulsion.

- – 20. L'état associé à cette fonction d'onde est-il stationnaire ?

Dans quel sens le mouvement de la particule décrite par cette onde a-t-il lieu ?

Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g en fonction de E , de $p(E)$ et de sa dérivée.

- – 21. Exprimer $p(E)$ et $v_g(E)$ dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de SCHRÖDINGER dans un domaine où V est constant. En déduire le caractère relativiste ou non du modèle associé à l'équation de SCHRÖDINGER.

- – 22. Répondre aux mêmes questions dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de KLEIN–GORDON (5).

On s'intéresse enfin à la résolution du problème physique suivant : la particule étudiée est libre ($V = 0$) pour $x < 0$ et $x > a$ et pourvue d'une énergie E , tandis que, dans l'intervalle $x \in [0,a]$, elle est soumise à une interaction caractérisée par $V = V_0 > E$ (figure 5) et même $V_0 - E > mc^2$. Les solutions de l'équation (de SCHRÖDINGER ou de KLEIN–GORDON) seront donc écrites, pour $x < 0$ et $x > a$, sous les formes respectives :

$$\underline{\Psi}(x < 0, t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right] + \underline{R} \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et + px) \right]$$

$$\underline{\Psi}(x > a, t) = \underline{T} \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]$$

où \underline{T} et \underline{R} sont deux constantes complexes.

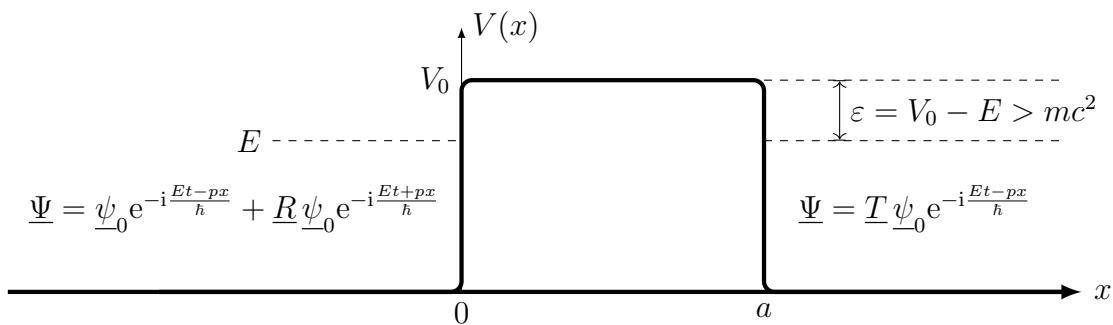


FIGURE 5 – Barrière de potentiel

On se place d'abord dans le cas de l'équation de SCHRÖDINGER.

- – 23. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x \in [0,a]$?

Quelles relations permettent de calculer \underline{R} et \underline{T} ? *On ne demande pas de les exprimer ici!*

Quel phénomène physique peut-on mettre ainsi en évidence ?

Quelle est l'interprétation physique de $|\underline{T}|^2$?

On se place maintenant dans le cas de l'équation de KLEIN–GORDON.

- – 24. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x \in [0,a]$? On notera qu'en introduisant

$$\varepsilon = E - V_0, \text{ on a } q^2 = \frac{(\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2)}{c^2} > 0.$$

Les mêmes relations que dans l'étude de la barrière de potentiel dans le cadre de l'équation de SCHRÖDINGER conduisent, pour l'onde de KLEIN–GORDON, à la relation (que l'on admettra) :

$$|\underline{T}|^2 = \frac{1}{|\cos \varphi - i\alpha \sin \varphi|^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{qa}{\hbar}$$

- – 25. Déterminer la valeur maximale de $|\underline{T}|^2$. Commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
 SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
 TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
 MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
 TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
 ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2014

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

LASERS ET DISTANCES

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{e}_x) ou d'une flèche dans le cas général (\vec{v}). Sauf contre-indication locale, on utilisera 3 chiffres significatifs pour les applications numériques. Les trois parties de ce problème sont totalement indépendantes.

I. — Un peu d'astrométrie

I.A. — Triangulation

La triangulation est une méthode optique de la mesure de la distance entre les points A et C d'un triangle ABC quelconque basée sur la détermination de deux angles de ce triangle et la connaissance de la longueur AB . C'est en utilisant cette méthode de proche en proche en mesurant des centaines de triangles entre Dunkerque et Barcelone de 1792 à 1799 que les astronomes Delambre et Méchain furent chargés de mesurer la longueur du méridien terrestre. Le mètre fut alors défini comme la 40 millionième partie de cette distance.

- 1 — On considère le triangle de la figure 1. Montrer que la mesure des angles α et β et de la distante $AB = a$ permet la détermination de AC . On donnera l'expression de AC en fonction de a , α et β comptés positivement.

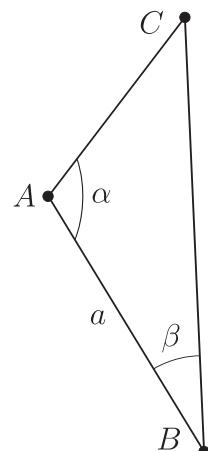


FIGURE 1 – Triangulation

I.B. — Le génial Aristarque

Au II^e siècle av. J.C., l'astronome grec Aristarque de Samos imagina une façon de comparer la distance de la terre à la lune TL et la distance de la terre au soleil TS . Lors d'une éclipse de lune, il se convainc que la lune possède un diamètre environ trois fois plus petit que celui la terre. Plus tard, il mesure l'angle $\theta_{1/2}$ correspondant au moment où la lune est placée de telle sorte qu'elle apparaît à demi-pleine vue depuis la terre (premier ou dernier quartier). Les divers angles sont représentés sur la figure 2.

2 — Que vaut l'angle $\lambda_{1/2}$ correspondant à $\theta_{1/2}$? On justifiera sa réponse.

Après de nombreuses mesures, délicates pour l'époque, Aristarque indique que l'angle $\theta_{1/2}$ est compris entre 87° et l'angle droit et il utilise la valeur $\theta_{1/2} = 87^\circ$ pour ses calculs.

3 — Déterminer la valeur numérique du rapport $\frac{TS}{TL}$ qu'il en déduit. Que pensez-vous de cette valeur ? La valeur réelle est-elle 10 fois ou 100 fois plus importante ? Donner une ou plusieurs raisons de cet écart.

4 — Lors d'une éclipse de soleil, on peut observer que, depuis la terre, la lune et le soleil possèdent le même diamètre apparent. Évaluer la valeur minimale du rapport entre le rayon du soleil et celui de la terre qu'a obtenu Aristarque. Interprétez sa conclusion stupéfiante pour l'époque : « *Pourquoi faire tourner la torche autour de la mouche ?* » En réalité, le diamètre du soleil est-il approximativement 100 fois ou 1000 fois plus grand que celui de la terre ?

I.C. — Détermination des distances soleil - planètes

La période sidérale d'une planète, considérée comme ponctuelle, est le temps mis par celle-ci pour faire un tour complet autour du soleil dans un référentiel héliocentrique. La période sidérale t_p d'une planète n'est pas directement mesurable sur la terre car elle est aussi en mouvement. En revanche, il est aisément de mesurer, depuis la terre, la période synodique τ_p d'une planète définie comme la période de réapparition d'une conjonction, c'est-à-dire un alignement entre le soleil, la terre et cette planète. On supposera que le mouvement des planètes autour du soleil est circulaire uniforme et que tous ces cercles sont dans le même plan.

5 — Dans le cas d'une planète supérieure, c'est-à-dire plus éloignée du soleil que la terre, exprimer la période sidérale t_p de la planète en fonction de sa période synodique τ_p et de la période de la terre t_t . On pourra s'aider d'un dessin en remarquant qu'entre deux conjonctions, la terre a fait autour du soleil, plus qu'un tour alors que la planète s'est déplacée d'un angle inférieur à 360° .

6 — En observant la planète mars depuis la terre, Copernic trouve pour cette planète une période synodique $\tau_m = 780$ jours. Calculer la période sidérale t_m de la planète mars.

7 — En notant r_p le rayon de l'orbite de la planète autour du soleil, énoncer puis retrouver rapidement par le calcul, la troisième loi de Kepler reliant r_p , t_p , la masse du soleil M_s et la constante de gravitation G . On précisera les hypothèses envisagées pour ce calcul. En prenant comme unité de temps la période sidérale t_t de la terre et comme unité de distance la distance terre-soleil (l'unité astronomique notée UA), donner la relation simple existant entre r_p et t_p et calculer la distance de la planète mars au soleil.

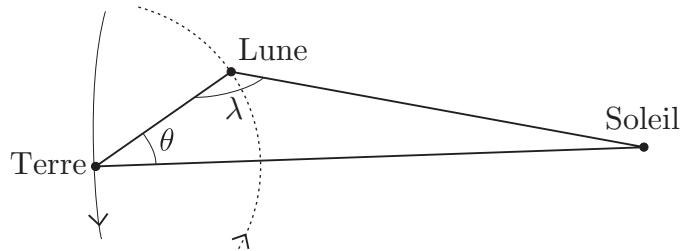


FIGURE 2 – terre, lune et soleil.

I.D. — Télémétrie laser-lune

Les mesures modernes de la distance terre-lune sont effectuées en utilisant un laser vert de longueur d'onde $\Lambda = 523 \text{ nm}$. Cinq rétroréflecteurs catadioptriques (assemblages de coins de cubes de surface collectrice totale $\Sigma_1 = 0,3 \text{ m}^2$) ont été placés en différents points de la lune par les missions humaines américaines Apollo 11, 14 et 15 ainsi que par les sondes robots soviétiques Lunokhod. Pendant une série de mesures, on envoie en direction de l'un de ces réflecteurs et à la fréquence de 10 Hz des impulsions laser possédant une énergie $\varepsilon = 300 \text{ mJ}$. La divergence du faisceau laser confère à celui-ci la forme d'un cône de demi-angle au sommet $\sigma_0 = 4''$. La réflexion sur les rétroréflecteurs est elle aussi divergente de demi-angle $\sigma_1 = 12''$. La réception est assurée par un détecteur situé au foyer du télescope servant à l'émission du laser, la surface collectrice équivalente du télescope est $\Sigma_0 = 1,8 \text{ m}^2$.

8 — Pourquoi utilise-t-on des rétroréflecteurs catadioptriques en coins de cubes ? On justifiera sa réponse par un schéma bidimensionnel.

Le rendement total ρ_t pour une impulsion est le produit du rendement aller ρ_a par le rendement retour ρ_r . Chacun d'eux étant défini comme le rapport de la surface collectrice sur la surface éclairée. On néglige l'effet de l'atmosphère terrestre et toute lumière parasite.

9 — Déterminer l'expression de ρ_t en fonction de σ_0 , σ_1 , Σ_0 , Σ_1 et de la distance d_ℓ entre le point d'émission du laser et le rétroréflecteur visé. En prenant $d_\ell = 360\,000 \text{ km}$, déterminer l'énergie maximale théoriquement reçue par le détecteur en retour de chaque impulsion. Illustrer ce résultat en termes de photons et proposer une méthode pour mesurer effectivement la distance d_ℓ .

FIN DE LA PARTIE I

II. — Utilisation d'un proximètre laser

II.A. — Mesure de petites distances

Le schéma de principe d'un proximètre à laser est représenté sur la figure 3. La lentille L est convergente de distance focale f et d'axe optique Δ . Les cellules photoréceptrices de largeur d sont situées dans le plan focal image de la lentille. Le segment O_1O de longueur h est appelée base du système. L'angle θ entre la base et l'axe optique Δ est fixe, pour simplifier les calculs on prendra ici $\theta = 45^\circ$. On note φ l'angle entre la base et la droite O_1P . Le point O_2 correspond à l'intersection entre l'axe optique de la lentille Δ et la surface de la barrette photoréceptrice. La diffusion en P est supposée isotrope.

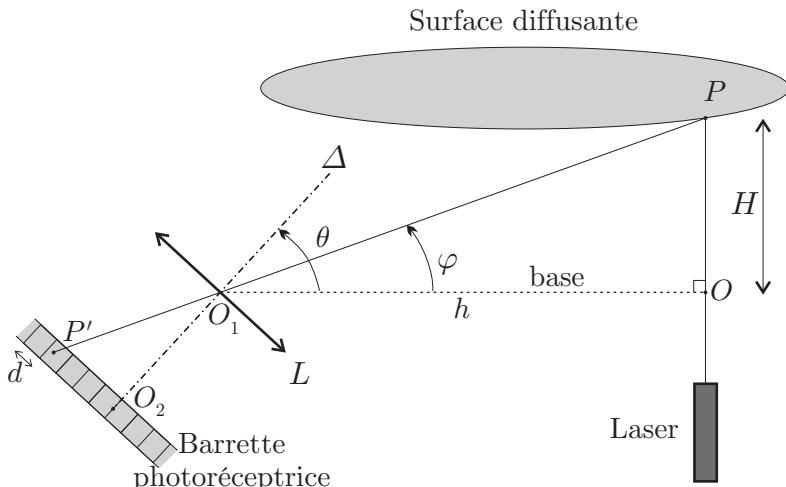


FIGURE 3 – Schéma de principe du proximètre laser

10 — Quelles sont les hypothèses pour que d'une part la lentille travaille dans les conditions de Gauss et d'autre part que l'image P' de P soit localisée sur la barrette photoréceptrice ?

11 — Déterminer l'expression de H en fonction de h , f et $y = O_2P'$. Calculer sa valeur numérique si $h = 1,00 \text{ m}$, $f = 2,50 \text{ cm}$ et $y = 1,00 \text{ mm}$.

- 12 — La largeur d d'une cellule de la barrette photoréceptrice induit une résolution angulaire $\delta\varphi$ qui entraîne une imprécision δH sur la mesure de H . Dans le cas $y \simeq 0$, estimer $\delta\varphi$ en fonction de f et d puis δH en fonction de d , f , H et h . En déduire qu'à d et f fixés, lorsque h varie, l'erreur relative minimale est obtenue si $h = H$; calculer sa valeur numérique dans ce cas pour $f = 2,50$ cm et $d = 10,0$ μm .

A la sortie du laser, on note $d_\lambda = 2r$ le diamètre du faisceau de longueur d'onde λ .

- 13 — Pourquoi le faisceau laser diverge-t-il d'un angle α_d ? Donner un ordre de grandeur de cet angle de divergence en fonction de λ et r .

- 14 — Déterminer un ordre de grandeur d' du diamètre de la tache qui en résulte sur la cellule. On exprimera d' en fonction de λ , f et r . Justifier la valeur numérique de f si $\lambda = 630$ nm et $r = 1$ mm.

II.B. — Mesure de grandes distances

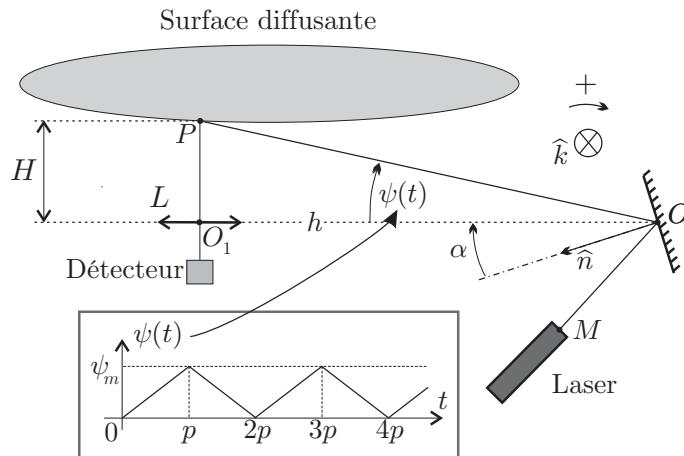


FIGURE 4 – Mesure de distance à miroir pivotant

$OO_1 = h$ est connue. Les oscillations du miroir permettent à l'angle ψ , dit de balayage, de varier comme une fonction affine par morceaux de période $2p$ représentée sur la figure 4. Le détecteur est désactivé pendant les intervalles de temps $[(2m + 1)p, (2m + 2)p]$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}$. La diffusion est toujours isotrope et identique en chaque point P de la surface. Le temps de vol des photons est négligeable devant la période $2p$.

Pour déterminer de plus grandes distances, on utilise un dispositif du même type que dans la partie II.A : le laser éclaire la surface en se réfléchissant sur un miroir plan que l'on fait osciller autour d'un axe dirigé selon le vecteur \hat{k} et passant par O . L'ensemble est représenté sur la figure 4, on prendra $(\widehat{MOO}_1) = 45^\circ$. Le détecteur est une cellule photoréceptrice située dans le plan focal de la lentille L de distance focale f . Cette cellule est de très petite dimension devant f . On note finalement $H = O_1P$ la distance à mesurer. On fera l'hypothèse que $H \gg f$ et que la distance

- 15 — Déterminer la relation entre ψ et l'angle α de la normale au miroir avec la base.

- 16 — Montrer que la mesure de H se ramène à une mesure de temps.

- 17 — Représenter l'allure de la variation de l'intensité lumineuse reçue par le photodétecteur en fonction du temps sur une période.

- 18 — Cette intensité est en fait récupérée sous la forme d'un signal électrique. Expliquer pourquoi l'opération qui consiste à dériver ce signal par rapport au temps permet d'améliorer la précision de la mesure de H . Proposer un montage électronique utilisant un amplificateur opérationnel, une résistance R et un condensateur de capacité C qui permet effectivement d'effectuer cette dérivée. On justifiera ce montage par le calcul.

FIN DE LA PARTIE II

III. — Diffusion thermique. Interaction Laser-Matière

Un rayonnement laser arrivant sur la surface d'un matériau donne lieu à différents effets : thermiques, électromécaniques, etc. Pour simplifier on supposera que la totalité de l'énergie du faisceau laser est absorbée par le matériau. Ceci se traduit par une élévation de la température, et donc par un accroissement des vibrations de la structure moléculaire ou cristalline du matériau. Cette transformation se fait à la surface de la zone d'interaction dans une épaisseur caractéristique moyenne δ appelée profondeur de pénétration moyenne de la lumière. Cette zone d'interaction devient une source de chaleur intense qui échauffe la matière par conduction thermique. Lorsque δ est faible devant le diamètre $2r$ du faisceau laser, on peut utiliser un modèle unidimensionnel de conduction de la chaleur. On néglige tout écoulement de chaleur en dehors de la direction Ox de propagation. Pendant le début de l'échauffement, le matériau est soumis à un flux thermique constant. Lorsque celui-ci se met à fondre, il apparaît une interface liquide-solide, dont la température est supposée constante et égale à la température de fusion T_f du matériau. Cette interface se propage alors dans le matériau. On notera L_f la chaleur latente de fusion du matériau. On considère que la partie fondue du matériau transmet intégralement la lumière du laser.

III.A. — Équation de diffusion

Le matériau de masse volumique ρ , de chaleur massique c , de conductivité thermique λ occupe le demi espace défini par $x > 0$. Il est initialement en équilibre à la température T_0 . La conduction de la chaleur se fait suivant l'axe Ox . On note $\vec{j}_Q(x, t) = j_Q(x, t) \hat{e}_x$, le vecteur densité de flux thermique et $T(x, t)$ la température du milieu que constitue le matériau. On néglige toute perte de chaleur dans la région $x < 0$.

19 — Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée à la fois par $T(x, t)$ et par $j_Q(x, t)$. On introduira le paramètre $\mu = \frac{\lambda}{\rho c}$. On vérifiera que cette équation admet une famille de solutions de la forme :

$$\theta(x, t) = \theta_0 + \frac{b e^{-u^2}}{\sqrt{\mu t}} \quad \text{avec } u = \frac{\kappa x}{\sqrt{\mu t}}$$

Les quantités θ_0 et b sont des constantes d'intégration et κ un rapport de deux nombres entiers positifs que l'on déterminera.

III.B. — Flux thermique constant

On suppose que la surface du matériau (située en $x = 0$) reçoit à partir de l'instant $t = 0$ une densité de flux constant \vec{j}_{Q_0} dirigée selon \hat{e}_x .

20 — Montrer que la solution proposée à la question 19 ne convient pas dans ce cas.

On admet que la solution correspondant à cette situation s'écrit pour la température sous la forme

$$T(x, t) = A_1 + \frac{2B_1\sqrt{\mu t}}{\lambda} F(u) \quad \text{avec } F(u) = \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} - u \operatorname{erfc}(u) \quad \text{et} \quad \operatorname{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

21 — Déterminer l'expression de $j_Q(x, t)$ en fonction de B_1 et $\operatorname{erfc}(u)$.

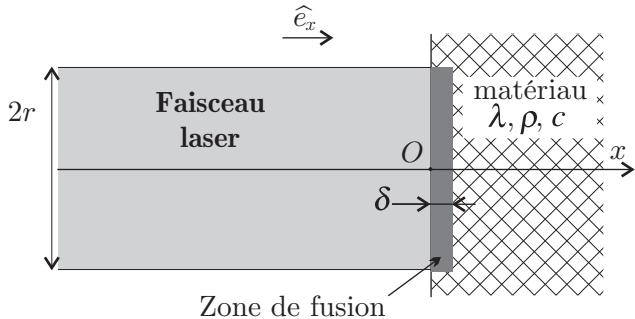


FIGURE 5 – Interaction laser-matière

- 22 — Étudier toutes les conditions aux limites du problème en x et en t . On commenterá toutes ces conditions aux limites et on admettra que si $u \rightarrow +\infty$ alors

$$\operatorname{erfc}(u) \sim \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \left[u^{-1} - \frac{1}{2}u^{-3} + o(u^{-3}) \right].$$

En déduire les expressions de A_1 et B_1 en fonction de T_0 et \vec{j}_{Q_o} .

III.C. — Température constante

On suppose à présent que la surface située en $x = 0$ est maintenue à la température constante T_1 . On montre que la solution correspondante s'écrit $T(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erfc}(u)$ où la fonction $\operatorname{erfc}(u)$ est la même que celle définie dans la partie précédente, A_2 et B_2 étant deux températures constantes.

- 23 — Étudier toutes les conditions aux limites en x et t de $T(x, t)$. On déterminera notamment les expressions de A_2 et B_2 en fonction de T_1 et T_0 .

- 24 — Déterminer l'expression de $j_Q(x, t)$; ce résultat vous paraît-il plausible ?

III.D. — Modélisation d'une opération de perçage

On perce une plaque d'aluminium; les valeurs numériques correspondant à cette opération sont les suivantes : $\lambda = 210 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, $\rho c = 2,40 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3}\text{.K}^{-1}$, $\rho = 2,70 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $L_f = 3,88 \cdot 10^5 \text{ J.kg}^{-1}$, la température initiale de la surface considérée est $T_0 = 30^\circ\text{C}$ et la température de fusion de l'aluminium est $T_f = 660^\circ\text{C}$. La surface est chauffée dans un premier temps jusqu'à la température de fusion puis l'avancée du perçage se fait alors par liquéfaction progressive de la matière. On admettra que le front liquide-solide se propage sans déformation avec une vitesse constante \vec{v} et que l'aluminium se comporte comme un corps noir. La densité de flux thermique \vec{j}_{Q_o} du faisceau laser de section $\sigma = 0,20 \text{ cm}^2$ et de puissance $P_\ell = 1,00 \text{ kW}$ est supposée constante.

- 25 — En utilisant les résultats de la partie III.B, déterminer l'expression du temps t_f au bout duquel la surface du matériau atteint la température de fusion T_f . Calculer sa valeur numérique.

À partir de l'instant t_f , on suppose que le front liquide-solide se propage dans le matériau à la vitesse $\vec{v} = v\hat{e}_x$, où v est une constante positive dans le référentiel du laboratoire. On parle de front de fusion. On se place dorénavant dans le référentiel lié à ce front, dans lequel l'abscisse du point O devient $x = -vt$.

- 26 — En écrivant la conservation de l'énergie pendant la durée dt et sur une tranche que l'on précisera, établir une relation donnant \vec{v} en fonction de \vec{j}_{Q_o} , ρ , λ , L_f et $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$.

- 27 — La distribution de température dans le repère lié au front de fusion est supposée stationnaire. Montrer que la distribution de la température à droite du front de fusion vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dx} = -\gamma \frac{d^2T}{dx^2}$$

où l'on exprimera γ en fonction de μ et v .

- 28 — Déterminer l'expression de $T(x)$ en fonction de T_0 , T_f , v et μ .

□ **29** — En déduire l'expression de v en fonction de P_ℓ , σ , ρ , L_f , c , T_f et T_0 . Calculer la valeur numérique de v pour le perçage considéré.

FIN DE LA PARTIE III

FIN DE L'ÉPREUVE

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2015

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

NATURE DE LA GRAVITATION

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par GALILÉE au début du XVII^e siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, NEWTON fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.

Si l'on sait aujourd'hui que la gravitation régit la dynamique des composantes de l'Univers (planètes, étoiles, galaxies, ...), l'observation récente de l'expansion de l'Univers a conduit à se poser des questions fondamentales sur les théories de la gravitation classique. L'introduction dans la théorie cosmologique de l'énergie noire, qui serait la contribution énergétique majoritaire de l'Univers, permet d'expliquer certaines observations mais sa nature et ses propriétés restent principalement théoriques. Certaines extensions de la théorie de la gravitation suggèrent même l'existence d'une répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière, nommée antigravité.

La première partie propose une description de l'expérience d'EÖTVÖS ayant permis, dès la fin du XIX^e siècle, de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque. La seconde partie remet en cause le principe d'équivalence et propose une retouche des lois de NEWTON sur la gravitation universelle. La dernière partie s'intéresse au projet GBAR proposant de peser l'antimatière.

Les parties I, II et III sont indépendantes entre elles. On notera i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Les données numériques et un formulaire sont rassemblés en fin d'épreuve. Les vecteurs sont repérés par une flèche (\vec{v}) ou par un chapeau s'ils sont unitaires ($\|\hat{u}_x\| = 1$).

I. — L'expérience d'EÖTVÖS

□ 1 — Qu'appelle-t-on « principe d'inertie » en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte* m_i .

- 2 — Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielles m_i et grave (ou pesante) m comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielles et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par GALILÉE, a été menée par NEWTON (1686) ou encore BESSEL (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre 10^{-3} et 10^{-5} . L'invention du pendule de torsion par EÖTVÖS autour de 1888, permit d'augmenter fortement la sensibilité.

I.A. — Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'EÖTVÖS utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 1, deux sphères appelées S_1 et S_2 , homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C . On note m_{i_1} et m_{i_2} les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2 . La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz .

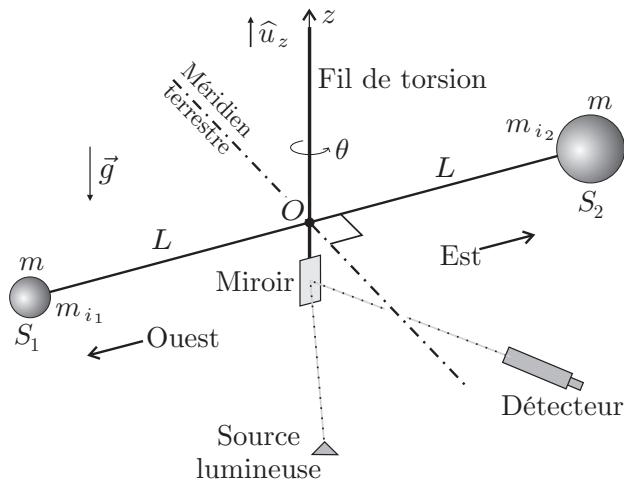


FIG. 1 – Dispositif d'EÖTVÖS

Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ . Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette.

On note \mathcal{R} le référentiel du laboratoire centré sur O et *supposé galiléen dans cette sous-partie* où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.

On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical (Oz) et J le moment d'inertie du système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$ par rapport à (Oz). On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en O a pour intensité $\mathcal{M}_0 = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

- 3 — Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle $E_{p,S}$ de S en fonction de C et $\theta - \theta_0$, on choisira $E_p(\theta_0) = 0$. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,S}$ du solide S . En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C , J , θ_0 et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

- 4 — On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $P_{frot} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

- 5 — On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes J , C et α ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$. A quelle condition sur ε , l'erreur relative introduite par l'approximation $T \simeq T_0$ est-elle inférieure à 1% ? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0,2 \text{ kg}$. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

$L [\text{m}]$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
$T [\text{s}]$	436	509	581

- 6 — En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2 , L^2 , J_0 , J_1 , m et C . À partir des résultats de mesure donner une estimation de la valeur de la constante de torsion C . Compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T montrer que l'on peut écrire

$$m \approx \frac{C}{8\pi^2} \frac{T^2}{L^2}.$$

I.B. — Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel \mathcal{R} du laboratoire centré sur O n'est plus supposé galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes m_{i_1} et m_{i_2} a priori différentes des deux sphères. On se place donc dans le référentiel \mathcal{R}_t attaché au centre de gravité G de la terre supposé galiléen.

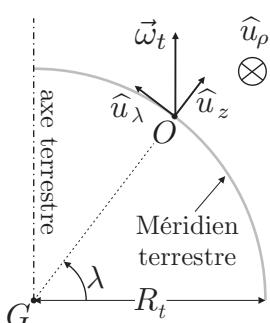


FIG. 2 – Vue en coupe

La terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse $\vec{\omega}_t$ (de norme ω_t) autour de l'axe terrestre et le point O se trouve à la latitude λ . Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure 2.

L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la figure 1, on relève une valeur θ_{∞_1} pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle π afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur θ_{∞_2} pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

- 7 — Déterminer les composantes des forces d'inertie d'entraînement subies par m_{i_1} et m_{i_2} dans la base $(\hat{u}_z, \hat{u}_\rho, \hat{u}_\lambda)$ en fonction de λ , L , ω_t , R_t , m_{i_1} ou m_{i_2} .

- 8 — En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta_{\infty_1} - \theta_{\infty_2}$ entre les deux expériences en fonction de λ , C , L , ω_t , R_t , m_{i_1} et m_{i_2} .

- 9 — La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de 1,0 mm à 2,0 m de distance. En utilisant l'expression de m trouvée à la question 6, déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport $\delta_m = \frac{|m_{i_1} - m_{i_2}|}{m}$. On donne $\lambda = 45^\circ$ et $L = 6,0 \text{ cm}$.

- 10 — La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?

FIN DE LA PARTIE I

II. — Corriger la gravitation universelle classique ?

Leurs observations ne concordant pas avec les modèles classiques de la physique, les astronomes ont deux solutions : soit ils rajoutent arbitrairement au cosmos un ingrédient, une matière invisible qui permet de justifier les anomalies détectées, soit ils modifient les lois.

Si dans leur très grande majorité, les physiciens ont, depuis 1930, privilégié la première voie, il apparaît aujourd'hui que l'imperceptibilité persistante de cette matière noire devient gênante.

Après avoir mis en évidence certaines des observations qui ont conduit plusieurs astronomes à s'interroger sur l'existence d'une matière noire invisible, nous aborderons quelques aspects de la théorie de la gravitation modifiée par M. MILGROM.

II.A. — Gravitation newtonienne, matière noire

Depuis plus de 50 ans les astrophysiciens comparent la quantité de matière visible dans les galaxies spirales, comme notre Voie Lactée, à celle qui est nécessaire pour expliquer la vitesse de rotation des étoiles dans ces mêmes galaxies.

Une galaxie est assimilable à une distribution spatiale \mathcal{D} de matière de masse volumique ρ créant un champ gravitationnel supposé statique $\vec{\Gamma}$ qui satisfait aux équations locales suivantes :

$$\text{div} \vec{\Gamma} = -4\pi G\rho \quad \text{et} \quad \text{rot} \vec{\Gamma} = \vec{0} \quad (1)$$

La force de gravitation exercée par cette galaxie sur un point matériel M de masse m s'exprime alors selon la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$.

□ 11 — Citer deux équations analogues aux équations (1) en électrostatique. Peut-on, de la même façon, proposer une analogie avec la magnétostatique ? On définit le potentiel gravitationnel $\phi(M)$ au point M , analogue du potentiel $V(M)$ en électrostatique. Démontrer avec soin que le potentiel gravitationnel $\phi(M)$ satisfait à une équation de Poisson relative à la gravitation.

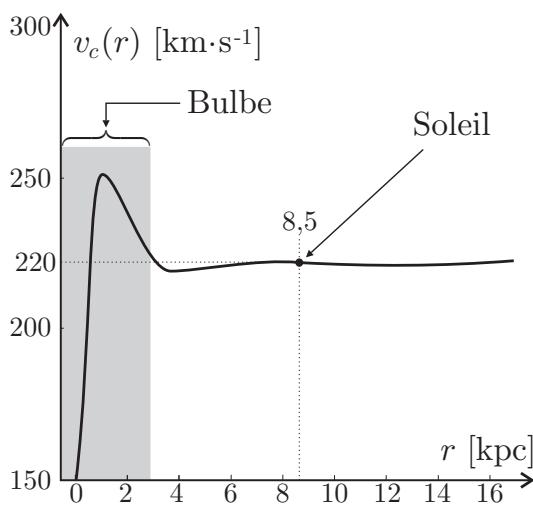
On considère un système \mathcal{G} à répartition sphérique de masse centré sur un point O fixe : l'ensemble (O, \mathcal{G}) permet de définir un référentiel galiléen. En un point M de ce système, la densité volumique de masse $\rho = \rho(M)$ et le potentiel gravitationnel $\phi = \phi(M)$ ne sont des fonctions que de la seule variable $r = \|\vec{r}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$. On suppose qu'un point M de masse m contenue dans \mathcal{G} n'évolue que sous l'action du champ de gravitation créé par \mathcal{G} . Pour des raisons physiques évidentes la fonction $\rho(r)$ est décroissante et la fonction $\phi(r)$ croissante.

□ 12 — Exprimer la force de gravitation \vec{F} subie par M en fonction de m , $\frac{d\phi}{dr}$ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Montrer que le mouvement de M s'effectue dans un plan. On considère les coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan. Que représente la quantité $r^2\dot{\theta}$?

□ 13 — On appelle vitesse circulaire $\vec{v}_c(r)$ dans \mathcal{G} , la vitesse qu'aurait le point M s'il était en orbite circulaire de rayon r dans \mathcal{G} . Exprimer $\vec{v}_c(r)$ en fonction de r , $\frac{d\phi}{dr}$ et \hat{u}_θ .

Du point de vue dynamique, on peut *a priori* considérer que notre galaxie, la voie lactée de masse visible M_g , est un système dont la masse est répartie de façon sphérique et constitué de trois composantes principales : un bulbe massif, un disque et un halo stellaire. Dans ce modèle, dit keplerien, le bulbe est assimilable à un point de masse $M_b \approx M_g$ et chaque étoile de masse m du disque évolue dans le potentiel gravitationnel $\phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$ créé par le bulbe uniquement.

□ 14 — Déterminer, dans ce modèle, l'expression de la vitesse circulaire dans la voie lactée en fonction de G , M_b , r et \hat{u}_θ . Pourquoi ce modèle est-il qualifié de keplerien ?



En réalité, la répartition des vitesses circulaires présente la même allure dans toutes les galaxies spirales comme la Voie Lactée. Les observations dans le cas de la Voie Lactée sont reportées sur la figure 3.

□ 15 — Que peut-on dire de l'évolution de $v_c = \|\vec{v}_c\|$ en dehors du bulbe ? Le modèle keplerien est-il valable ?

En plus de la matière visible, on considère une répartition de masse invisible (noire) selon la densité volumique de masse suivante :

$$\rho(r) = \frac{C_0}{r_0^2 + r^2}$$

FIG. 3 – Vitesse circulaire dans la voie lactée

□ 16 — En utilisant l'équation de Poisson relative à la gravitation (obtenue à la question 11) en symétrie sphérique, montrer que la prise en compte de cette matière noire permet de rendre compte de la courbe de vitesse observée. On fixera la valeur C_0 en unités de masse solaire (M_\odot) et de parsec (pc) pour une bonne adéquation avec la valeur de vitesse observée et on interprétera la constante r_0 . On rappelle que

$$\int_0^r \frac{x^2}{r_0^2 + x^2} dx = r - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

□ 17 — Estimer la masse minimale de ce halo de matière noire en considérant que ce dernier s'étend sur l'ensemble de la galaxie dont le rayon est de l'ordre de $R_d = 30$ kpc. Commenter ce résultat sachant que la masse visible de notre galaxie est de l'ordre de $10^{10} M_\odot$.

II.B. — Gravitation modifiée

Face à la situation décrite dans la section II.A, M. MILGROM propose, en 1983, de modifier les lois de Newton de la gravitation afin d'expliquer pourquoi, en périphérie des galaxies, les étoiles tournent plus vite que la loi classique ne le laisse supposer. Dans cette théorie phénoménologique, baptisée MOND (acronyme anglais de dynamique newtonienne modifiée), la gravitation se mettrait à décroître beaucoup moins rapidement que prévu par la théorie newtonienne dans le régime des faibles accélérations en deçà d'un certain seuil que l'on se propose d'évaluer.

Dans cette théorie de la gravitation modifiée le potentiel de gravitation vérifie une équation de Poisson modifiée qui s'écrit

$$\operatorname{div}\left(\mu(u) \vec{\operatorname{grad}}\phi_m\right) = 4\pi G\rho \quad (2)$$

où μ est un champ scalaire de la variable réduite sans dimension $u = \frac{1}{a_0^2} (\vec{\operatorname{grad}}\phi_m)^2$ caractérisant la théorie et dont le comportement est le suivant

$$\mu(u) \simeq \begin{cases} \sqrt{u} & \text{si } u \ll 1 \\ K & \text{sinon} \end{cases}$$

□ 18 — Quelle est la dimension du paramètre positif a_0 ? Quelle valeur doit-on donner à la constante K si l'on souhaite que la théorie MOND soit équivalente à la gravitation newtonienne si u n'est pas négligeable devant 1.

□ 19 — En combinant l'expression (2) avec l'équation de Poisson de la question 11 relative à la gravitation non modifiée et au potentiel newtonien ϕ , montrer qu'il existe un vecteur \vec{h} tel que $\mu(u) \vec{\operatorname{grad}}\phi_m = \vec{\operatorname{grad}}\phi + \vec{r}\vec{h}$. On fera par la suite l'hypothèse que $\vec{r}\vec{h}$ est toujours négligeable devant le gradient du potentiel newtonien ϕ .

Pour modéliser notre galaxie avec la théorie MOND il n'est plus nécessaire d'introduire de la matière noire, on prend donc simplement $\phi(r) = -\frac{GM_b}{r}$. Pour cette modélisation on suppose également que $\phi_m = \phi_m(r)$ et l'on admettra que la vitesse circulaire est toujours donnée par la relation obtenue à la question 13 généralisée à ϕ_m .

□ 20 — Montrer que dans le régime $u \ll 1$, la vitesse circulaire prévue par la théorie MOND pour notre galaxie est donnée par la relation $v_c \simeq (GM_b a_0)^{1/n}$ où l'on déterminera l'entier n .

□ 21 — Estimer la valeur numérique de a_0 afin que la théorie MOND permette de rendre compte de la vitesse circulaire observée dans notre galaxie. Commenter ce résultat en évaluant un ordre de grandeur de l'accélération subie par le Soleil dans la voie lactée (voir Fig. 3).

Même si MOND possède de nombreux avantages sur la gravitation de NEWTON à l'échelle galactique, la théorie relativiste associée, TEVES proposée en 2004 par J. BEKENSTEIN, pose de graves problèmes.

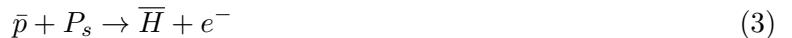
FIN DE LA PARTIE II

III. — Expérience GBAR – Peser l'antimatière ?

Plusieurs tentatives de tests directs du principe d'équivalence pour l'antimatière ont été menées sans succès. Des mesures de chute libre avec de l'antimatière chargée ont été envisagées, mais l'appareillage visant à réduire les effets parasites du champ électromagnétique par blindage n'a pu atteindre un niveau suffisant. La mesure de chute libre d'antimatière ne peut donc se faire qu'avec de l'antimatière neutre. Il est cependant très difficile de produire efficacement des antineutrons lents ou encore de mener des expériences de chute libre avec un positronium P_s (état lié neutre composé d'un électron e^- et de son antiparticule, le positon e^+). L'idée est donc venue d'utiliser l'atome d'antihydrogène \bar{H} , association d'un positon e^+ avec un antiproton \bar{p} .

L'expérience GBAR (acronyme de Gravitationnel Behaviour of Antihydrogen at Rest) a pour objectif la mesure de l'accélération (notée \bar{g}) d'un atome d'antihydrogène \bar{H} en chute libre dans le champ gravitationnel de la Terre. Pour étudier sa chute avec un appareillage de taille raisonnable, l'antihydrogène \bar{H} doit être produit à très basse vitesse. Cette expérience représente un vrai défi !

On produit tout d'abord des positons rapides à partir d'un faisceau pulsé d'électrons de plusieurs MeV dirigé sur une cible de Tungstène. Les positons sont ensuite ralentis et stockés dans un piège dit de PENNING-MALMBERG sous forme de plasma non neutre. Une fois la quantité stockée suffisante, les positons sont injectés dans un convertisseur pour y subir les transformations décrites par les équations ci-dessous :



Les ions \bar{H}^+ sont composés d'un antiproton \bar{p} et de deux positons e^+ . Le fait qu'ils soient chargés permet de les stocker dans un piège de PAUL en vue de leur refroidissement jusqu'à une température de quelques dizaines de μK .

Une fois refroidis, ils sont injectés dans une enceinte à vide dans laquelle un laser peut assurer le photodétachement du positon excédentaire, produisant ainsi des atomes d'antihydrogène. Ultra-froids, ces derniers tombent alors dans le champ de pesanteur terrestre sur une hauteur de l'ordre de quelques dizaines de centimètres.

Autour de cette enceinte, des TPC (chambres à projection temporelle) et des scintillateurs assurent une détection efficace des particules issues de l'annihilation de l'antihydrogène \bar{H} à la fin de sa chute, quelle qu'en soit la direction. Si l'antimatière ne gravite pas exactement comme la matière (sens, durée de chute, etc.), l'expérience devrait pouvoir le détecter !

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier de façon simplifiée les techniques de stockage des particules chargées, développées dans le projet GBAR et d'étudier la calibration de la mesure.

III.A. — Piéger une particule

L'objectif est de piéger une particule chargée en vue de la refroidir et la garder ainsi stockée le plus longtemps possible. L'idée la plus simple consiste à piéger cette particule dans un puits de potentiel. Le dispositif de piégeage est représenté sur la figure 4, il compte trois électrodes présentant une symétrie de révolution autour d'un axe (Oz). La première, notée \mathcal{E}_0 , est en forme d'anneau de rayon interne r_0 et d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = r_0^2$, elle est portée à un potentiel V_0 positif. Les deux autres, notées \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , sont en forme de coupelles et correspondent aux deux nappes de l'hyperbolôde d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2$, elles sont reliées à la masse. La distance minimale entre les deux coupelles est telle que $2z_0 = \sqrt{2}r_0$.

On note $V(x, y, z)$ le potentiel régnant dans le piège initialement vide de charge. Ce potentiel est donc tel que $V(0, 0, z_0) = 0$ d'une part et d'autre part si $x^2 + y^2 = r_0^2$ alors $V(x, y, 0) = V_0$.

On admet qu'une particule de charge q placée dans le piège est soumise à une force conservative de la forme $\vec{F} = a(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y) + bz\hat{u}_z$ où a et b sont deux paramètres réels.

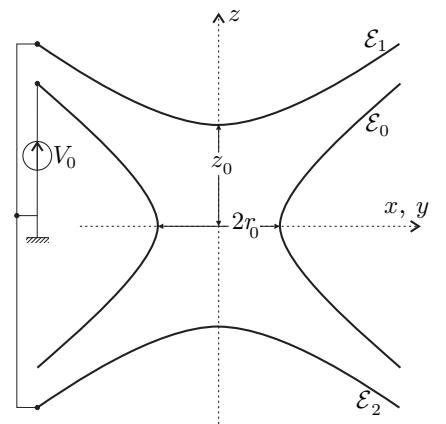


FIG. 4 – Vue en coupe du piège

□ 22 — En écrivant l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel $V(x, y, z)$ obtenir une relation entre a et b . Montrer que le potentiel s'écrit sous la forme $V(x, y, z) = \alpha + \beta(x^2 + y^2 - 2z^2)$, puis, exprimer α en fonction de V_0 et β en fonction de r_0 et V_0 .

□ 23 — Tracer les équipotentialles dans les plans xOz et xOy , en déduire les lignes de champ orientées dans ces mêmes plans.

□ 24 — En écrivant le principe fondamental de la dynamique montrer que le point $O(0, 0, 0)$ est un équilibre. Montrer que cet équilibre est globalement instable quel que soit le signe de la charge placée dans ce potentiel.

III.B. — La trappe de PENNING

Afin d'éliminer l'instabilité démontrée à la question 24, une première solution est d'ajouter un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{u}_z$ avec $B_0 = 1,0$ T autour du dispositif électrostatique. Le piège devient ainsi « une trappe de PENNING », le mérite de sa mise en œuvre concrète est du à H. G. DEHMELT qui reçut le prix NOBEL de physique en 1989 pour cette réalisation, l'idée originale, de F. M. PENNING, datant de 1936.

□ 25 — La particule piégée dans la trappe de PENNING est un antiproton \bar{p} de masse m_p et de charge $q = -e$. Etablir les équations différentielles vérifiées par les fonctions $z(t)$ et $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$. On introduira les constantes $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{m_p r_0^2}}$. Montrer qu'il existe un champ B_{\min} , tel que l'ajout d'un champ $B_0 \geq B_{\min}$ conduit au confinement de l'antiproton. Calculer la valeur de B_{\min} pour un piège tel que $V_0 = 5,0$ V et $r_0 = 5,7$ mm.

□ 26 — Calculer la valeur numérique de ω_0 et ω_c pour la trappe de PENNING considérée. En déduire que le mouvement confiné de l'antiproton dans cette trappe est la composition d'un mouvement rapide et de deux mouvements plus lents. On donnera une estimation simple des pulsations de ces trois mouvements en fonction de ω_0 et ω_c .

Dans l'expérience GBAR, la trappe de PENNING permet de confiner les antiprotons, dont l'énergie cinétique d'entrée est estimée à 5 MeV. Pour les applications suivantes il est nécessaire de les refroidir jusqu'à une énergie de l'ordre de 150 eV. On se pose donc la question de savoir si le mouvement oscillant des antiprotons dans la trappe permet ce refroidissement.

On admet que le mouvement oscillant de l'antiproton est la source d'un rayonnement qui va contribuer à diminuer son énergie mécanique. La source principale de ce rayonnement est assurée par l'accélération selon l'axe Oz . La puissance moyenne $\langle P_{ray} \rangle_{T_0}$ rayonnée par l'antiproton sur une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{2}}$ caractéristique de son mouvement sinusoïdal paramétré par $z(t)$ est donnée par la relation

$$\langle P_{ray} \rangle_{T_0} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \langle \ddot{z}^2 \rangle_{T_0}$$

□ 27 — Déterminer l'ordre de grandeur de la température absolue des antiprotons à l'entrée de la trappe. Montrer que le rayonnement qu'il émet conduit à une décroissance exponentielle de l'énergie mécanique de l'antiproton caractérisée par une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de m_p , μ_0 , e , c et ω_0 . En déduire la nécessité de recourir à une méthode de refroidissement complémentaire. Cette méthode non étudiée ici est une thermalisation par chocs élastiques sur un nuage d'électrons confinés dans la trappe.

III.C. — Principe de la mesure

La mesure du temps de chute t_c est donnée par la différence de temps entre la détection de l'annihilation de l'antiatome \bar{H} et celui du tir du laser de photo-détachement. On note v_0 la composante de la vitesse initiale suivant la direction de la force gravitationnelle exercée par la Terre (matière) sur l'antihydrogène (antimatière). La masse de \bar{H} sera prise égale à celle de \bar{p} , c'est-à-dire m_p .

□ 28 — Le processus de refroidissement incorporé dans la trappe de PENNING permet de porter le gaz d'ions \bar{H}^+ piégés à la température $T = 10 \mu\text{K}$. En supposant ce gaz parfait et en négligeant les impulsions apportées par le photon lors de l'impact et par le positon émis, prévoir la vitesse initiale moyenne \bar{v}_0 d'un antihydrogène produit par photo-détachement et estimer son écart-type σ_v . On exprimera σ_v en fonction de k_B , m_p et T puis on calculera sa valeur numérique.

□ 29 — En admettant l'égalité des masses inerte et grave compte-tenu des résultats obtenus en partie I, exprimer l'intensité de pesanteur \bar{g} supposée uniforme ressentie par un antihydrogène quittant le piège avec une vitesse verticale de module v_0 . On exprimera le résultat en fonction de la hauteur de chute h , du temps de chute t_c et de v_0 en espérant que l'antihydrogène va antigraviter !

□ 30 — Un antiatome « tombe » sans vitesse initiale sur une paroi située à 10,0 cm où l'on détecte son annihilation 0,143 s après son photo-détachement. Déterminer la valeur de \bar{g} correspondant à cette mesure.

□ 31 — On détecte un grand nombre N d'antihydrogène s'annihilant sur la paroi. On note σ_h l'incertitude sur la position initiale d'un antiatome et σ_v l'incertitude sur sa vitesse initiale dans la direction de chute déterminées précédemment. Les incertitudes sur le temps de chute libre et sur la position de détection sont négligées. En considérant que les positions et les vitesses initiales sont indépendantes et distribuées selon des lois gaussiennes, estimer l'incertitude $\delta\bar{g}$ sur la mesure de \bar{g} en fonction de t_c , N , σ_h , k_B , T et m_p .

□ 32 — On donne $T = 10 \mu\text{K}$ et $\sigma_h = 100 \mu\text{m}$. À partir de quelle valeur de N l'erreur relative sur la mesure de \bar{g} est-elle inférieure à 1% ?

Tester la gravité pour l'antimatière est un véritable enjeu pour la physique fondamentale. Outre la remise en cause du principe d'équivalence et des symétries fondamentales dans l'Univers, cette expérience de pesée de l'antihydrogène, prévue pour 2016, devrait permettre de répondre à la question de l'existence ou non de l'antigravité, pouvant expliquer l'absence d'antimatière visible dans l'Univers.

FIN DE LA PARTIE III

FIN DE L'ÉPREUVE

Formulaire et données numériques relatives à l'ensemble de l'épreuve

- Constante de gravitation universelle :

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$
- Constante de Boltzmann :

$$k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$
- Vitesse de la lumière :

$$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
- Nombre d'Avogadro :

$$N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$
- Charge élémentaire :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$
- Masse d'un proton :

$$m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$
- Masse d'un électron :

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
- Perméabilité magnétique du vide :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$
- Unités de distance :

$$1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} ; 1 \text{ pc} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}$$
- Masse du Soleil :

$$M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$
- Masse de la Terre :

$$M_t = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$
- Rayon de la Terre :

$$R_t = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$$

- Opérateurs scalaires et vectoriels :
 - ◊ $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}f) = \vec{0}$
 - ◊ $\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = 0$
 - ◊ $\text{div}(\vec{\text{grad}}f) = \Delta f$
- Laplacien scalaire
 - ◊ en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
 - ◊ en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \Delta f = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$



École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Sujet mis à la disposition des concours :

Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Détection des exoplanètes

L'exploration de planètes lointaines a fourni à la littérature et au cinéma de science-fiction des œuvres parmi les plus célèbres ; citons *La planète des singes* (Pierre Boulle, 1963), *Avatar* (James Cameron, 2009)... L'existence de ces planètes extra-solaires est longtemps restée incertaine jusqu'à une première découverte en 1995 ; la millième « exoplanète » a été confirmée en octobre 2013 ; un an plus tard ce nombre a doublé. Ce problème aborde le délicat enjeu de leur détection. Toutes les orbites envisagées dans ce problème sont circulaires. Les données utiles pour les applications numériques sont rassemblées en fin d'épreuve.

I. — Fascinantes exoplanètes

I.A. — Une loi fondamentale

Dans un document concernant les méthodes de détection des exoplanètes, on lit : « *le mouvement relatif de la planète autour de son étoile est gouverné par la 3^e loi de Kepler, ou si l'on préfère par la relation qui exprime l'équilibre entre l'attraction gravitationnelle et la force centrifuge* ».

On considère une planète assimilée à un point matériel P de masse M_P , tournant avec la période T_P à la distance r_P de son étoile considérée comme le point fixe E de masse $M_E \gg M_P$. Toute autre action sur P que l'attraction gravitationnelle de E est négligée.

1 — Schématiser cette description et préciser les deux référentiels permettant de comprendre l'utilisation de la notion d'« équilibre » dans la citation ci-dessus. En déduire la 3^e loi de Kepler reliant r_P , M_E , T_P et la constante de la gravitation \mathcal{G} .

Cette relation est transposable chaque fois qu'un petit corps de masse m orbite autour d'un astre de masse très supérieure, toute autre action étant négligée et la durée mise en jeu permettant l'approximation galiléenne.

I.B. — Principales caractéristiques de la planète

On envisage un vaisseau d'exploration spatiale \mathcal{E} de masse m , s'approchant d'une planète P d'apparence parfaitement sphérique, de rayon R_P , dont la période sidérale de rotation sur elle-même est $t_P = 19\text{ h }30\text{ min}$ (les unités sont celles en vigueur sur Terre). Il commence par se mettre en orbite équatoriale basse, d'altitude h ; la période de cette orbite dans le référentiel planétocentrique est de 2,00 h. Tout en sondant l'atmosphère et en observant la surface, les « astronautes » (sans préjuger de leur nationalité !) se livrent à quelques calculs.

2 — Calculer la masse M_P si $R_P = 5000\text{ km}$, $h = 100\text{ km}$; peut-on envisager pour cette planète une structure comparable à celle de la Terre : croûte et manteaux rocheux entourant un noyau métallique de densité de l'ordre de 10 et de rayon correspondant à environ 50% du rayon terrestre ? Des arguments *quantitatifs* sont attendus.

3 — Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation dans le cas d'une distribution de masse à symétrie sphérique. Sous cette hypothèse, calculer la valeur numérique du champ gravitationnel à la surface de cette planète.

4 — Rappeler succinctement l'origine de la différence entre champ gravitationnel et accélération de la pesanteur à la surface d'un astre. Calculer les valeurs de l'accélération de la pesanteur aux pôles et à l'équateur de la planète ; cet écart serait-il mesurable avec un dispositif d'étude utilisé au lycée : enregistrement vidéo d'une chute libre puis traitement informatique ? Quels autres dispositifs pourrait-on proposer ?

□ 5 — Un corps quittant radialement la surface de la planète (ou son voisinage immédiat) avec une vitesse suffisante peut s'éloigner indéfiniment de l'astre : la vitesse minimale qui le permet, en négligeant toute autre action sur le corps que l'attraction gravitationnelle de la planète, est appelée vitesse de libération. En utilisant un raisonnement basé sur l'énergie, déterminer l'expression de la vitesse de libération de la planète P , en fonction de \mathcal{G} , M_P , et R_P . Faire l'application numérique.

La figure 1 donne la densité de probabilité du module de la vitesse dans certains gaz parfaits différenciés par leurs masses molaires et en équilibre thermodynamique à 290 K. L'abscisse du maximum est la vitesse la plus probable v_{pp} , elle représente environ 80% de la vitesse quadratique moyenne définie par $\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

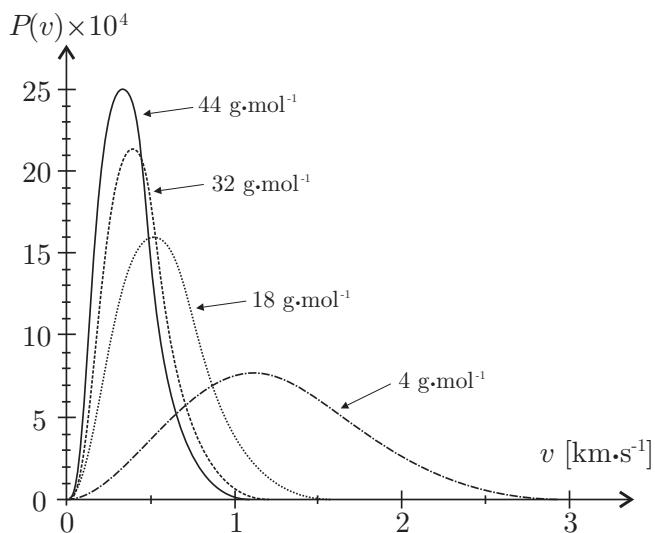


FIGURE 1 – Distribution des vitesses

éventuellement présent, à $T = 290$ K et vérifier la cohérence avec les informations fournies sur la figure 1.

I.C. — Détection d'une exoplanète depuis la Terre

Les voyages interstellaires étant aujourd'hui hors de notre portée, il faut se contenter de ce qu'on peut apprendre depuis la Terre et les télescopes spatiaux.

A partir d'observations effectuées à l'Observatoire de Haute-Provence (OHP), les astronomes Michel Mayor et Didier Queloz, de l'observatoire de Genève, ont pour la première fois formellement identifié en 1995 une planète extra-solaire ; elle orbite autour de l'étoile 51-Pégase, à 42 années-lumière de la Terre. Depuis, les possibilités techniques ont permis de multiplier les découvertes, et aussi d'acquérir de plus en plus d'informations sur ces astres. On s'intéresse particulièrement à leur température et à la composition de leur atmosphère.

Le télescope de l'OHP qui a permis la découverte offre un diamètre d'objectif $d = 193$ cm. Il est situé dans un site d'observation de grande qualité. En supposant qu'il ne soit limité que par la diffraction, on pourrait en obtenir un pouvoir séparateur angulaire de l'ordre de $\frac{1.2\lambda}{d}$ (rad), λ désignant la longueur d'onde observée. On rappelle que le pouvoir séparateur mesure le plus petit angle séparant les rayons venant de deux points-sources que l'on parvient à voir comme distincts l'un de l'autre.

□ 8 — Dans l'idéal, une observation depuis le voisinage de 51-Pégase avec le télescope de l'OHP permettrait-elle de séparer Jupiter du Soleil ? En dehors de la limite du pouvoir séparateur, quel(s) autre(s) obstacle(s) s'oppose(nt) à l'observation visuelle directe d'une exoplanète ?

□ 6 — Les gaz de l'atmosphère de la planète P étant assimilés à des gaz parfaits en équilibre thermique à une température T_0 proche de 290 K, utiliser les courbes fournies pour discuter l'éventualité que cette planète retienne une atmosphère contenant plus ou moins les mêmes espèces que celle de la Terre.

Les molécules de l'atmosphère étant soumises à l'agitation thermique, leur énergie cinétique se décompose selon trois degrés de liberté indépendants : $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$.

□ 7 — Déterminer l'expression théorique de la vitesse quadratique moyenne des molécules dans un gaz de masse molaire M à la température T . Faire le calcul pour le dioxygène

Les exoplanètes sont en fait détectées indirectement, par exemple par les variations de luminosité induites lorsqu'elles passent devant ou derrière l'étoile (méthode du transit), ou par les petits mouvements que leur attraction imprime à l'étoile autour de laquelle elles orbitent. Nous allons nous intéresser à cette méthode, dite de la vitesse radiale.

On utilise pour cela l'effet Doppler affectant les ondes électromagnétiques : si l'émetteur E est animé d'une vitesse radiale d'intensité v_r par rapport à l'observateur O , et si la fréquence émise est f , la fréquence reçue en O est $f + \Delta f$. Ce décalage Δf est positif si l'émetteur et l'observateur se rapprochent l'un de l'autre ($v_r < 0$) et négatif dans le cas contraire ($v_r > 0$). Si $|v_r| \ll c$, hypothèse supposée valide ici, on montre alors que $\frac{|\Delta f|}{f} = \frac{|v_r|}{c}$.

On considère que l'émetteur est une étoile E accompagnée d'une planète P et que toutes les deux tournent autour de leur barycentre G avec la même période T . La Terre est en O dans le plan de l'orbite. Le système observé s'éloigne globalement de la Terre à la vitesse radiale \vec{v}_G .

L'ensemble est représenté sur la figure 2, vu de dessus. Dans la réalité $OG \gg GP \gg GE$, de sorte que les mouvements de E sont très difficiles à observer directement. On reconnaît la vitesse radiale \vec{v}_G de G par rapport à $Oxyz$, et on désigne par \vec{v} la vitesse de E par rapport à $Gxyz$ (les directions fixes xyz ne sont pas précisées). On supposera de plus que $v_G = \|\vec{v}_G\| > v = \|\vec{v}\|$.

9 — Exprimer l'intensité v_r de la vitesse radiale de E par rapport à O , en fonction de v_G , v et θ , puis l'amplitude de la variation du décalage en fréquence par effet Doppler $\delta f = \frac{1}{2} (|\Delta f|_{\max} - |\Delta f|_{\min})$.

10 — Expliquer comment le suivi temporel du décalage en fréquence de la lumière émise par une telle étoile permet de connaître la période T . Pourquoi cette méthode a-t-elle permis la découverte initiale de planètes proches de leur étoile ? Déterminer l'expression du rayon GE de l'orbite de l'étoile autour de G , en fonction de f , δf , c et T .

Nos connaissances sur la structure et le fonctionnement des étoiles permettent de déduire leur masse de leur luminosité. La masse M_E est par conséquent raisonnablement connue.

11 — En tenant compte du fait que $M_E \gg M_P$, déterminer des expressions approchées de M_P et PE en fonction de \mathcal{G} , T , M_E et GE .

12 — Pour avoir une idée de la précision requise dans les mesures, reprenons l'exemple du couple Soleil-Jupiter, cette planète étant la plus massive de notre système. Calculer la valeur de $\delta f/f$ qu'un astronome extraterrestre devrait être capable de mesurer pour mettre en œuvre la méthode étudiée.

Cette approche d'un problème expérimental nous a montré l'extrême difficulté de certaines mesures, pour lesquelles le signal utile, ici la variation de la fréquence, est d'une part très faible et d'autre part facilement masqué par les incertitudes induites par les fluctuations diverses du signal émis, par les perturbations qu'il subit lors de sa propagation, par des signaux parasites qui s'y ajoutent, par sa transformation en signal électrique, par la transmission ensuite de ce signal électrique dans une chaîne de traitement...

Dans les prochaines parties, nous allons nous intéresser à quelques aspects liés à ces questions

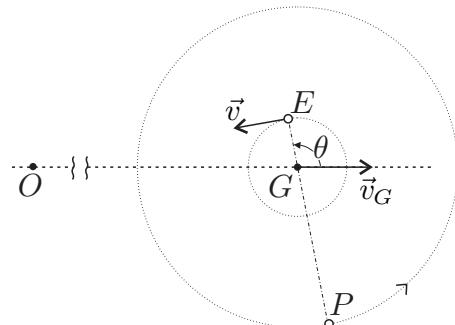


FIGURE 2 – Etoile-Planète

FIN DE LA PARTIE I

II. — Détection d'un signal faible

II.A. — Extraction d'un signal faible du bruit par effet de moyenne

Un détecteur enregistre un spectre en le décomposant sur plusieurs canaux numérotés de 1 à N . Chacun de ces canaux représente une bande de fréquence très étroite.

Lors d'une séquence d'acquisition, le détecteur enregistre une série de valeurs $x_k = s_k + b_k$ pour k variant de 1 à N . L'éventuel signal s_k est celui dont la détection est souhaitée. Le signal b_k est un parasite appelé bruit ; différents phénomènes physiques sont à l'origine du bruit, à commencer par l'agitation thermique des porteurs de charges.

Le bruit considéré, b_k , prend une valeur aléatoire de moyenne b indépendante de k . La dispersion autour cette moyenne est supposée gaussienne d'écart-type σ ; c'est-à-dire que pour un grand nombre n d'acquisitions indépendantes dont les résultats sont ajoutés canal par canal, la valeur moyenne du signal sommé sera nb et l'ordre de grandeur de la dispersion de chaque côté de cette valeur moyenne sera $\sqrt{n}\sigma$.

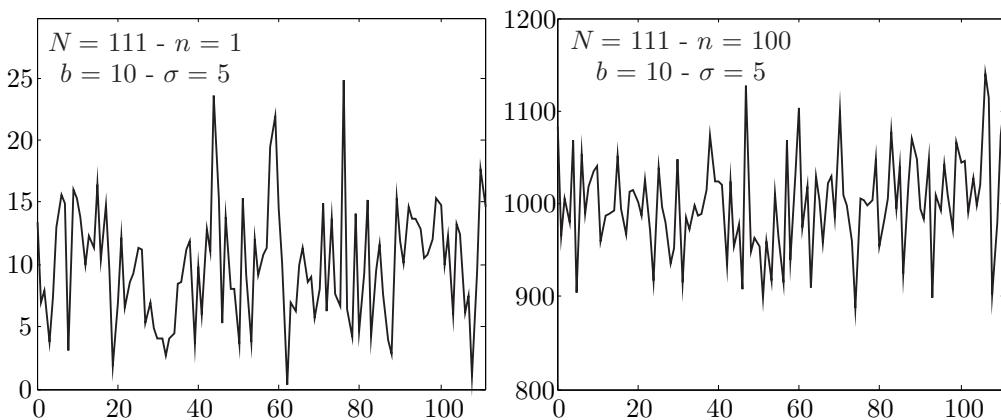


FIGURE 3 – Acquisition d'un bruit ($s_k = 0$ pour tout k) sur $N = 111$ canaux avec $b = 10$ et $\sigma = 5$. La figure de gauche représente 1 acquisition, celle de droite la somme canal par canal de 100 acquisitions indépendantes.

- 13 — Représenter l'allure du graphe que l'on pourrait obtenir après 2500 acquisitions, l'axe des ordonnées étant clairement gradué dans sa partie utile.

On considère maintenant qu'en plus du bruit gaussien d'amplitude $b = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$ présent constamment sur chaque canal, un signal utile non nul, constant et d'amplitude 1 est présent uniquement sur les canaux 34 et 67 à chaque acquisition.

- 14 — Le signal utile est-il détectable par une seule acquisition ? Représenter l'allure de la somme canal par canal de 2500 acquisitions. Le signal est-il devenu détectable ?

- 15 — Dans le cadre d'un bruit de dispersion σ et d'amplitude b , estimer le nombre n d'acquisitions permettant de faire apparaître un signal constant d'amplitude s_p dans le canal p .

L'expression obtenue montre qu'une réduction du bruit permet de diminuer de façon importante les durées d'intégration nécessaires. Dans le cas du bruit thermique, dont l'amplitude est proportionnel à la température absolue, il importe donc de refroidir fortement le système.

II.B. — Refroidissement d'un capteur à bord d'un satellite

Dans le vide interplanétaire, un satellite d'observation astrophysique reçoit le rayonnement solaire et se refroidit également par rayonnement. Son électronique de commande doit travailler autour de 300 K, tandis que des capteurs doivent être refroidis à quelques Kelvins voire une fraction de Kelvin. La configuration du satellite, la mise en place d'isolants ou de radiateurs, son positionnement par rapport au rayonnement, permettent de contrôler grossièrement la température de ses différentes parties, ce qui limite l'utilisation énergivore de systèmes de chauffage ou de refroidissement.

L'étude et les calculs que nous allons mener sont basés sur les informations disponibles pour le satellite PLANCK, qui de 2009 à début 2012 a cartographié les infimes fluctuations du rayonnement de fond cosmologique, dans le domaine des micro-ondes.

Des systèmes d'écrans et de radiateurs passifs permettent d'abaisser la température, du côté des instruments, à une température T de l'ordre de 50 K ; il convient alors de refroidir les capteurs à une température beaucoup plus basse pour augmenter leur sensibilité.

Envisageons tout d'abord des systèmes frigorifique de type réfrigérateur ditherme fonctionnant de manière cyclique entre deux températures T_c et $T_f < T_c$ grâce à un travail reçu W .

□ 16 — Définir le fonctionnement d'un réfrigérateur ditherme à l'aide d'un cycle modélisé. Analyser ce cycle à partir des principes de la thermodynamique. En déduire l'expression de l'efficacité maximale théorique d'un tel réfrigérateur.

A bord du satellite PLANCK, un premier réfrigérateur, d'une puissance frigorifique de 1 W, travaille entre 50 K et 20 K, puis un deuxième, d'une puissance frigorifique de 15 mW, abaisse la température de certains équipements à 4 K.

□ 17 — Calculer la puissance électrique minimale consommée par chacun de ces appareils.

□ 18 — Dans une note descriptive sur le satellite PLANCK on peut lire « *Les puissances cryogéniques peuvent sembler faibles au premier abord. L'objectif de ces réfrigérateurs est en fait ambitieux : le réfrigérateur qui équipe notre cuisine doit évacuer seulement 7% environ de l'énergie thermique de son contenu. Ici l'étage à 20 K doit évacuer 60% de l'énergie thermique initiale, et 80% de cette énergie pour l'étage à 4 K* ». Vérifier par le calcul les valeurs annoncées.

Un autre moyen pour maintenir la température d'un instrument à quelques Kelvins est d'utiliser un cryostat à circulation d'hélium liquide, en circuit ouvert : l'hélium se vaporise progressivement et s'échappe dans l'espace. Pour abaisser encore la température, on utilise même la dilution de ^3He dans ^4He ; le principe est le même (évaporation en circuit ouvert) et cela permet de travailler autour de 0,1 K.

□ 19 — Rappeler l'allure générale de la courbe d'équilibre entre liquide et gaz, en coordonnées (T, P). Pourquoi l'hélium circulant dans un serpentin en contact avec un instrument se vaporise-t-il ? Comment peut-on obtenir une température contrôlée d'un mélange liquide-gaz ? Quel appareillage supplémentaire serait-il nécessaire de prévoir si l'hélium liquide circulait en circuit fermé ?

FIN DE LA PARTIE II

III. — Transmission d'un signal bruité

Précisons tout d'abord quelques notations :

- Si P est une puissance, on notera $P^{\text{db}} = 10 \log_{10} P$ sa valeur en décibels ;
- Si P désigne la puissance d'un signal et P_B la puissance du bruit B , on notera \mathcal{R}^{db} le rapport signal sur bruit exprimé en décibels, soit $\mathcal{R}^{\text{db}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_B} \right)$;
- Lorsqu'un signal traverse un équipement, on note respectivement P_E et P_S les puissances d'entrée et de sortie, et γ le gain défini par $\gamma = \frac{P_S}{P_E}$.

III.A. — Atténuation de \mathcal{R} par un câble de transmission

On considère la propagation d'un signal dans une ligne assimilée à un axe (O, \hat{u}_x) ; la puissance de ce signal à l'abscisse x est notée $P(x)$.

20 — Construire un modèle usuel dans lequel la puissance absorbée par la ligne de transmission dans un élément de longueur dx est localement proportionnelle au produit $P(x)dx$. En déduire qu'après une longueur ℓ entre l'entrée E et la sortie S de la ligne, on a $P_S^{\text{db}} = P_E^{\text{db}} - \lambda$, où le facteur d'atténuation λ s'exprime en fonction des caractéristiques d'absorption et de ℓ .

On introduit dans ce modèle un bruit d'origine thermique de puissance moyenne P_B , présent sur toute la ligne.

21 — Établir dans ce cas la relation entre λ , $\mathcal{R}_E^{\text{db}}$ et $\mathcal{R}_S^{\text{db}}$. A quelle condition le signal de sortie sera-t-il utilisable ? Que devra-t-on faire pour transmettre des signaux à grande distance avec des lignes de caractéristiques imposées ?

III.B. — Transmission du bruit par une chaîne d'équipements

On s'intéresse maintenant à un signal traité par une suite d'appareils en cascade : amplificateurs, filtres, etc. Afin de prendre en compte l'action de ces instruments sur le bruit, par analogie avec le phénomène d'atténuation, on définit le facteur de bruit F d'un instrument par la relation $F = \mathcal{R}_E^{\text{db}} - \mathcal{R}_S^{\text{db}}$. On supposera que F est positif.

22 — Montrer que pour un instrument donné, de facteur de bruit F et de gain γ , recevant en entrée un signal bruité par B_E , on a $P_{B_S} = f\gamma P_{B_E}$. On vérifiera que $f > 1$ et on exprimera f en fonction de F .

Les instruments sont maintenant en série (ou cascade). L'instrument k est caractérisé par un couple (γ_k, f_k) . La puissance du bruit entrant dans chaque instrument est supposée indépendante de ces instruments, elle sera noté P_{B_E} . La chaîne est supposée linéaire, c'est-à-dire qu'en notant P_{S_k} la puissance en sortie de l'instrument k on aura $P_{S_k} = \gamma_k(P_{S_{k-1}} - P_{B_E}) + P_{B_{S_k}}$ pour tout entier $k \geq 2$. La chaîne est dite auto-alimentée, cela signifie que $P_{S_1} = P_{B_{S_1}}$. On peut donc schématiser la chaîne de traitement par la figure 4.

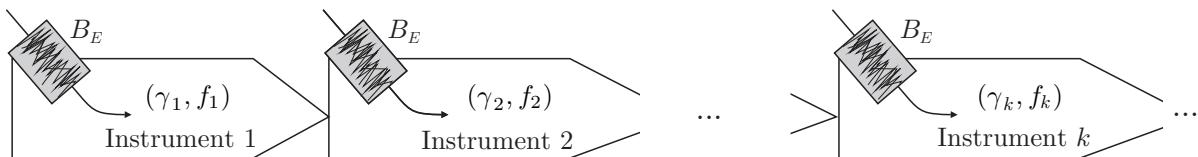


FIGURE 4 – Modélisation d'une chaîne de traitement bruitée

□ **23** — Déterminer l'expression de P_{S_2} . On pose $\gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2$, déterminer l'expression de f_{12} qui permettrait de caractériser l'ensemble des deux premiers instruments par un couple (γ_{12}, f_{12}) dans une chaîne auto-alimentée équivalente.

□ **24** — On pose $\gamma_{13} = \gamma_3\gamma_{12}$, après avoir déterminé f_{13} , démontrer la loi de Friis donnant le facteur de bruit f_{1n} d'un instrument équivalent à l'association en cascade de n instruments. Quel est l'instrument qui va déterminer la qualité de la chaîne dans une association en cascade de n amplificateurs ?

FIN DE LA PARTIE III

IV. — Exemple de bruit thermique élémentaire

Considérons un condensateur idéal de capacité C , chargé sous une tension constante U , en équilibre thermique à la température T avec un circuit électrique. L'agitation thermique provoque des échanges aléatoires de charges entre le condensateur et le circuit, de sorte que la tension instantanée $u(t)$ aux bornes du condensateur peut s'écrire $u(t) = U + b(t)$, où la tension de bruit thermique $b(t)$ est de moyenne nulle.

□ **25** — Déterminer l'expression de l'énergie électrique moyenne $\langle E_C \rangle$ stockée dans le condensateur, en fonction de C , U et $\sigma_b^2 = \langle b^2 \rangle$.

□ **26** — On admet que le bruit thermique généré dans le circuit au niveau du condensateur est associé à un degré de liberté énergétique quadratique. Déterminer l'expression de σ_b en fonction de T , C et k_B . Commenter le sens de variation de σ_b avec C . Commenter la valeur numérique obtenue pour $C = 47 \text{ nF}$ à température ambiante.

FIN DE LA PARTIE IV

Données numériques :

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- Constante de la gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$;
- Pour le Soleil :
 - masse : $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
- Pour la Terre :
 - masse : $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
 - rayon moyen : $R_T = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$;
 - période de révolution : $T_T = 365,24$ jours terrestres ;
 - vitesse de libération à sa surface : $11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Pour Jupiter :
 - masse : $M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$;
 - période de révolution : $T_J = 4335$ jours terrestres ;
 - demi-grand axe de l'orbite : $a_J = 778 \cdot 10^6 \text{ km}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

A2017 – PHYSIQUE II MP



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.**

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La capacité thermique des gaz

La capacité thermique des gaz est une grandeur thermodynamique assez facile à mesurer expérimentalement. Elle a joué un grand rôle dans la compréhension de la nature microscopique des gaz et de la matière en général. Elle a également été un point de questionnement fondamental au moment de la construction de la physique quantique. Dans cette épreuve, on se propose d'expliquer à l'aide de différents modèles théoriques les valeurs mesurées de la capacité thermique de différents gaz parfaits diatomiques à différentes températures.

Hormis le nombre i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{v} pour une vitesse ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{u} tel que $\|\hat{u}\| = 1$.

I. — De la molécule à l'oscillateur harmonique

On considère une molécule diatomique dont les deux atomes A et B sont liés par une liaison covalente : l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est attractive à longue portée et répulsive à courte portée. L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose la molécule isolée et on néglige l'interaction gravitationnelle entre les deux atomes devant l'interaction conduisant à la liaison covalente.

1 — Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle E_p de cette molécule en fonction de la longueur $\ell = AB$ de la liaison. On y fera figurer la longueur d'équilibre ℓ_e de la liaison et l'énergie de liaison E_ℓ .

2 — Donner un ordre de grandeur de ℓ_e en nm et de E_ℓ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3 — Compte tenu de l'allure de la courbe de la question 1, et moyennant une hypothèse à préciser, justifier que l'on peut assimiler la liaison covalente à un ressort dont on exprimera la constante de raideur k en fonction d'une dérivée de E_p .

On suppose cette approximation valide dans toute la suite.

4 — Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction des vitesses \vec{v}_A , \vec{v}_B et des masses m_A , m_B des atomes A et B dans le référentiel du laboratoire.

5 — Calculer un ordre de grandeur de la vitesse caractéristique des molécules dans l'air à 300 K et sous une pression de 1 atm. On prendra $R = \frac{25}{3} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pour valeur de la constante des gaz parfait et $M_a = 30 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour la masse molaire de l'air.

6 — Exprimer l'énergie mécanique E_m de la molécule dans le référentiel du laboratoire, en fonction de E_ℓ , ℓ , ℓ_e , k , \vec{v}_A et \vec{v}_B .

7 — On note G le barycentre de la molécule tel que $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et \vec{v}_G sa vitesse dans le référentiel du laboratoire. On appelle référentiel barycentrique, le référentiel ayant les mêmes vecteurs de base que le référentiel du laboratoire mais d'origine G . Ce référentiel est-il galiléen ? On justifiera sa réponse.

8 — On note $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$, établir la relation $E_m - E_\ell = \frac{1}{2} (m \|\vec{v}_G\|^2 + \mu \|\vec{v}\|^2 + kr^2)$ dans laquelle on exprimera les constantes m et μ en fonction des masses m_A , m_B et la variable r en fonction de ℓ et ℓ_e .

- 9** — En écrivant $\vec{AB} = \ell(t) \hat{e}_r$ avec $\hat{e}_r = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, décomposer E_m en la somme de trois termes que l'on supposera indépendants dans ce problème et qui représentent respectivement la translation E_{tra} , la vibration E_{vib} et la rotation E_{rot} de la molécule. On explicitera chacun de ces termes en fonction des grandeurs les plus adaptées.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Capacité thermique d'un gaz parfait diatomique

On s'intéresse maintenant à un gaz parfait de N molécules diatomiques identiques. On cherche à déterminer l'expression de la capacité thermique de ce gaz en exploitant le modèle développé dans la partie précédente.

- 10** — Exprimer l'énergie interne U de cet ensemble de particules en fonction de N et $\langle E_m \rangle$, où $\langle E_m \rangle$ est l'énergie moyenne d'une molécule de cet ensemble de molécules.

- 11** — Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie.

- 12** — Montrer que dans le modèle classique développé dans la partie I la capacité thermique molaire $c_{V,m}$ du gaz est une constante que l'on exprimera en fonction de R .

La figure 1 présente les relevés expérimentaux de la capacité thermique molaire du dichlore Cl_2 gazeux et du dihydrogène H_2 gazeux à diverses températures.

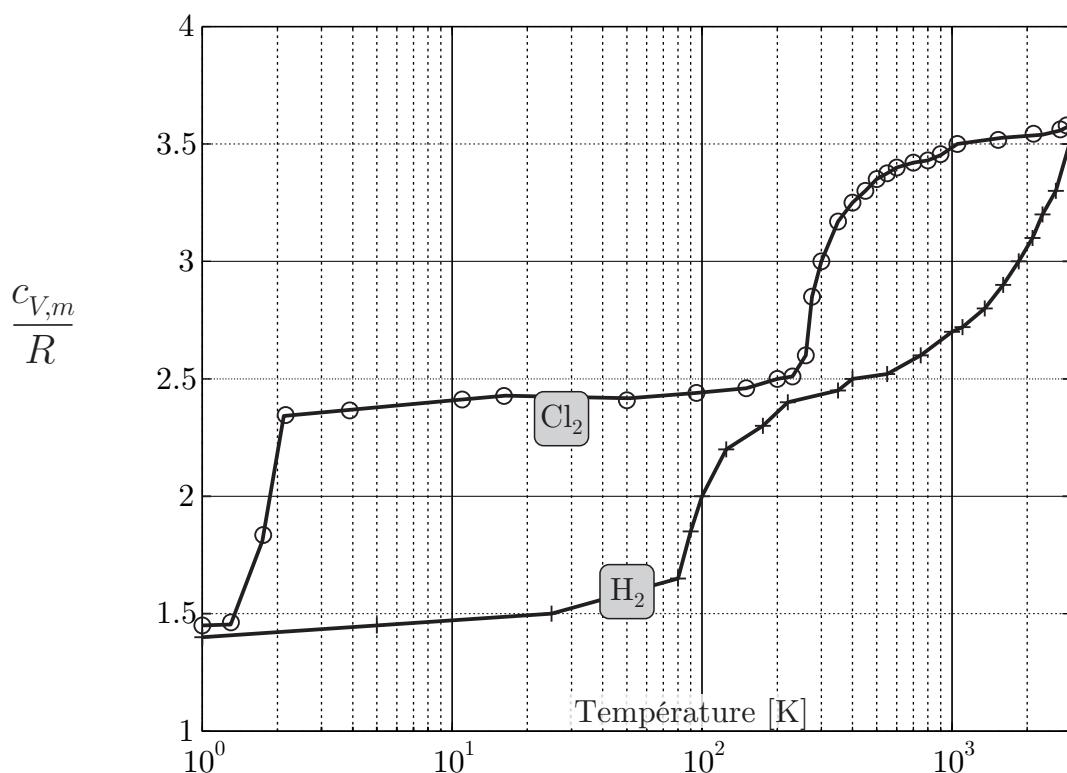


FIGURE 1 – Mesures de la capacité thermique molaire du dichlore (Cl_2) et du dihydrogène (H_2) gazeux en fonction de la température.

- 13** — Commenter les deux courbes de la figure 1 au vu des prédictions théoriques obtenues précédemment.

FIN DE LA PARTIE II

III. — L'oscillateur harmonique en physique quantique

On envisage dans cette partie un traitement quantique de l'oscillateur harmonique étudié dans les parties précédentes. L'objectif est d'obtenir l'expression quantifiée des valeurs possibles de l'énergie de cet oscillateur harmonique dans cette théorie.

On note $\underline{\Psi}(x,t)$ la fonction d'onde du système décrivant l'oscillateur harmonique associé à la molécule diatomique considérée. Ce système est un point matériel M dont la masse est le paramètre μ introduit à la question 8. Ce point évolue le long d'un axe (O,\widehat{u}_x) , la distance $x = OM$ représente l'élongation du ressort de raideur k modélisant la liaison chimique entre les deux atomes à travers le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Il s'agit donc d'un problème unidimensionnel. Le système est de plus stationnaire, on peut donc séparer la fonction d'onde en deux parties sous la forme $\underline{\Psi}(x,t) = f(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ où E représente les valeurs de l'énergie accessibles à ce système. Pour l'oscillateur harmonique, on montre que ces valeurs de E doivent être positives. La fonction $\underline{\Psi}(x,t)$ est une solution de norme unité de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\underline{\Psi}(x,t) = i\hbar \frac{\partial \underline{\Psi}(x,t)}{\partial t}$$

□ 14 — Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(x)$ en fonction des paramètres k , μ , \hbar et E .

On effectue le changement de variable $\alpha = x \left(\frac{\mu k}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ et l'on pose $\gamma = \left(\frac{4\mu E^2}{\hbar^2 k} \right)^{1/2}$.

□ 15 — Quelles sont les dimensions de α et de γ ?

□ 16 — Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(\alpha)$ en fonction du seul paramètre γ .

□ 17 — Vérifier que dans le régime $\alpha \rightarrow \pm\infty$, on peut écrire $f(\alpha) \sim e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2}$

□ 18 — Justifier succinctement que seule la solution $\alpha \mapsto e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$ est physiquement acceptable.

Dès lors que nous connaissons le comportement asymptotique de la solution recherchée, nous pouvons l'extraire de celle-ci en effectuant le changement de fonction $f(\alpha) = g(\alpha)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$

□ 19 — Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha \mapsto g(\alpha)$?

Pour résoudre cette équation, on effectue un développement en série entière de la fonction g :

$$g(\alpha) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \alpha^p$$

□ 20 — Exprimer le coefficient b_{p+2} en fonction du coefficient b_p , de l'entier p et de γ .

Si l'on conserve tous les termes de la série, on montre que le comportement asymptotique de la fonction $\alpha \mapsto g(\alpha)$ l'emporte sur $\exp(-\alpha^2/2)$ en $\pm\infty$ ce qui ne permet pas de construire de solution physiquement acceptable. La seule possibilité est de tronquer la série en imposant l'existence d'un entier n tel que si $p \geq n$ alors $b_{p+2} = 0$.

□ 21 — En déduire que les énergies accessibles à un oscillateur harmonique en régime quantique sont de la forme

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

où ω est une grandeur que l'on exprimera en fonction de μ et k .

FIN DE LA PARTIE III

IV. — Capacité thermique et quantification

Comme dans la partie II, on s'intéresse à un ensemble de N molécules diatomiques identiques. Ce gaz est à l'équilibre thermique à la température T . La probabilité $\pi(E)$ qu'une molécule de ce gaz se trouve dans un état d'énergie E_n s'écrit

$$\pi(E_n) = A \exp(-\beta E_n)$$

où β est une fonction de k_B et de T uniquement.

22 — Par analyse dimensionnelle, exprimer β en fonction de k_B et de T .

Contrairement à la partie II où l'on avait utilisé l'expression classique de l'énergie, on utilise maintenant l'expression de l'énergie de l'oscillateur harmonique obtenue dans le modèle quantique à la question 21. C'est Albert Einstein qui eût cette idée le premier en 1907 afin de tenter de régler certains problèmes de la physique classique dans le traitement du comportement des solides à basse température. L'idée est ici la même, mais rend compte de la vibration des molécules diatomiques.

23 — Exprimer la constante A en fonction de \hbar , ω , β .

24 — En déduire l'expression de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de l'ensemble de ces N particules en fonction de \hbar , ω , β et N .

25 — Montrer que la capacité thermique molaire à volume constant $c_{V,m}$ de ce gaz s'écrit

$$c_{V,m} = R \frac{\xi^2}{\sinh^2(\xi)} \quad \text{avec } \xi = \frac{1}{2}\beta\hbar\omega$$

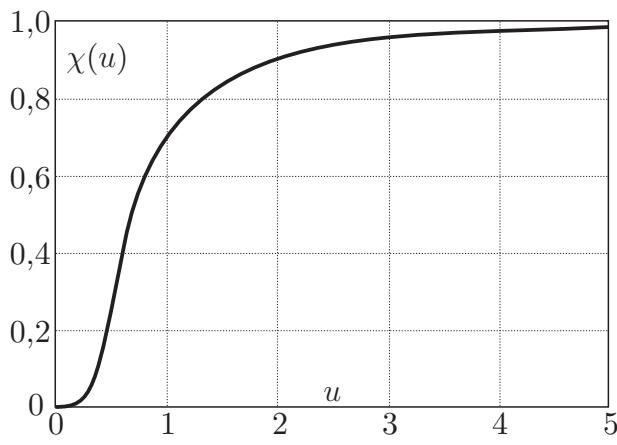


FIGURE 2 – Graphe de $\chi(u)$

On désigne par T_v la température, dite de vibration, caractéristique des vibrations de la molécule qui est telle que $T_v = \frac{\hbar\omega}{k_B}$.

26 — Réécrire l'expression de $c_{V,m}$ en fonction de T_v et T .

La figure 2 représente l'allure de la fonction

$$\chi(u) = u^{-2}/\sinh^2(u^{-1})$$

27 — La table ci-dessous fournit la température de vibration de quelques molécules diatomiques. Quelle partie des mesures présentées sur la figure 1 le modèle est-il censé représenter ? La théorie est-elle en accord avec l'expérience ?

Molécule	${}^1\text{H}_2$	${}^2\text{H}_2$	${}^1\text{H}-{}^2\text{H}$	Cl_2	Br_2	HCl	HBr
T_v [K]	6 220	4 390	5 380	808	463	4 230	3 790

FIN DE LA PARTIE IV

FIN DE L'ÉPREUVE



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH .

Concours Centrale-Supélec (Cycle international),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Et pour un neutron de plus... .

Dans l'ensemble du sujet, les vecteurs sont surmontés d'une flèche en général : \vec{v} , \vec{r} ; les vecteurs unitaires sont notés \hat{u} , \hat{e}_x , ... Pour les notations complexes, on écrira $\jmath^2 = -1$ et on adoptera la notation $\underline{a} = a_0 \exp(-\jmath\omega t)$ ou bien $\underline{a} = a_0 e^{-\jmath\omega t}$ pour décrire une fonction du temps sinusoïdale, $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$. Un point sur une fonction désigne sa dérivée totale par rapport au temps : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Les positions dans l'espace seront repérées en coordonnées cartésiennes (x,y,z) , rapportées à la base orthonormée $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, ou bien en coordonnées sphériques (r, θ, φ) , rapportées à la base orthonormée locale $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$. \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs.

Le sujet porte sur l'étude *classique puis quantique* du noyau et de l'atome de **deutérium** (également appelé hydrogène lourd). Le *deutérium* (symbole D ou bien ${}^2\text{H}$) est un des deux isotopes stables de l'hydrogène. Le noyau du deutérium ${}^2\text{H}$, connu sous le nom de **deuton**, contient un proton et un neutron, tandis que le noyau de l'isotope le plus répandu de l'hydrogène ne contient qu'un proton, ${}^1\text{H}$. L'abondance naturelle du deutérium dans les océans de la Terre sous forme d'eau semi-lourde (HDO) ou lourde (D_2O) est d'environ un atome pour 6 420 atomes d'hydrogène.

Ce problème comporte trois parties **complètement indépendantes** : **I**, **II** et **III** ; pour chacune de ces parties, certaines questions peuvent également être abordées de manière indépendante, à condition d'admettre éventuellement certains résultats affirmés par l'énoncé. La partie **I** est une introduction sur les proportions de masse. La partie **II** décrit, en *mécanique classique* les propriétés générales de l'atome de deutérium, puis de son noyau, le deuton, et leur application à la découverte du Deutérium par UREY en 1931. La partie **III** décrit, en *mécanique quantique*, certaines propriétés générales des interactions à forces centrales, avant de les appliquer à l'étude du noyau du deuton.

Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème sont regroupées dans un tableau à la fin de l'énoncé. Les applications numériques comporteront au mieux deux chiffres significatifs.

I. — Masses du deuton et du deutérium

- 1** — Quelle est la proportion en masse du deutérium dans l'hydrogène océanique ?
- 2** — Quelle est la proportion en masse du deuton (le noyau) dans le deutérium (l'atome) ?
- 3** — Comparer les proportions (en nombres de molécules) de l'*eau lourde* D_2O et de l'*eau semi-lourde* HDO dans les océans. On précisera les hypothèses nécessaires à cette comparaison.

Le premier échantillon d'eau lourde a été isolé par le physicien Gilbert LEWIS en 1933 puis une production industrielle par électrolyse a été mise en pratique par l'entreprise norvégienne NORSK HYDRO de 1934 à 1943.



FIGURE 1 – Échantillon d'eau lourde fabriqué par NORSK HYDRO, photographie © Alchemist-hp.

4 — Citez des applications industrielles de l'eau lourde.

II. — Étude classique de l'atome de deutérium

L'étude classique des propriétés de l'atome de deutérium (formé de son noyau, le deuton, et d'un unique électron) est elle-même divisée en deux sous-parties indépendantes : l'étude des raies d'émission de l'atome de deutérium (**II.A**) et l'influence de l'effet DOPPLER sur leur mesure (**II.B**).

II.A. — Spectroscopie atomique et découverte du deutérium

Un atome d'hydrogène (ou de deutérium) est constitué d'un électron unique, de charge $-e$, de masse m_e , soumis à l'interaction coulombienne d'un noyau supposé fixe à l'origine O des coordonnées. Les valeurs E_n de l'énergie de cet électron sont quantifiées et données par la relation

$$E_n = -\frac{E_0}{2n^2} \text{ avec } E_0 = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

L'état fondamental est celui d'énergie minimale, il correspond donc à $n = 1$ et sa valeur numérique est $E_1 = -\frac{E_0}{2} = -13,6 \text{ eV}$.

5 — On appelle *série de BALMER* l'ensemble des raies d'émission d'un atome d'hydrogène associées à une transition d'un niveau excité E_n (avec $n > 2$) vers le niveau $n = 2$. Exprimer les longueurs d'onde λ_n associées à ces transitions en fonction de E_0 , n , de la constante de PLANCK \hbar et de la célérité de la lumière dans le vide c . Calculer numériquement les longueurs d'onde λ_3 et λ_4 ; quel est le domaine spectral associé ?

On peut établir, et on admettra, que la prise en compte des (faibles) mouvements du *noyau* atomique amène à remplacer, dans toutes les équations ci-dessus, la masse m_e par $m'_e = \frac{m_e}{1 + m_e/M}$ où M est la masse du noyau : $M = m_p$ dans le cas de l'hydrogène « ordinaire » ${}^1\text{H}$ et $M = m_n + m_p$ dans le cas de l'hydrogène « lourd » (ou deutérium) ${}^2\text{H}$ ou D.

6 — Pour une des raies de la série de BALMER, on note λ_n (avec $n > 2$) la longueur d'onde émise par un atome d'hydrogène ordinaire, λ'_n la longueur d'onde émise par un atome de deutérium et $\delta = \frac{\lambda'_n - \lambda_n}{\lambda_n}$ l'écart relatif associé. Montrer que $\delta \simeq -\frac{m_e}{\kappa m_p}$ où κ est une entier que l'on déterminera ; calculer δ ; quelle conséquence en déduisez-vous quant à l'identification spectroscopique du deutérium ?

II.B. — Rôle de la température de l'échantillon

Compte-tenu de la faible proportion des atomes de deutérium dans un échantillon naturel, la détection des raies d'émission (à la longueur d'onde λ') du deutérium, et donc l'identification de celui-ci, nécessite que les raies d'émission « majoritaires » de l'hydrogène (à la longueur d'onde λ) ne *recouvrent pas* les raies du deutérium. En d'autres termes, la *largeur naturelle* $\Delta\omega$ des raies d'émission de l'hydrogène doit vérifier $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll \delta$ (où l'écart relatif δ a été introduit ci-dessus, question **6**). Pour cette étude, l'atome d'hydrogène, émetteur du rayonnement étudié, sera assimilé à un point matériel de masse $m \simeq m_p$; il sera étudié dans le cadre de la mécanique *classique* (c'est-à-dire ni quantique, ni relativiste).

Cette largeur naturelle des raies d'émission est essentiellement liée à l'agitation thermique de la source d'émission ; on va donc établir le lien liant la pulsation effective d'émission par un atome d'hydrogène, et la pulsation apparente à laquelle l'onde sera observée, en fonction de la vitesse relative de cet atome et du récepteur.

Considérons deux référentiels $(\mathcal{K}) = (Oxyz)$ et $(\mathcal{K}') = (O'x'y'z')$ en mouvement relatif, entièrement caractérisé par la vitesse $\vec{V}_e = \vec{v}_{O'/\mathcal{K}}$ de O' relativement à (\mathcal{K}) et par la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ de rotation de (\mathcal{K}') relativement à (\mathcal{K}) .

7 — Rappeler l'expression générale de la *loi de composition des vitesses* reliant les vitesses $\vec{v}_{M/\mathcal{K}}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{K}'}$ d'un même point mobile M relativement aux référentiels (\mathcal{K}) et (\mathcal{K}') .

Le référentiel $(\mathcal{K}) = (Oxyz)$ est celui du laboratoire ; le référentiel $(\mathcal{K}') = (Ex'y'z')$ est attaché à un point E mobile mais les vecteurs directeurs des axes des deux référentiels sont identiques, $\hat{e}'_x = \hat{e}_x$, $\hat{e}'_y = \hat{e}_y$ et $\hat{e}'_z = \hat{e}_z$. Enfin, la vitesse de E relativement à (\mathcal{K}) est $\vec{v}_{E/\mathcal{K}} = \vec{V} = V_x \hat{e}_x + V_y \hat{e}_y + V_z \hat{e}_z$, elle est supposé constante.

8 — Montrer, en application de la loi de composition, que les coordonnées (x,y,z) dans (\mathcal{K}) et (x',y',z') dans (\mathcal{K}') d'un même événement vérifient les relations :

$$x' = x - V_x t + x'_0 \quad y' = y - V_y t + y'_0 \quad z' = z - V_z t + z'_0$$

où x'_0 , y'_0 et z'_0 sont certaines constantes.

Un récepteur de lumière, fixe dans le référentiel (\mathcal{K}) , et situé à grande distance de l'émetteur E , reçoit une onde électromagnétique émise, dans le vide, dans la direction \hat{e}_x . L'émetteur E est un atome d'hydrogène et la grandeur lumineuse associée à cette onde s'écrit $\underline{S}(x',t) = S_0 \exp[j(kx' - \omega t)]$ en notation complexe.

9 — Quelle relation lie ω et k ?

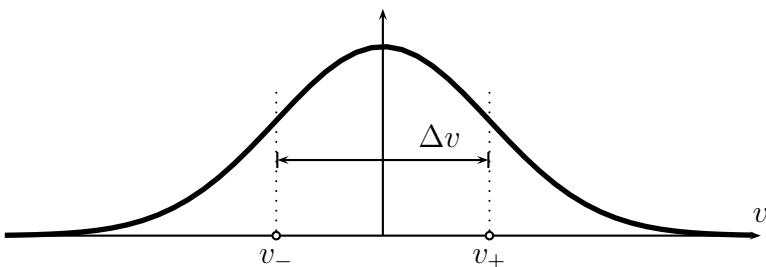
10 — Déterminer l'expression de l'onde \underline{S} , dans le référentiel (\mathcal{K}) de sa mesure, en fonction de x et t . En déduire qu'elle est observée à une pulsation apparente ω_{app} que l'on déterminera en fonction de ω , c et de certaines composantes de \vec{V} . Cette relation caractérise l'**effet DOPPLER**.

L'émetteur E est un atome d'hydrogène au sein d'un échantillon thermostaté à la température T ; en conséquence, sa vitesse varie de manière aléatoire (agitation thermique) avec la loi de distribution de BOLTZMANN : le nombre d'atomes dont la composante V_x prend une valeur comprise entre v et $v + dv$ est $dN = K \exp(-\alpha v^2) dv$.

11 — Exprimer α en fonction de T et de certaines constantes physiques. On ne cherchera pas à calculer K .

12 — Tracer la courbe représentative (\mathcal{G}) de $f(v) = dN/dv$ en fonction de v .

Dans le cas d'une courbe gaussienne comme celle tracée ci-dessous, on définit la *largeur* Δv de la courbe comme l'écart $\Delta v = v_+ - v_-$, où v_+ et v_- sont les deux valeurs de v correspondant à des points d'inflexion de la courbe.



13 — Exprimer la largeur Δv de la courbe (\mathcal{G}) , en fonction de T , de la constante de BOLTZMANN k_B et de la masse m_p de l'atome d'hydrogène ; commenter.

14 — En déduire l'allure de la courbe de distribution des pulsations mesurées ω_{app} et calculer sa largeur $\Delta\omega_{\text{app}}$, définie comme ci-dessus.

15 — En pratique, on impose le critère de détection $\frac{\Delta\omega_{\text{app}}}{\omega} \leqslant 5 \cdot 10^{-6}$. Calculer numériquement la température caractéristique à laquelle doit se dérouler l'expérience afin de pouvoir identifier spectroscopiquement le deutérium. Conclure.

III. — Le deuton

III.A. — Potentiels radiaux en physique quantique

L'étude d'un système de deux particules ponctuelles de masses m_1 et m_2 , si tuées en A_1 et A_2 et telles que $\overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{r}$ est réalisée en utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ) pour le vecteur \vec{r} . Les particules sont en interaction, décrite par l'énergie potentielle $E_p(r)$; la probabilité d'observer une particule dans l'élément de volume $d\tau$ entourant le point \vec{r} est donnée par $dp = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau$, où la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ est solution de l'équation de SCHRÖDINGER, $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Psi + E_p(r) \Psi(\vec{r}, t) = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ où Δ est l'opérateur de LAPLACE ou laplacien; le coefficient μ qui remplace, dans cette équation, la masse d'une particule unique, est donné par $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. On rappelle aussi l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \Delta_{\text{ang}} f \right] \quad \text{avec} \quad \Delta_{\text{ang}} f = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

On cherche une solution de l'équation de SCHRÖDINGER sous la forme $\Psi(\vec{r}, t) = \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \varphi) e^{-j\omega t}$.

□ 16 — Indiquer et justifier brièvement l'expression liant l'énergie E d'un tel état et la pulsation ω .

□ 17 — Montrer que $R(r)$ et $Y(\theta, \varphi)$ vérifient les deux équations

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} + \left[E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2} \right] R(r) = E R(r) \quad \text{et} \quad \Delta_{\text{ang}} Y = -C Y(\theta, \varphi)$$

où C est une certaine constante.

On rappelle les résultats de la mécanique classique pour l'étude du mouvement d'une particule de masse μ en mouvement dans un champ de forces centrales décrit par l'énergie potentielle $E_p(r)$:

- le mouvement est plan et peut, dans ce plan, être décrit en coordonnées polaires r, θ ;
- le moment cinétique est constant, directement perpendiculaire au plan du mouvement avec pour moment cinétique $\sigma = \mu r^2 \dot{\theta}$;
- le mouvement est entièrement décrit par la conservation de l'énergie $E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$, où l'énergie potentielle effective a pour expression $U_{\text{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\mu r^2}$.

□ 18 — Précisez, dans l'équation vérifiée par $R(r)$ établie ci-dessus, les expressions analogues de l'énergie cinétique radiale $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$, de l'énergie potentielle effective et du moment cinétique σ .

□ 19 — Quelle serait la valeur de la constante C pour une fonction d'onde purement radiale ? On ne fera pas nécessairement cette hypothèse dans les questions qui suivent.

□ 20 — On procède à une nouvelle séparation des variables en posant $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. établir les équations différentielles vérifiées par $\Theta(\theta)$ et $\Phi(\varphi)$.

□ 21 — Justifier le plus précisément possible le fait, qu'à une constante multiplicative près, que l'on peut imposer $\Phi(\varphi) = e^{jm\varphi}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

- 22 — On peut montrer, et on admettra, que les solutions de l'équation différentielle vérifiée par $\Theta(\theta)$ sont des polynômes de degré ℓ (avec $\ell \geq |m|$) de la variable $x = \cos \theta$:

$$\Theta(\theta) = a_\ell x^\ell + \dots + a_1 x + a_0$$

En ne considérant que le terme de plus haut degré, exprimer C en fonction de ℓ seulement. Quel est le moment cinétique σ pour une fonction d'onde caractérisée par ℓ ?

III.B. — Énergie de liaison du deuton

Le deuton est le noyau de l'atome de deutérium ^2H , formé d'un neutron et d'un proton. Il s'agit d'un des très rares noyaux stables comportant un nombre impair à la fois de neutrons et de protons (avec ^6Li , ^{10}B , ^{14}N et ^{180}Ta) ; en effet, de tels noyaux *impairs-impairs* sont en général peu ou pas stables. L'énergie de liaison du deuton est faible (2,23 MeV seulement) et il n'a qu'un état fondamental, de moment cinétique nul (nombre quantique orbital $\ell = 0$) et pas d'état excité stable.

On considère les états liés stationnaires d'une particule de masse μ dans le puits de potentiel défini par :

$$E_p = -V_0 \text{ pour } 0 \leq r \leq a \text{ et } E_p = 0 \text{ pour } r > a$$

avec $V_0 > 0$. On écrit la fonction d'onde indépendante du temps d'un état lié ($-V_0 < E < 0$), à symétrie de révolution (radiale), $\psi(r) = \frac{R(r)}{r}$ où $R(r)$ est solution de l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} + E_p(r) R(r) = E R(r)$$

Dont les solutions sont de la forme $R(r) = A \sin(kr)$ pour $r \leq a$, et $R(r) = B e^{-Kr}$ pour $r > a$.

- 23 — Justifier ces formes et exprimer k et K en fonction de E et V_0 .

- 24 — Expliciter les conditions de raccordement en $r = a$.

- 25 — On pose $X = ka$ et $Y = Ka$. Écrire deux relations distinctes liant X et Y en fonction de $\rho^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}$, indépendamment des valeurs des constantes A et B (qu'on ne cherchera pas à expliciter).

- 26 — Représenter graphiquement, sur un système d'axes (X, Y) , les deux relations établies à la question précédente.

- 27 — Montrer qu'il n'existe d'état lié que si V_0 est supérieur à une certaine valeur V_{\min} que l'on déterminera en fonction de \hbar , μ et a .

- 28 — Quelle est la valeur maximale V_{\max} de V_0 pour qu'il n'existe qu'un seul état lié ?

On utilise ce modèle pour décrire l'interaction nucléaire entre un neutron et un proton, formant le deuton (noyau de l'atome de deutérium). Le rayon du deuton est $a = 2,0 \cdot 10^{-15} \text{ m}$; la masse μ est la masse réduite du deuton, $\mu = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$. L'expérience montre qu'il n'existe qu'un seul état lié, d'énergie $E_d < 0$.

- 29 — En déduire que, dans ce modèle, $V_{\min} < V_0 < V_{\max}$ et calculer V_{\min} et V_{\max} en MeV.

- ❑ **30** — Que vaut l'énergie de liaison si $V_0 = V_{\min}$?
- ❑ **31** — L'énergie de liaison du deuton est $E_d = -2,23 \text{ MeV}$. Comparer à V_{\min} ; en déduire que V_0 est proche de V_{\min} .
- ❑ **32** — En explicitant les relations établies ci-dessus entre X et Y pour V_0 proche de V_{\min} , montrer que $V_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2a}{\hbar\pi} \sqrt{-2\mu E_d} \right]^2$.
- ❑ **33** — Calculer V_0 (en MeV) et comparer à E_d .

FIN DE L'ÉPREUVE

Le tableau ci-après récapitule les valeurs de certaines grandeurs physiques ou constantes fondamentales.

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de BOLTZMANN	$k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de PLANCK	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de DIRAC	$\hbar = h/2\pi = 1,0 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \gg m_e$
Masse du neutron	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \simeq m_p$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Température d'ébullition de l'azote (sous 1 bar)	$T_{\text{eb}}^{\text{N}_2} = 77,4 \text{ K}$
Température d'ébullition de l'hydrogène (sous 1 bar)	$T_{\text{eb}}^{\text{H}_2} = 20,3 \text{ K}$

A2019 – PHYSIQUE II MP



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.**

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

L'indice et le froid

Ce sujet comporte deux parties totalement indépendantes. Au sein de chaque partie, de nombreuses questions sont également indépendantes. La première partie concerne la loi de Gladstone-Dale relative à la variation de l'indice de l'air en fonction de la pression et la température. La deuxième partie est consacrée à l'obtention de température extrêmement basse par désaimantation adiabatique.

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{E}) ou d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}). Par défaut, la norme d'un vecteur $\|\vec{E}\|$ est notée simplement E . La mesure algébrique d'un vecteur sur un axe est indiquée par le paramètre représentant l'axe, nous notons ainsi $E_z = \vec{E} \cdot \hat{u}_z$. Les valeurs des constantes fondamentales nécessaires à la résolution du problème sont regroupées dans une annexe à la fin de l'énoncé. Vous y trouverez également un rappel de quelques fonctions de trigonométrie hyperbolique et du théorème de Schwarz.

Sauf indication contraire, les applications numériques seront des ordres de grandeur qui comporteront toujours deux chiffres significatifs. Le nombre complexe i est tel que $i^2 = -1$.

I. — Vérification de la loi de Gladstone-Dale

Après avoir étudié les propriétés optiques de différents liquides dans le domaine du visible, Gladstone et Dale ont proposé en 1858 une loi empirique relative à l'indice de réfraction, noté n , indiquant que $n - 1$ est proportionnel à la masse volumique du liquide. Cette loi a ensuite été étendue au cas du fluide diélectrique homogène et isotrope, comme le sont les gaz et les mélanges de gaz. Cette partie du sujet propose une vérification expérimentale de cette loi pour l'air, et une explication théorique rudimentaire.

Nous notons n_0 l'indice de l'air à la pression p_0 et à la température T_0 ambiantes dans le laboratoire. Nous rappelons que l'indice de réfraction d'un milieu est défini par le rapport de la vitesse c de la lumière dans le vide sur la vitesse de phase v de la lumière dans le milieu considéré, soit $n = \frac{c}{v}$, cet indice est généralement plus grand que 1.

1 — Montrez que, sous réserve d'une approximation usuelle que vous préciserez, la loi de Gladstone-Dale, pour l'air, conduit à écrire que $n - 1$ est proportionnel au rapport de la pression sur la température de l'air. En travaillant à température constante, montrez que la variation d'indice $n - n_0$ est proportionnelle à la variation de pression.

Nous posons par la suite $n - n_0 = \frac{a}{T_0}(p - p_0)$ où a est une constante qui dépend de la composition de l'air (humidité, taux de CO₂, ...).

2 — La variation de l'indice de l'air avec la pression est très faible, mais parfaitement mesurable avec un instrument très sensible comme l'interféromètre de Michelson. L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide, et réglé de façon à observer des anneaux sur un écran. Représentez, sur un schéma symbolique, un interféromètre de Michelson en précisant la position de la source lumineuse et de l'écran. Des lentilles minces dont vous préciserez le rôle sont à utiliser. La lame séparatrice sera représentée par un simple trait. Quelle est la position relative des miroirs ? Nous notons f' la distance focale de la lentille de projection. Déduisez-en la différence de marche δ induite par l'interféromètre dans cette configuration en précisant vos notations. En supposant que le centre de la figure d'interférence est un point brillant d'éclairement maximal, donnez le rayon du $k^{ième}$ anneau brillant en fonction de k , f' , λ et δ_0 la différence de marche au centre de la figure. On supposera les angles des rayons lumineux par rapport à l'axe optique de la lentille suffisamment petits pour en négliger l'ordre 3 devant les précédents.

Une cuve est introduite entre un miroir de l'interféromètre et la lame séparatrice. Cette cuve contient de l'air dont on peut faire varier la pression par une simple pompe à main. Un manomètre permet de mesurer la pression relative atteinte. En gonflant lentement, l'air de la cuve reste sensiblement à température ambiante. Une microfuite permet ensuite de ramener très lentement la pression de la cuve à p_0 . Dans votre analyse, la cuve sera idéalisée et vous êtes invités à négliger le rôle des parois du dispositif.

Une photodiode est placée à la place de l'écran au centre de la figure d'interférence et permet de décompter le nombre de franges brillantes N qui défilent lentement lors de la diminution de la pression dans la cuve. La longueur de la cuve traversée par les rayons lumineux est $L = 4\text{ cm}$.

❑ 3 — Reliez la différence de marche supplémentaire due à la présence de la cuve à la variation d'indice $n - n_0$, puis au nombre de franges N , sur la frange centrale éclairant la photodiode. Déduisez-en l'expression de N en fonction notamment de a et de la variation de pression $p - p_0$ dans la cuve.

❑ 4 — Pour $T_0 = 300\text{ K}$ et $\lambda = 530\text{ nm}$, le tableau suivant donne le nombre de franges N pour quelques valeurs de surpression $p - p_0$ exprimées en bar :

$p - p_0$	0	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1,8	2	2,3	2,5
N	0	17	26	40	56	68	82	92	102	111

Calculez numériquement le coefficient a en détaillant votre démarche. Si vous aviez disposé d'un outil d'analyse numérique (calculatrice, ordinateur + python, etc...), comment aurait-on pu exploiter ces données ?

Nous utilisons par la suite la valeur en ordre de grandeur de $a = 1,0 \times 10^{-6}\text{ K} \cdot \text{Pa}^{-1}$

La loi empirique de Gladstone-Dale pour l'air peut être expliquée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Nous assimilons une molécule d'un gaz composant l'air à un noyau et deux électrons optiquement actifs. Nous notons $\vec{r}(t)$ le vecteur position d'un électron par rapport au noyau, $\vec{v}(t)$ sa vitesse, m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique. L'interaction entre le noyau et l'électron est modélisée par deux forces s'exerçant sur l'électron : une force de rappel élastique $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ et une force de frottement fluide $-m_e\Gamma\vec{v}$. L'électron est soumis au champ électrique de l'onde plane que nous considérons localement identique à $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$.

❑ 5 — Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de l'électron. Pourquoi n'avons nous pas pris en compte l'effet du champ magnétique de l'onde sur l'électron ? Nous nous intéressons à la solution en régime forcé de cette équation. En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la vitesse \vec{v} d'un électron en fonction du champ électrique.

❑ 6 — Pourquoi ne prenons-nous pas en compte le mouvement des noyaux des molécules induit par le champ électrique de l'onde plane ? Montrez alors que le vecteur densité de courant électronique total peut s'écrire :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

où κ est un facteur numérique que l'on déterminera et n^* est le nombre volumique, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume du gaz.

□ 7 — À quel type de filtre correspond γ ? Soit γ_0 le maximum du module de γ , déterminez l'expression de γ_0 . Nous définissons la fonction de transfert $H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, exprimez cette fonction de transfert et précisez l'expression de son facteur de qualité Q . Représentez le gain de ce filtre dans un diagramme de Bode pour un facteur de qualité de l'ordre de la centaine.

□ 8 — L'air est assimilé à un milieu neutre électriquement mais polarisable : une onde électromagnétique dans le domaine du visible induit un mouvement des électrons qui se traduit par l'apparition d'un vecteur densité de courant selon la question précédente. Donnez alors les équations de Maxwell dans ce milieu. Montrer qu'en introduisant une permittivité relative ϵ_r complexe que l'on identifiera, on peut écrire l'équation de propagation pour le champ électrique sous la forme $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

□ 9 — On néglige les frottements fluides et on suppose que la pulsation de l'onde ω est très inférieure à ω_0 , montrez alors que cette permittivité relative se simplifie en :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\kappa e^2 n^*}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$$

Quelle est la relation entre la permittivité relative et l'indice n ? En remarquant que $n^2 - 1 \ll 1$, donnez l'expression de l'indice en fonction de n^* , e , m_e , ϵ_0 et ω_0 .

□ 10 — Reliez le nombre volumique n^* à la pression et la température de l'air. Déduisez-en l'expression de l'indice en fonction de la pression, de la température et des autres constantes. Exprimez alors le coefficient a en fonction de e , m_e , ϵ_0 , k_B et ω_0 . Calculez la valeur numérique de ω_0 et commentez le résultat obtenu.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Refroidissement par désaimantation adiabatique

Le refroidissement par désaimantation magnétique est une technique assez ancienne puisque les premières expériences ont été présentées en 1933, découlant de théorie proposée par Debye (1926) et Giauque (1927). Elle connaît actuellement un regain d'intérêt dans le domaine spatial. L'atténuation du bruit thermique sur les capteurs des satellites nécessite en effet des températures extrêmement basses qui doivent être obtenues dans un milieu en apesanteur et avec un dispositif le plus léger possible. La technique de refroidissement par effet magnétocalorique ne nécessite pas de compresseur, elle est donc compatible avec l'absence de pesanteur. La capacité thermique importante permet de réduire la masse du dispositif. La température de refroidissement attendue est de l'ordre de 50 mK.

L'aimantation, notée \vec{M} , est une grandeur intensive définie comme la densité volumique de moment dipolaire magnétique. Il s'agit donc du moment dipolaire magnétique moyen par unité de volume.

Le dispositif de refroidissement comporte un premier étage de refroidissement à adsorption qui amène l'étage de désaimantation magnétique à la température de 350 mK. Le réfrigérant utilisé pour la désaimantation est un sel d'alun de chrome de formule $KCr(SO_4)_2$ qui est paramagnétique. Les ions présentent un moment magnétique orbital principalement d'origine électronique. En présence d'un champ extérieur, le sel présente une aimantation que l'on cherche à exprimer.

□ 11 — Considérons une spire de courant circulaire, traversée par l'intensité I , dont la surface est notée S . Son vecteur surface \vec{S} est orienté par \hat{u} vecteur unitaire normal. Le moment magnétique associé est défini par $\vec{\mu} = I\vec{S}$ avec $\vec{S} = S\hat{u}$. Plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} , le circuit subit une action qui tend à aligner le moment magnétique avec le champ magnétique. Cette action se traduit par un couple de force $\vec{\mu} \wedge \vec{B}$. Montrez qu'il existe deux positions d'équilibre et indiquer leur stabilité. Tracez succinctement le graphe de l'énergie potentielle magnétique $E_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ en fonction de l'angle entre les deux vecteurs qui la définissent. Retrouvons-nous les positions d'équilibre et leur stabilité ?

Dans le cadre du modèle semi-classique de Bohr, nous considérons un électron, de masse m et de charge $q = -e$, en orbite circulaire uniforme de rayon r autour d'un noyau. Le moment cinétique de cet électron $\vec{L} = \vec{r} \wedge m_e \vec{v}$ est quantifié, sa norme valant $L = p\hbar$ où \hbar est la constante de Planck réduite et $p \in \mathbb{N}^*$.

□ 12 — Exprimez la norme du moment cinétique en fonction notamment des normes de \vec{r} et \vec{v} . En remarquant que l'électron effectue un tour en une période τ , exprimez l'intensité électrique correspondant à ce circuit élémentaire en fonction de e et des normes de \vec{r} et \vec{v} . Déduisez-en l'expression du moment magnétique. Montrez alors que le moment magnétique est colinéaire au moment cinétique. Déduisez-en que sa norme μ est aussi quantifiée $\mu = p\mu_B$ et exprimez la constante μ_B appelée magnéton de Bohr en fonction de e , m_e et \hbar . Calculez avec un seul chiffre significatif la valeur numérique de μ_B .

Les sels ioniques d'alun présentent un moment magnétique permanent dont l'orientation est aléatoire. En présence d'un champ magnétique extérieur, ce moment magnétique tend à s'orienter selon le champ. Notons Oz l'axe du champ magnétique, soit $\vec{B} = B\hat{u}_z$. L'énergie potentielle fait intervenir la projection du moment magnétique selon Oz qui est elle-même quantifiée. Ainsi l'état quantique du nuage électronique d'un ion dans un champ magnétique est défini par 4 nombres quantiques (n, ℓ, m, k) .

Le nombre k est entier si m est entier ou demi-entier si m est demi-entier. Il peut prendre l'une quelconque des valeurs de l'ensemble \mathbb{M} tel que

$$k \in \mathbb{M} = \begin{cases} \{-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m\} & \text{si } m \text{ est entier} \\ \{-m, -m+1, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, m-1, m\} & \text{si } m \text{ est demi-entier} \end{cases}$$

L'énergie potentielle associée à cet état s'écrit $E_k = -kg\mu_B B$ où g est un facteur numérique, appelé facteur de Landé. Contrairement au ferromagnétisme, l'interaction entre les ions est négligeable. Nous considérons n^* ions du sel d'alun par unité de volume dont nous cherchons à exprimer l'aimantation.

□ 13 — En utilisant la distribution de probabilité de Boltzmann, montrez que la proportion P_k d'ions dans l'état E_k peut s'écrire sous la forme $P_k = \frac{\exp(-E_k/kT)}{Z}$ où la quantité Z permet de normaliser la distribution, et dans laquelle on exprimera x en fonction de g , μ_B , B , k_B et T .

□ 14 — Exprimez Z en fonction de x et des k . Montrez que Z peut s'écrire comme la somme des premiers termes d'une suite géométrique. Déduisez-en l'expression de Z sous la forme d'un rapport de deux sinus hyperboliques. La fonction Z est appelée fonction de partition.

□ 15 — La projection du moment magnétique selon l'axe Oz vaut $\mu_z = kg\mu_B$, exprimez sa moyenne $\langle \mu_z \rangle$ dans la distribution dipolaire en fonction de g , μ_B et des proportions P_k , puis en fonction de la dérivée $\frac{d}{dx} [\ln(Z)] = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx}$. Comme les composantes du moment magnétique selon les autres axes sont nulles en moyenne (pas de direction privilégiée), montrez que l'aimantation totale M des n^* ions par unité de volume a pour expression

$$M = M_\infty \left\{ \frac{m + \frac{1}{2}}{\operatorname{th} [(m + \frac{1}{2}) x]} - \frac{1}{2 \operatorname{th} (\frac{x}{2})} \right\}$$

où l'on exprimera M_∞ en fonction de n^* , g et μ_B . Ce modèle a été proposé par le physicien français Léon Brillouin en 1927.

□ 16 — Dans le régime $x \ll 1$, on constate expérimentalement que l'aimantation suit la loi de Curie $M = \gamma \frac{B}{T}$ où γ est une constante spécifique du sel d'alun considéré. Exprimez, dans le cadre du modèle obtenu, γ en fonction de n^* , g , μ_B , du facteur $m(m+1)$ et de k_B .

□ 17 — Nous prenons ici $m = \frac{3}{2}$. On définit la fonction de Brillouin $f(x) = \frac{M(x)}{M_\infty}$. Pour quelles raisons physiques fondamentales observe-t-on, d'une part que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, et d'autre part que le graphe de $f(x)$ présente une asymptote horizontale ? Tracer l'allure de $f(x)$ pour $x \geq 0$. Expérimentalement, la susceptibilité magnétique $\chi = \frac{\mu_0 M}{B}$ de ce sel d'alun est voisine de $\chi = 1,0 \times 10^{-4}$ pour n^* proche du millier de moles par m^3 , à la température de 300 K. Retrouvez-vous cet ordre de grandeur avec $g = 2$?

Le sel d'alun utilisé dans la désaimantation suit la loi de Curie $M = \gamma \frac{B}{T}$.

Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les moments magnétiques tendent à s'aligner selon le champ extérieur. Cet alignement est exothermique. Le sel d'alun est relié au premier étage de refroidissement qui évacue l'énergie thermique produite. Le sel est ensuite isolé thermiquement, et le champ magnétique est lentement diminué. Cette transformation est considérée comme adiabatique réversible.

□ 18 — L'énergie interne volumique u des n^* ions d'alun par unité de volume est une fonction d'état de ce système. Sa variation est donnée par $du = Tds + BdM$ où $s = s(T, B)$ est l'entropie volumique du système. Quelle serait l'équivalent du terme BdM pour un gaz soumis à des forces de pression ? Le sel est un solide, nous introduisons, à l'aide de l'approche des multiplicateurs de Lagrange, la fonction enthalpie volumique $h = u - BM$. Exprimez la différentielle de h . Dans le cadre du modèle utilisé, h ne dépend que de T , nous définissons c_B la capacité thermique du système par $dh = c_B dT$. Déterminez la variation ds de l'entropie en fonction de c_B , γ , B , T et des variations de température dT et de champ magnétique dB .

□ 19 — Montrer que $\left(\frac{\partial c_B}{\partial B} \right)_T = -\eta \frac{\gamma B}{T^2}$ où l'on déterminera la constante η . Dans la gamme de température considérée, la capacité thermique d'un sel paramagnétique non soumis à un champ magnétique extérieur est celle d'un système chaud à deux états, i.e proportionnelle à l'inverse du carré de la température $c_B(T, B=0) = \frac{\alpha}{T^2}$ où α est une constante caractéristique du sel considéré. En déduire l'expression de c_B en fonction de γ , α et des variables T et B .

□ 20 — Le réfrigérant est soumis à un champ magnétique de $B_i = 20 \text{ mT}$ et refroidi à une température $T_i = 350 \text{ mK}$ avant d'être isolé thermiquement. Le champ magnétique est lentement abaissé jusqu'à une valeur résiduelle de $B_f = 2,0 \text{ mT}$. Déterminez l'expression de la température finale T_f en fonction de γ , α , B_f , B_i et T_i . Dans les conditions de l'expérience, nous pouvons annuler le paramètre α , déduisez-en l'expression simplifiée de T_f en fonction de B_f , B_i et T_i puis sa valeur numérique.

FIN DE LA PARTIE II

Constantes et valeurs numériques

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On appelle sinus et cosinus hyperbolique de la variable réelle t , les fonctions :

$$\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

La fonction tangente hyperbolique de la variable réelle t est définie par le rapport $\text{th}(t) = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$.

Au voisinage de $t = 0$, le développement de Taylor de la tangente hyperbolique s'écrit :

$$\text{th}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

On rappelle également que $\frac{d}{dt}(\text{sh}(t)) = \text{ch}(t)$ et $\frac{d}{dt}(\text{ch}(t)) = \text{sh}(t)$.

Théorème de Schwarz, ou de Young

Soit $f(x,y)$ une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 et au moins deux fois dérivable. Elle vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Identité entre opérateurs différentiels

Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^3 , on a

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \Delta \vec{u}$$

FIN DE L'ÉPREUVE



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



La loi de WIEDEMANN-FRANZ

En 1853 les physiciens allemands GUSTAV WIEDEMANN et RUDOLF FRANZ remarquèrent expérimentalement que le rapport de la conductivité thermique λ d'un métal par sa conductivité électrique γ semblait constant pour tous les métaux.

Une vingtaine d'années plus tard, en 1872, le physicien danois LUDVIG LORENZ découvrit qu'en fait ce rapport dépendait linéairement de la température selon la relation

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \kappa T .$$

Cette relation est désormais connue sous le nom de loi de WIEDEMANN-FRANZ et la constante κ , appelée coefficient de LORENZ, est indépendante du métal considéré.

Après sa découverte expérimentale, cette relation est restée pendant longtemps un grand mystère pour les physiciens et questionnait sur le problème du transport de l'électricité et de la chaleur dans les métaux. Elle résista à la modélisation pendant un demi-siècle.

Avec la découverte de l'électron et de ses propriétés en 1897 par le physicien anglais JOSEPH THOMPSON des modèles furent envisageables. L'un des tout premiers est établi par le physicien allemand PAUL DRUDE en 1900, il permet d'interpréter le transport des électrons dans les métaux dans le cadre d'un modèle classique.

Ce modèle permet de justifier certains traits de la loi de WIEDEMANN-FRANZ mais n'apporte pas toute satisfaction.

Il sera repris une trentaine d'années plus tard dans un contexte quantique par les physiciens allemands ARNOLD SOMMERFELD et HANS BETHE. L'analyse microscopique fine des solides devenait possible : elle fut à l'origine de très grandes avancées technologiques qui jalonnèrent le xx^e siècle et reste encore tout à fait d'actualité.

Nous proposons dans ce sujet de commencer (Partie I) par étudier un protocole expérimental permettant de déterminer la conductivité électrique d'un métal (le cuivre). La loi de Wiedemann-Franz sera alors démontrée dans un modèle statistique simple (Partie II), puis elle sera testée expérimentalement pour le cuivre (Partie III). Ces trois parties sont très largement indépendantes.

Sauf mention contraire, on limitera les applications numériques à des estimations ne comportant au plus que deux chiffres significatifs. Les données numériques utiles pour réaliser les applications numériques ainsi qu'un formulaire sont rassemblés en fin d'énoncé. Les vecteurs unitaires sont surmontés d'un chapeau : $\|\hat{u}_x\| = 1$.



I. — Détermination expérimentale de la conductivité électrique du cuivre

Dans cette partie, on cherche à mettre en place un protocole expérimental permettant de déterminer la conductivité électrique du cuivre et à exploiter un résultat de mesure.

Pour ce faire, on dispose d'un fil de cuivre de longueur 10,0 mètres, de section circulaire de diamètre 2,0 mm, recouvert d'une résine isolante, que l'on enroule grossièrement pour réduire l'encombrement (on néglige toute déformation due à l'enroulement). Ce fil est plongé dans un bain thermostaté, muni d'un agitateur, pour maintenir sa température au voisinage de 20°C. On commence par connecter le fil aux bornes d'un ohmmètre dont un extrait de la notice est fourni dans la table 1.

On se place sur le calibre le mieux adapté. L'ohmmètre affiche 0,1 Ω .

- 1 — Quel calibre est le mieux adapté pour cette mesure (on justifiera ce choix) ? Quelle incertitude doit-on associer à la valeur affichée ? Commenter.

Calibres	Précision	Courant de Mesure	Résolution
500 Ω	0,3% L + 3 UR	1 mA	0,1 Ω
5 k Ω		125 μ A	1 Ω
50 k Ω		12,5 μ A	10 Ω
500 k Ω		1,25 μ A	100 Ω
5 M Ω		125 nA	1 k Ω
50 M Ω	1% L + 3 UR	30 nA	10 k Ω

TABLE 1 – Tableau extrait de la notice de l'ohmmètre utilisé.

On cherche à déterminer la résistance électrique du fil à l'aide d'un autre montage, exploitant la loi d'OHM, un générateur de courant continu pouvant délivrer quelques ampères sous quelques volts, un voltmètre et un ampèremètre, dont les notices indiquent :

Calibres	Précision	Chute de tension maximale	Résolution
50 mA DC	0,3% L + 2 UR	< 800 mV	100 μ A DC
500 mA DC	0,3% L + 3 UR	< 800 mV	100 μ A DC
10 A DC	1% L + 3 UR	< 700 mV	10 mA DC

TABLE 2 – Tableau extrait de la notice de l'ampèremètre.

Calibres	Précision	Impédance d'entrée	Résolution
500 mV DC	0,3% L + 2 UR	11 M Ω	0,1 mV DC
5 V DC		11 M Ω	1 mV DC
50 V DC			10 mV DC
500 V DC		10 M Ω	100 mV DC
600 V DC			1 V DC

TABLE 3 – Tableau extrait de la notice du voltmètre.

Pour mesurer une résistance à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre, deux montages sont possibles et représentés sur la figure 1.

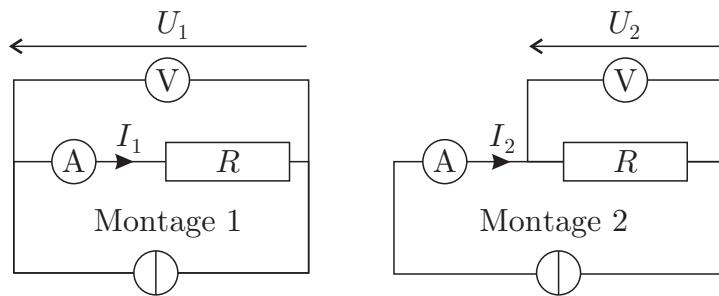


FIGURE 1 – Mesure d'une résistance

- 2 — En notant respectivement R_A et R_V les résistances internes de l'ampèremètre et du voltmètre, évaluer pour chacun de ces montages l'erreur systématique $\varepsilon_i = \frac{|R_i - R|}{R}$ où $R_i = \frac{U_i}{I_i}$ représente la résistance mesurée dans chacun des montages $i = 1$ ou $i = 2$. Représenter sur un même graphe les variations de cette erreur relative en fonction de R . Justifier que, dans cette expérience, seul l'un des deux montages est pertinent.

Avec le montage adapté, pour une intensité lue à l'ampèremètre de 5,23 A, le voltmètre affiche 287,5 mV (à chaque fois, on se place sur le calibre le mieux adapté).

- 3 — Estimer (avec un chiffre significatif) la résistance électrique du fil. Comparer (de manière chiffrée) la précision de cette seconde méthode de mesure à celle de la question 1. Comment procéder pour améliorer encore la qualité de cette seconde mesure ?

- 4 — Déduire de la question précédente une estimation de la conductivité électrique du cuivre.

II. — Relation entre conductivités thermique et électrique dans un métal

Dans cette partie, on se propose d'établir la loi de WIEDEMANN-FRANZ. Pour ce faire, on considère un fil de cuivre rectiligne d'axe Ox , homogène et comportant n électrons de conduction par unité de volume. Lorsqu'un champ électrique uniforme et permanent \vec{E} est appliqué à ce matériau, chaque électron de vitesse \vec{v} et de masse m est soumis à la force de COULOMB \vec{f}_C imposée par ce champ et à une force de frottement fluide $\vec{f}_D = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ qui modélise macroscopiquement l'interaction de l'électron avec le matériau.

- 5 — En écrivant le principe fondamental de la dynamique à cet électron, déterminer sa vitesse limite dans ce modèle. En déduire l'expression de la conductivité électrique γ du matériau.

On peut s'interroger sur le sens physique de la durée τ . On adopte pour cela le modèle suivant : Soit un ensemble de N électrons de conduction. On désigne par $\vec{v}_i(t)$ la vitesse, à l'instant t , du i -ème électron de cet ensemble. On note $\vec{p}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant t moyennée sur l'ensemble des porteurs de charge, soit

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m \vec{v}_i(t)$$

Lors de son déplacement, un électron subit diverses collisions ; on note $\vec{p}_{i,0}^+$ la quantité de mouvement du i -ème après l'une de ces collisions. Un électron pris au hasard subit une collision

entre les instants t et $t+dt$ avec une probabilité dt/θ où θ est une constante positive. On rappelle qu'en l'absence de collision il est uniquement soumis à \vec{f}_C .

□ 6 — Justifier la relation $\vec{p}_i(t+dt) = \frac{dt}{\theta} \vec{p}_{i,0} + \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) \vec{p}_i(t) + \vec{f}_C dt$

□ 7 — Déduire de l'équation précédente une relation entre $\frac{d\vec{p}(t)}{dt}$, $\vec{p}(t)$, \vec{f}_C et θ dans la limite $dt \rightarrow 0$. Commenter l'expression obtenue et relier θ à la durée τ .

On note $\Pi(t)$ la probabilité qu'un électron n'ait pas subi de collision entre un instant initial $t = 0$ et l'instant t . L'instant initial est choisi tel que l'électron a subi sa dernière collision à l'instant $t = 0^-$, c'est-à-dire juste avant l'instant initial.

□ 8 — Par une approche semblable à celle de la question 6, établir l'équation différentielle vérifiée par $\Pi(t)$ pour $t > 0$. Intégrer cette équation pour obtenir l'expression de $\Pi(t)$ en fonction de τ , puis calculer la moyenne temporelle de la durée entre deux collisions subies par un électron. En déduire une interprétation physique de la durée τ .

Pour obtenir l'expression de la conductivité thermique, on adopte un modèle unidimensionnel de type gaz parfait. On note v la vitesse quadratique moyenne des électrons et on considère qu'ils se déplacent de façon équiprobable selon $+\hat{u}_x$ ou $-\hat{u}_x$ à la vitesse v . Dans ce modèle, l'énergie thermique est véhiculée globalement par les électrons le long de l'axe Ox , au gré des chocs. On se place également en régime stationnaire. On note $\mathcal{E}(T(x))$ l'énergie cinétique moyenne d'un électron situé en x (à la température $T(x)$).

□ 9 — À l'aide d'un bilan sur une section droite de métal située à l'abscisse x , montrer que le flux thermique j_q par unité de surface s'écrit :

$$j_q = \frac{1}{2} nv \left[\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau)) \right]$$

□ 10 — En précisant les différentes hypothèses de votre calcul, exprimer j_q en fonction de v , τ , n , $\frac{dT}{dx}$ et de la chaleur spécifique d'un électron $C_V = \frac{d\mathcal{E}}{dT}$. En retrouvant la loi de FOURIER dans cette relation, déduire l'expression de la conductivité thermique λ du gaz d'électrons.

□ 11 — Dans le cadre du modèle du gaz parfait classique *monodimensionnel* exprimer finalement λ en fonction de n , T , k_B , τ et de la masse m de l'électron.

□ 12 — Exprimer le rapport $\frac{\lambda}{\gamma T}$ en fonction de e et k_B dans le modèle classique *monodimensionnel* étudié jusqu'à présent. Comment se généralise cette relation dans le cas *tridimensionnel*? On justifiera sa réponse. Cette relation donne le coefficient de LORENZ dans le modèle classique de DRUDE.

En fait le gaz formé par les électrons libres contenus dans un métal ne peut absolument pas être décrit dans un contexte classique même à température ambiante. Un modèle quantique *tridimensionnel* proposé par ARNOLD SOMMERFELD en 1926 donne les résultats suivants :

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right) k_B \quad \text{avec} \quad \epsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2$$

où ϵ_F et v_F sont respectivement l'énergie de FERMI et la vitesse de FERMI du gaz d'électron. Dans ce modèle quantique la vitesse des électrons est donnée par leur vitesse de FERMI. On admet enfin que les expressions de la conductivité thermique obtenue à la question 10 révisée à la question 12 et celle de la conductivité électrique de la question 5 restent valides dans un contexte quantique.

13 — Exprimer le coefficient de LORENZ κ en fonction de e et k_B dans le modèle quantique proposé par SOMMERFELD. Cette relation constitue la loi de WIEDEMANN-FRANZ dans le modèle de DRUDE-SOMMERFELD.

14 — Comparer les valeurs du coefficient de LORENZ dans les cas classique et quantique. Pour les métaux conducteurs l'énergie de FERMI des électrons est de l'ordre de l'électron-volt et on rappelle qu'à température ambiante $k_B T \simeq \frac{1}{40}$ eV. Que peut-on dire du modèle classique ?

III. — Détermination expérimentale de la conductivité thermique du cuivre

Pour déterminer expérimentalement la conductivité thermique du cuivre, il est utile de connaître sa capacité thermique massique et sa masse volumique ρ .

15 — Proposer une expérience permettant de déterminer la masse volumique ρ du cuivre, puis une autre permettant de déterminer sa capacité thermique massique c .

Pour accéder expérimentalement à la conductivité thermique du cuivre, on se propose d'étudier la méthode du « flash ». Dans cette méthode, on utilise une plaque de cuivre d'épaisseur constante $L = 3,12$ mm selon l'axe Ox et de dimensions grandes devant L suivant les axes Oy et Oz — en sorte que la température dans la plaque est supposée ne dépendre que de x et t . La plaque est située entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ et on néglige les pertes latérales par convection ou par rayonnement. Par linéarité de l'équation qui sera établie à la question **16**, on supposera (sans perte de généralité) que la température (exprimée en degrés Celsius) est nulle partout dans la plaque pour $t < 0$. À l'instant $t = 0$, une lampe à infrarouge, positionnée du côté $x < 0$, émet un flash lumineux puissant. Il en résulte, en $t = 0$, un profil de température dans la plaque $T(x,0)$, dont la forme sera détaillée plus loin.

16 — Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x,t)$ dans laquelle on fera apparaître le coefficient de diffusion thermique D que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

On cherche des solutions sous la forme $T(x,t) = f(x) \times g(t)$.

17 — Déterminer deux équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. En déduire la forme générale de la fonction $T(x,t)$.

Pour modéliser l'effet de la lampe flash, on utilise le profil de température initial suivant :

$$T(x,0) = \begin{cases} \frac{\Gamma L}{\delta} & \text{si } 0 \leq x \leq \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où Γ , δ et L sont trois constantes. L'évolution est suffisamment rapide pour que la plaque puisse être supposée isolée, en première approximation, pour $t > 0$.

18 — Justifier qu'il faut chercher la solution du problème sous la forme :

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha_n t) [u_n \cos(k_n x) + w_n \sin(k_n x)]$$

19 — Exprimer les coefficients w_n , puis les coefficients k_n et α_n en fonction de n , L et D .

□ 20 — Établir l'expression des coefficients u_n et en déduire que :

$$T(x,t) = \Gamma \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi\delta}{L})}{\frac{n\pi\delta}{L}} \exp(-\alpha_n t) \cos(k_n x) \right]$$

L'épaisseur δ est supposée très petite devant L . Un capteur optique permet de mesurer la température $T(L,t)$ de la face arrière de la plaque (située à l'abscisse $x = L$) en fonction du temps t .

□ 21 — Déduire de l'expression obtenue à la question précédente, que l'expression approchée de $T(L,t)$, pour $t > 0$, est :

$$T(L,t) \simeq \Gamma \zeta(t) \quad \text{avec} \quad \zeta(t) = \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\alpha_n t) \right]$$

La figure 2 représente la courbe $\zeta(t)$ en fonction de $\alpha_1 t$.

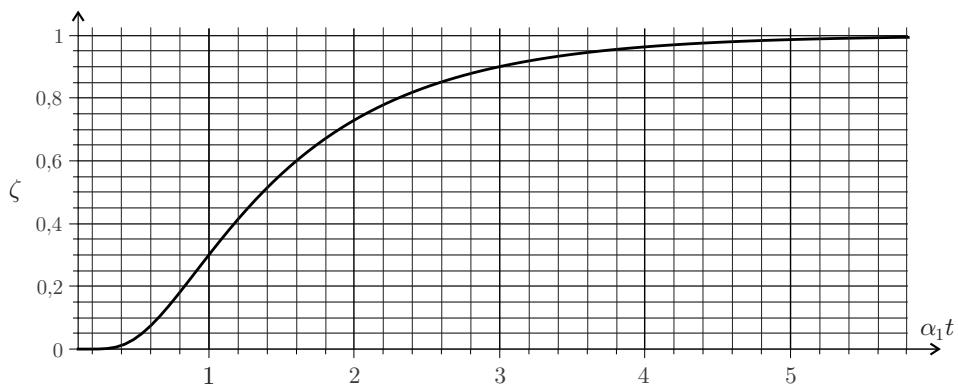


FIGURE 2 – Graphe de la fonction ζ en fonction de la variable $\alpha_1 t$ obtenu à l'aide d'une simulation en Python.

On note $t_{1/2}$ l'instant en lequel $\zeta(t_{1/2}) = 1/2$.

□ 22 — Exprimer une relation entre α_1 et $t_{1/2}$.

La figure 3 représente la courbe expérimentale $T(L,t)$ obtenue pour la plaque de cuivre étudiée.

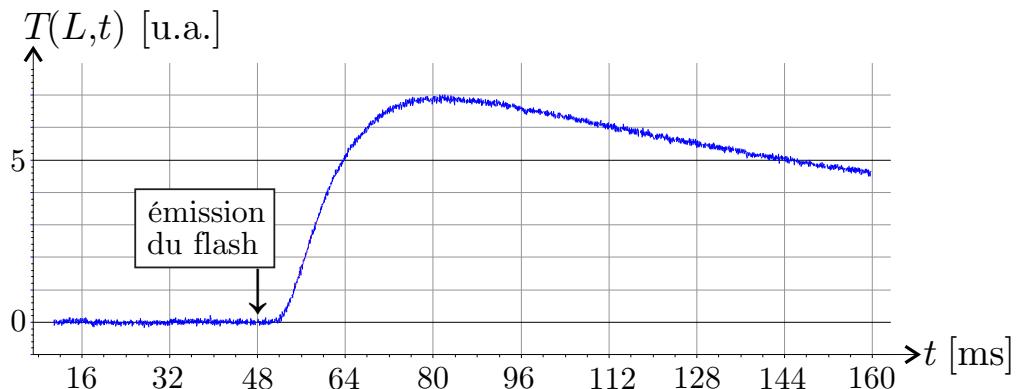


FIGURE 3 – Graphe expérimental de la température (en unités arbitraires) de la face de la plaque en $x = L$ en fonction du temps.

□ **23** — Estimer la valeur de la conductivité thermique du cuivre.

□ **24** — Les valeurs obtenues aux questions **4** et **23** (on prendra $T \simeq 300$ K) sont-elles compatibles avec la loi de WIEDEMANN-FRANZ ?



Données numériques

- $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C est la charge élémentaire
- $k_B = 1,4 \times 10^{-23}$ J · K $^{-1}$ est la constante de BOLTZMANN
- $c = 4,0 \times 10^2$ J · K $^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ est la capacité thermique massique du cuivre
- $\rho = 9,0 \times 10^3$ kg · m $^{-3}$ est la masse volumique du cuivre
- $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg est la masse d'un électron

Formulaire

Pour tout réel $\alpha \neq 0$ et pour tout couple (m,n) d'entiers positifs on a :

$$\int_0^\alpha \cos\left(\frac{\pi mu}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{\pi nu}{\alpha}\right) du = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Le marteau de THOR

Dans la légende nordique, MJÖLLNIR, le marteau de THOR, dieu de la foudre et du tonnerre, est l'arme la plus puissante des Dieux pour défendre l'Univers contre les forces du chaos. Selon une légende populaire tenace, le célèbre marteau aurait été forgé dans un matériau présent au cœur d'une naine blanche qui est, en quelque sorte, le cadavre d'une étoile.



FIGURE 1 – THOR au combat avec son célèbre marteau, illustration de JOHANNES GEHRTS (1901)

Le sujet proposé comporte 4 parties largement indépendantes, la première concerne quelques propriétés élémentaires du marteau. Les trois suivantes étudient l'étoile LAWD 21, une naine blanche représentative de ce type d'astre.

Les vecteurs sont généralement indiqués par des flèches, comme la position $\vec{r}(t)$ sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau $\|\hat{\mathbf{e}}_r\| = 1$. La valeur moyenne temporelle d'une quantité périodique dans le temps est indiquée par des crochets : $\langle f(t) \rangle$ ou $\langle \vec{r}(t) \rangle$. Un petit formulaire et les données nécessaires pour les applications numériques sont regroupés en fin d'énoncé. Les applications numériques comporteront un seul chiffre significatif.

I Le marteau

L'extrémité du marteau de THOR peut être assimilée à un parallélépipède de dimensions $15 \times 15 \times 21 \text{ cm}^3$. Il est constitué à partir du matériau d'une naine blanche qui possède typiquement les caractéristiques suivantes : sa masse est $M_\star = 1 \times 10^{30} \text{ kg}$, son rayon $R_\star = 1 \times 10^4 \text{ km}$.

- – 1.** Déterminer numériquement la masse du marteau de THOR.

THOR est un personnage doté de super-pouvoirs mais qui possède une morphologie comparable à celle d'un humain. Grâce à son marteau doté d'un petit manche, il est capable de briser des rochers.

- – 2.** Dans un environnement terrestre, proposer une évaluation numérique de la variation d'énergie potentielle du marteau lorsque THOR l'utilise pour frapper des rochers. Commenter le résultat en sachant que l'explosion d'un bâton de dynamite utilisé dans les mines ou les travaux publics dégage une énergie de l'ordre de 10^6 J .

II Analyse du spectre de l'étoile naine

L'objet LAWD 21 est la 21^e étoile du « *Luyten Atlas of White Dwarfs* » instauré dès le milieu du xx^e siècle par l'astronome hollandais WILLEM JACOB LUYTEN.

Elle est située dans la constellation boréale d'ORION. Très peu lumineuse dans le visible, son spectre est essentiellement situé dans l'ultra-violet lointain. Cette partie du spectre lumineux n'est pas accessible depuis la surface de la Terre, c'est le satellite FUSE (*Far Ultraviolet Spectroscopic Explorer*) qui a permis d'obtenir le spectre de la figure 2.

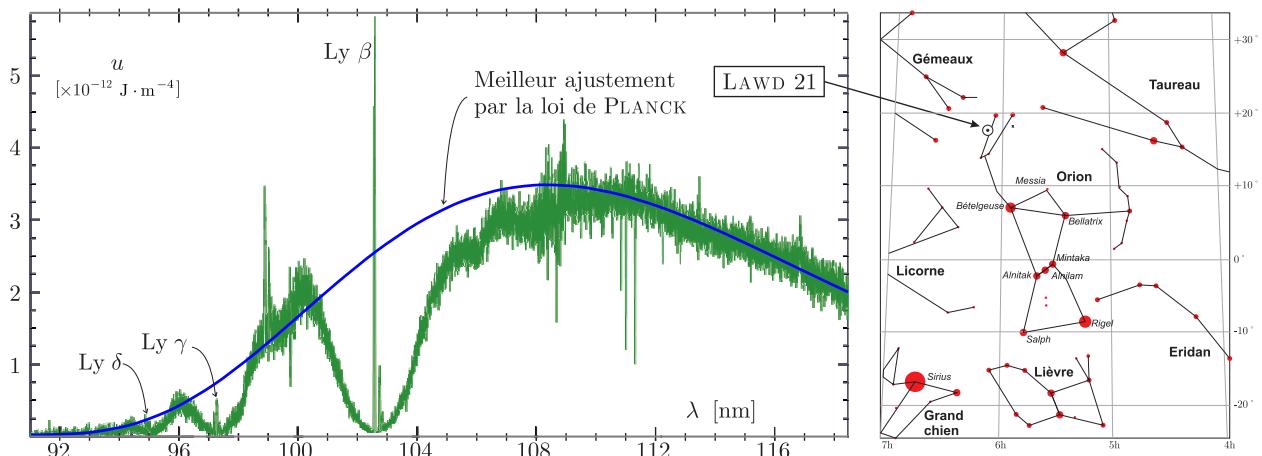


FIGURE 2 – Le spectre est sur la partie gauche avec le meilleur ajustement possible par une loi de PLANCK. Sur la partie droite de la figure on trouve la position dans le ciel de cette étoile. Ce spectre a été tracé en utilisant les données du satellite FUSE disponibles sur le site <http://archive.stsci.edu/fuse/>

Ce spectre d'émission est composite. Il contient des composantes discrètes, principalement les raies de la série de LYMAN. Ces raies sont issues de l'atmosphère de cette étoile en grande partie constituée d'hydrogène. Le spectre montre aussi une forte composante continue bien ajustée par une loi de PLANCK. Cette composante continue correspond à l'émission de corps noir issue de la surface de cette étoile.

Les niveaux d'énergie de l'électron de l'atome d'hydrogène dépendent du nombre quantique principal $n \in \mathbb{N}^*$, ils sont donnés par la relation $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = 13,6 \text{ eV}$.

- – 3.** Les raies de LYMAN du spectre de la figure 2 sont dues au retour de l'électron dans son niveau fondamental. Vérifier numériquement la vraisemblance de cette affirmation.

- – 4. La raie la plus marquée du spectre est la raie LYMAN β notée Ly β sur le spectre de la figure 2. On constate que la raie LYMAN δ est plus proche de la raie LYMAN γ que cette dernière est proche de la raie LYMAN β . Expliquer.
- – 5. La résolution spectrale du spectromètre utilisé dans la mission FUSE permet d'étudier la forme détaillée des différentes raies. Sur la figure 3 on peut voir que les raies possèdent une certaine largeur $\delta\lambda$ autour d'une longueur d'onde particulière. A quoi est dû cet élargissement ? En supposant que l'hydrogène qui émet ce rayonnement est un gaz parfait déterminer une relation entre notamment $\delta\lambda$, λ et une caractéristique thermodynamique de l'étoile.

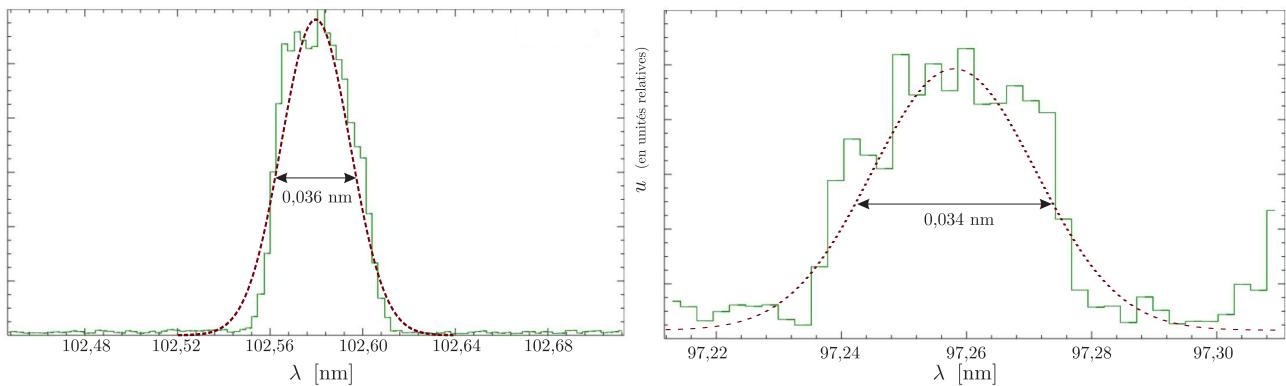


FIGURE 3 – Détail de deux raies caractéristiques du spectre de l'étoile LAWD21. Les histogrammes représentent les valeurs des densités spectrales énergétiques de rayonnement mesurées et les courbes en pointillé représentent un ajustement de l'histogramme par une distribution Gaussienne.

Avant l'avènement de la mécanique quantique, BOHR, en 1913, proposa un modèle classique de l'étude de l'électron dans l'atome d'hydrogène. Ce modèle ne prend en compte que l'interaction dominante entre l'électron et le noyau et suggère que l'électron effectue un mouvement circulaire de rayon r autour du noyau. Afin d'expliquer les spectres mesurés dès la fin du XIX^e siècle et, en particulier, les raies de LYMAN, il imposa que le moment cinétique scalaire L de l'électron dans son mouvement soit quantifié selon la loi :

$$L = n\hbar = n \frac{\hbar}{2\pi}$$

- – 6. Établir l'expression de E_0 en fonction de e , m_e , ε_0 et \hbar .

Comme nous l'avions remarqué au départ, le spectre de l'étoile naine présente une composante continue très bien décrite par la loi de PLANCK qui donne la densité spectrale énergétique de rayonnement u en fonction de la longueur d'onde λ . Cette densité s'exprime en $\text{J} \cdot \text{m}^{-4}$. Elle correspond à l'ordonnée du spectre de la figure 2. En 1900, PLANCK propose un modèle pour les interactions entre la matière et le rayonnement. La matière est supposée à l'équilibre thermique à la température T – c'est le modèle dit du *corps noir* – qui aboutit à l'expression suivante pour la densité spectrale de rayonnement :

$$u = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

où k_B est la constante de BOLTZMANN.

- – 7. On s'intéresse au maximum de la densité spectrale de rayonnement pour une température T fixée. En posant $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, déterminer l'équation vérifiée par x qui assure un extremum à la fonction u . On expliquera rapidement pourquoi la recherche d'un extremum pour $u(x)$ permet de trouver un extremum pour $u(\lambda)$.
- – 8. Montrer, moyennant une approximation raisonnable, que u est maximale pour une valeur entière de x . En déduire, dans cette approximation, une expression du produit $\lambda_{\max} T$ de la longueur d'onde λ_{\max} obtenue lorsque u est maximale et de la température T en fonction de constantes fondamentales de la physique.

La loi précédente porte le nom de loi de WIEN, elle s'écrit numériquement sous la forme :

$$\lambda_{\max} T \simeq 3 \text{ mm} \cdot \text{K}$$

- – 9. Déterminer la température de la surface de l'étoile naine LAWD21.

III Estimation du rayon de la naine blanche

L'essentiel de la matière constituant le cœur d'une naine blanche est constitué d'atomes de carbone entièrement ionisés. Le numéro atomique du carbone est $Z = 6$. On considère uniquement l'isotope 12 du carbone.

- – 10. L'énergie de première ionisation du carbone est $E_{i1} \simeq 11 \text{ eV}$, celle de seconde ionisation $E_{i2} \simeq 24 \text{ eV}$, et celle de dernière ionisation est $E_{i6} \simeq 490 \text{ eV}$. Un atome de carbone présent à la surface de la naine blanche est-il à l'état atomique ou ionisé ? On précisera le cas échéant son degré d'ionisation.
- – 11. En considérant que l'essentiel de la masse M_\star de la naine blanche est constitué par des atomes de carbone totalement ionisés, exprimer N_e le nombre d'électrons contenus dans cette étoile en fonction de M_\star et m_p la masse d'un proton.

Selon la théorie de FOWLER, les électrons contenus dans la naine blanche constituent un gaz parfait quantique au sein duquel il existe une pression dite de dégénérescence quantique. La pression de dégénérescence quantique liée aux noyaux des atomes de carbone est négligeable devant celle des électrons. À l'issue de son calcul, FOWLER trouve l'expression de la pression de dégénérescence quantique qui règne dans la naine blanche :

$$P_e = \frac{\pi^{4/3}}{15} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{3N_e}{V_\star} \right)^{5/3}$$

où m_e est la masse d'un électron et V_\star le volume de l'étoile.

En 1930, à l'âge de 19 ans, le physicien indien CHANDRASEKHAR intégra le prestigieux laboratoire d'EDDINGTON et de FOWLER pour y réaliser son doctorat. Il développa la théorie de FOWLER en tenant compte de la Relativité restreinte alors que FOWLER n'avait travaillé que dans le cadre de la mécanique classique. Dans la suite, nous resterons dans le cadre de la théorie de FOWLER.

- – 12. Par analyse dimensionnelle, justifier le fait que P_e est bien une pression.

On considère que la naine blanche est à l'équilibre lorsque la pression de dégénérescence quantique est compensée par la pression d'origine gravitationnelle. Il nous faut donc déterminer l'expression de cette pression gravitationnelle.

- – 13. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle existant entre deux corps ponctuels de masse m_1 et m_2 séparés par une distance r . En déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle de ce système à deux corps.

Pour la naine blanche, l'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$E_g = -\frac{3GM_\star^2}{5R_\star}$$

- – 14. En considérant le travail élémentaire des forces de gravitation lors d'une variation dV_\star du volume de l'étoile, donner l'expression de la pression d'origine gravitationnelle.
- – 15. Déterminer l'expression du rayon R_\star de la naine blanche à l'équilibre en fonction de G , \hbar , m_e , m_p et M_\star . Sachant que $\frac{1}{8} \frac{(9\pi)^{2/3}}{1,7^{5/3}} \simeq \frac{1}{2}$, et en prenant $M_\star = 10^{30} \text{ kg}$, estimer l'ordre de grandeur de R_\star selon la théorie de FOWLER.

IV Au cœur de la naine blanche

Au cœur de l'étoile, les atomes de carbone sont intégralement ionisés. La répulsion électrostatique entre les noyaux de carbone peut être assez forte pour les contraindre à se placer au voisinage d'un nœud d'un réseau que nous supposerons cubique de côté a . Ce nœud est le site de chaque noyau. Chaque site est donc au centre d'une petite cellule cubique de côté a . L'ensemble forme donc a priori un solide de type cristallin. Dans un modèle simple mais effectif, un volume V de ce solide fond lorsqu'en moyenne sur l'ensemble de celui-ci, le carré de l'amplitude s^2 du mouvement d'agitation des noyaux autour de leur site devient trop important à l'échelle du pas du réseau a . Selon le critère de LINDEMANN proposé en 1910, en écrivant $s^2 = \gamma^2 a^2$, la fonte se produit dès que γ devient de l'ordre de 10%.

- – 16. Exprimer le nombre de noyaux d'atomes de carbone N_c contenu dans la naine blanche en fonction de N_e puis en fonction de m_p et M_\star . En déduire une expression de a en fonction de m_p , M_\star et R_\star . L'évaluation de la valeur de a conduit à $a \simeq 4 \times 10^{-12}$ m.

Le mouvement d'un noyau autour de son site est sous le contrôle du champ électrique dans ce voisinage. Dans ce type de solide, les électrons sont totalement délocalisés dans le solide et sont assimilables à un fluide de densité uniforme tandis que les noyaux sont agités de petits mouvements autour de leur site. Dans le modèle de WIGNER-SEITZ, on représente une cellule élémentaire par une boule de rayon a dont la densité volumique de charge est uniforme et égale à $\rho = -\frac{6e}{a^3}$. On repère la position du noyau de l'atome de carbone de masse $m_c = 12m_p$ par un point M tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\hat{e}_r$ où \hat{e}_r est le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques. Le point O est le centre de la distribution sphérique de charge dans laquelle évolue le noyau. On suppose par la suite que l'on a toujours $r < a$.

- – 17. Montrer que le champ électrique dans lequel évolue un noyau est : $\vec{E} = -\frac{2er}{\varepsilon_0 a^3} \hat{e}_r$.
- – 18. En restant dans le cadre de la mécanique classique, justifier que $\vec{r}(t)$ est confiné dans un plan. Montrer que les coordonnées cartésiennes de $\vec{r}(t)$ dans ce plan sont des oscillations harmoniques dont on exprimera la pulsation ω en fonction e , a , m_p et ε_0 . Quelle est la nature de la courbe $\mathcal{C} = \{t \in \mathbb{R}, \vec{r}(t)\}$?
Exprimer la constante $s_0^2 = \langle \vec{r}^2(t) \rangle$ en fonction de deux des quatre conditions initiales du problème plan.
- – 19. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique \mathcal{E}_{cl} d'un noyau en fonction de ω , m_p et s_0^2 .

Le résultat classique que nous venons d'obtenir est spécifique à chaque noyau qui est caractérisé par une valeur de s_0^2 . A l'échelle d'un échantillon de volume V de l'étoile, on peut le généraliser en remplaçant s_0^2 par sa valeur moyenne s^2 sur l'ensemble des valeurs de s_0^2 dans le volume considéré.

Une autre façon de procéder est de considérer directement les aspects statistiques de ce problème dans le cadre de la mécanique quantique. Comme nous venons de le voir lors des deux questions précédentes les noyaux peuvent être assimilés à des oscillateurs harmoniques de pulsation commune mais d'amplitudes différentes. En mécanique quantique, l'étude d'un oscillateur harmonique de pulsation ω permet de montrer que son énergie est quantifiée par un entier naturel i et s'exprime selon :

$$\mathcal{E}_i = \left(i + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}$$

Dans un cadre statistique simplifié, on peut assimiler un volume V occupé par les noyaux dans l'étoile à une assemblée d'oscillateurs harmoniques de pulsation ω en équilibre thermique à la température T .

- – 20. Dans le cadre de la physique statistique, déterminer l'expression de la probabilité p_i pour qu'un oscillateur harmonique décrit par la mécanique quantique possède l'énergie mécanique \mathcal{E}_i . On pourra poser $\beta = \frac{1}{k_B T}$.
- – 21. En déduire l'expression de l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique \mathcal{E}_{qs} dans le cadre de ce modèle statistique quantique.

- – 22. En rapprochant l'expression de \mathcal{E}_{qs} de la valeur classique moyennée sur un volume V , montrer que

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 \frac{1}{\tanh \frac{\theta}{T}} \quad \text{avec } \gamma_0^2 = A \frac{\hbar}{e} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{m_p a}} \quad \text{et } \theta = B \frac{\hbar e}{k_B \sqrt{\varepsilon_0 m_p a^3}}$$

on précisera les valeurs simples des deux constantes numériques A et B .

- – 23. Sachant que $\gamma_0^2 \simeq 10^{-3}$ et $\theta \simeq 5,5 \times 10^5$ K, évaluer γ à la surface de la naine blanche et au cœur de celle-ci où on estime que la température est $T_c \simeq 10^7$ K. En déduire l'état de la matière constituant l'étoile à la fois en surface et plus en profondeur.

Formulaire

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) de vecteurs unitaires associés $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$, on donne pour une fonction scalaire $f(r, \theta, \varphi)$ son gradient et son laplacien :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\phi \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Données numériques

Constante de PLANCK : $h = 6,6 \times 10^{-34}$ J · s

Constante de PLANCK réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \times 10^{-34}$ J · s

Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,4 \times 10^{-23}$ J · K⁻¹

Constante de NEWTON : $G = 6,7 \times 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻²

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}$ F · m⁻¹

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8$ m · s⁻¹

Masse du proton et masse du neutron : $m_p = m_n = 1,7 \times 10^{-27}$ kg

Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg

Charge de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C



FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Déformations élastiques

Ce sujet est consacré à l'étude de certaines propriétés de systèmes élastiquement déformables. Les parties **I**, **II** et **III** sont très largement indépendantes sous réserve de revenir aux définitions de la constante de raideur k d'un ressort et du module d'élasticité E d'un matériau présentées dans la partie **I**.

La partie **I** étudie les ressorts élastiques linéaires et leurs associations à partir de la *loi de Hooke*. La partie **II** en propose une généralisation en abordant la description du module d'élasticité des solides déformables. Enfin, la partie **III** décrit une expérience de mouvement brownien reliant les oscillations d'un ressort et l'agitation thermique du gaz dans lequel le dispositif expérimental est plongé.

I Ressorts et loi de Hooke

Le physicien anglais ROBERT HOOKE est le premier à avoir énoncé (en 1676) la loi associée à la déformation élastique d'un ressort, établissant son allongement comme une fonction linéaire de la force exercée sur ses extrémités. Il ne s'agit en général que du premier ordre d'un développement en série de Taylor et la loi linéaire de Hooke peut donc devenir inexacte pour les grandes déformations.

I.A Mouvements d'un ressort

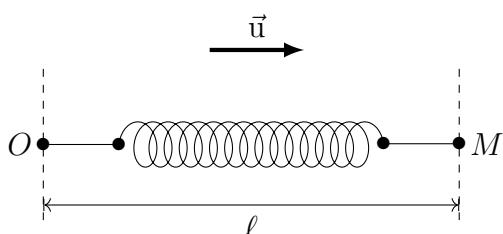


FIGURE 1 – Loi de Hooke

On notera k la raideur d'un ressort élastique, de masse négligeable, de longueur au repos ℓ_0 . Si l'une de ses extrémités est fixe en O , l'exercice d'une force de tension $\vec{T} = -T\vec{u}$ (où \vec{u} est un vecteur unitaire) sur l'extrémité mobile M du ressort induit une déformation de celui-ci de sorte que (cf. figure 1) $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}$ soit colinéaire à \vec{T} avec $T = k[\ell - \ell_0]$.

C'est la *loi de Hooke*. On note aussi $\sigma = 1/k$ la *souplesse* du ressort.

- – 1. Montrer que la force de tension ainsi exercée sur M est conservative et déterminer l'énergie potentielle $E_p(T, \sigma)$ associée en fonction de T et σ .

Les deux extrémités P et M d'un tel ressort sont maintenant astreintes à se déplacer le long de l'axe fixe et horizontal (Ox) du référentiel galiléen (\mathcal{R}). Deux points matériels de masse $m_M = m_1$ et $m_P = m_2$ sont attachés aux extrémités du ressort et leur action sur l'axe (Ox) est notamment décrite par les forces de frottement $\vec{f}_{\rightarrow M} = -\lambda_1 \vec{v}_M$ et $\vec{f}_{\rightarrow P} = -\lambda_2 \vec{v}_P$ où on a noté \vec{v}_M et \vec{v}_P les vitesses de M et P dans ce référentiel (cf. figure 2) ; on notera aussi $\overrightarrow{OM} = x_1(t)\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{OP} = x_2(t)\vec{e}_x$.

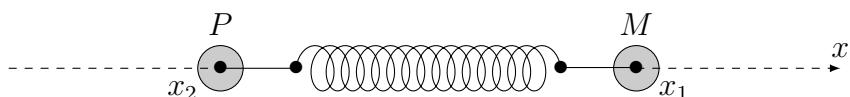


FIGURE 2 – Deux masses reliées par un ressort

- – 2. Établir les équations différentielles vérifiées par $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
- – 3. On en cherche des solutions de la forme $x_i(t) = x_{0i} + a_i e^{\mu t}$ où x_{01}, x_{02}, a_1, a_2 et μ sont des constantes. Déterminer et commenter la relation liant x_{01} et x_{02} .
- – 4. Montrer que la condition $a_i \neq 0$ impose une équation algébrique du quatrième degré vérifiée par μ , que l'on écrira en fonction de $m_1, m_2, \lambda_1, \lambda_2$ et k .
- – 5. On suppose enfin ici que $m_1 = m_2 = m, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Montrer qu'il n'existe alors que deux solutions physiquement différentes de cette équation, pour chacune d'elles on exprimera μ ainsi que le rapport a_2/a_1 et on précisera la nature du mouvement des masses.

I.B Association de ressorts

On associe maintenant deux ressorts élastiques en *série*; on notera $\sigma_1 = 1/k_1$ et $\sigma_2 = 1/k_2$ leurs souplesses, ℓ_{01} et ℓ_{02} leurs longueurs au repos et on suppose qu'ils restent alignés le long de la droite (Ox) liant leurs extrémités les plus éloignées (cf. figure 3). On néglige la masse du point d'attache A .

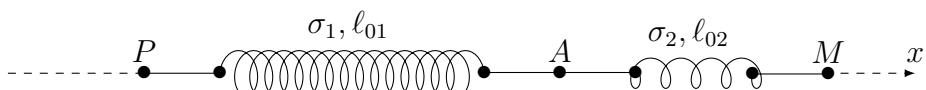


FIGURE 3 – Association de ressorts en série

- – 6. Exprimer, en fonction notamment des abscisses x_P, x_A et x_M les forces de tension exercées par les deux ressorts.
En déduire qu'ils sont équivalents à un unique ressort donc on déterminera la souplesse σ ainsi que la longueur à vide ℓ_0 .
- – 7. Représenter sur un schéma l'association de deux ressorts en *parallèle* et donner l'expression de la raideur équivalente à cette association.

De ces études, on peut déduire ce qui suit : la raideur k d'un fil métallique élastique de longueur L et de section (constante) s s'exprime sous la forme :

$$k = E \frac{s}{L} \quad (1)$$

où E est une grandeur caractéristique du matériau appelée *module d'élasticité*; cette notion a notamment été présentée par l'anglais THOMAS YOUNG en 1807.

- – 8. Rappeler les analogies de cette relation avec celles exprimant les résistance et/ou conductance électrique d'un élément conducteur métallique.
En déduire la dimension du module d'élasticité.

I.C Tensions dans une tige élastique

Dans cette partie I.C on néglige les effets de la pesanteur. Une tige métallique homogène, de section s , de masse M et de longueur au repos L , caractérisée par le module d'élasticité E , est étirée le long de son axe horizontal par la rotation entretenue à vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z$ de son point d'attache O autour de l'axe vertical (Oz). Du fait des effets centrifuges dus à la rotation, la tige s'allonge en régime permanent; l'élément de tige qui se trouve au repos à la distance r passe à la distance $r + \xi(r)$ (cf. figure 4).

On étudie le système matériel Σ qui, au repos, est compris entre les distances r et $r + dr$ de l'axe (Oz).

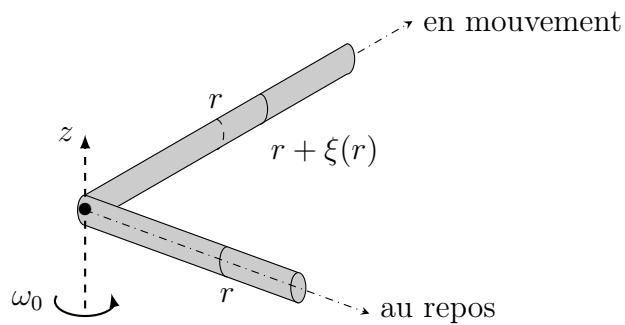


FIGURE 4 – Élongation lors d'un entraînement centrifuge

- – 9. Exprimer la masse dM de Σ en fonction notamment de dr . Justifier que ce système se comporte comme un ressort de souplesse $d\sigma = \frac{dr}{E_s}$.
- – 10. Exprimer la force de tension $T(r)$ exercée par Σ sur la partie *intérieure* de la tige (celle comprise entre 0 et r) en fonction de E , s et $\partial\xi/\partial r$.
- – 11. En déduire la condition d'équilibre relatif de Σ dans le référentiel entraîné avec la tige en rotation sous la forme $\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} = -\chi r$ où χ est une constante que l'on exprimera en fonction de E , ω_0 , L , M et s .
- – 12. Préciser la condition aux limites aux extrémités ($r = 0$ et $r = L$) de la tige pour la fonction ξ ; en déduire $\xi(r)$. Exprimer aussi $T(0)$ en fonction de M , ω_0^2 et L ; commenter l'expression obtenue.

II Module d'élasticité des solides déformables

II.A Estimation en ordre de grandeur

Le module d'élasticité, relié à la raideur k d'une tige élastique de longueur L et de section s par la relation (1), est lié aux variations d'énergie de la tige lors d'une dilatation ou d'une compression. L'énergie concernée est, dans le cas d'un matériau métallique, celle des électrons, de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg au sein des mailles du cristal métallique; on notera a la dimension caractéristique de ces mailles.

Dans une première approche heuristique, on fait l'hypothèse que le module d'élasticité ne dépend que de m_e , a et de la constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s sous la forme $E = C m_e^\alpha h^\beta a^\gamma$ où la constante adimensionnée C est de l'ordre de grandeur de l'unité.

- – 13. Par analyse dimensionnelle, déterminer les entiers α , β et γ .
- – 14. Rappeler l'ordre de grandeur usuel de a ; en déduire celui de E .

II.B Modèle quantique du puits infini 3D

On rappelle ici l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m lorsque l'interaction avec l'extérieur est décrite par le potentiel d'interaction $U(\vec{r})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

où $j^2 = -1$, $\Psi(\vec{r}, t)$ est la fonction d'onde et $\hbar = h/2\pi$. Dans ce qui suit, on étudie une particule dans un *puits de potentiel infini* défini à trois dimensions par $U = \text{cte} = U_0$ pour $0 < x < a_1$, $0 < y < a_2$ et $0 < z < a_3$ tandis que $U \rightarrow +\infty$ en dehors de cette région bornée de l'espace.

- – 15. Quelles sont l'interprétation physique et la dimension de la fonction d'onde $\Psi(\vec{r},t)$?
- – 16. On cherche des solutions de l'équation de Schrödinger de la forme $\Psi(\vec{r},t) = \Phi(x,y,z)W(t)$. Quelle est la forme de $W(t)$? Comment s'appelle ce type de solution?
- – 17. On suppose encore $\Phi(x,y,z) = F_1(x)F_2(y)F_3(z)$. Déterminer les fonctions F_i ($i = 1, 2, 3$) en fonction de a_i et de trois nombres entiers $n_i \in \mathbb{N}^*$, à une constante multiplicative arbitraire près.
- – 18. Montrer que l'énergie \mathcal{E}_f de l'état fondamental de la particule s'écrit :

$$\mathcal{E}_f = U_0 + \frac{\hbar^2}{8m} \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right] \quad (3)$$

La particule de masse m , qui reste dans son état fondamental, évolue lentement d'un état isotrope où le volume $V = a^3$ du puits est celui d'un cube de côté a à une *situation comprimée* où une des dimensions $a_1 = a - \delta a < a$ tandis que les deux autres dimensions augmentent simultanément et symétriquement ($a_2 = a_3$ à tout instant) de manière à maintenir constant le volume $V = a_1 a_2 a_3$ du puits.

- – 19. Exprimer la variation $\Delta\mathcal{E}_1$ de l'énergie de l'état fondamental qui accompagne cette transformation.
- – 20. On suppose $\delta a \ll a$. Montrer qu'au premier ordre non nul en $\delta a/a$ la variation d'énergie se met sous la forme $\Delta\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}K\delta a^2$, on exprimera K en fonction de \hbar , m et a .
On rappelle que $(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$.

II.C Compression d'une tige

On s'intéresse maintenant à une tige (cf. figure 5) de section constante s , d'axe (Ox) et de longueur L , réalisée dans un matériau qui peut être décrit comme dans la partie **II.B** : il est divisé à l'échelle microscopique en zones cubiques de côté a et supposées alignées avec les axes de coordonnées ($Oxyz$).

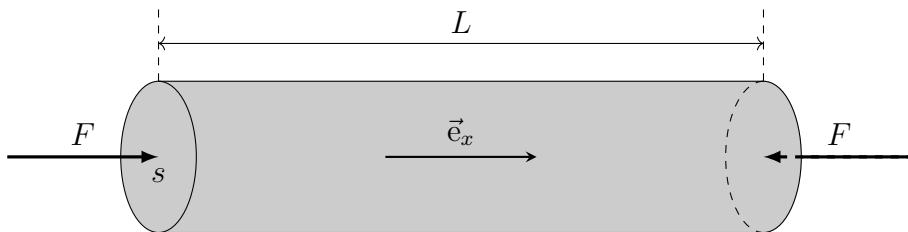


FIGURE 5 – Compression d'une tige

Un opérateur exerce alors sur chaque extrémité de la tige une force F uniformément répartie de manière à diminuer la longueur de la tige qui passe de L à $L - \delta L$. On admet que le travail de cette force a pour effet l'augmentation de l'énergie des électrons du milieu, à raison d'un électron de valence par cube élémentaire de côté a .

- – 21. Exprimer, en fonction de a , L et s le nombre N de cubes élémentaires de côté a à l'intérieur de la tige.
- – 22. En supposant la compression uniforme, relier la variation δa de la dimension de cube selon (Ox) à L , a et δL .
- – 23. En déduire l'augmentation d'énergie $\Delta\mathcal{E}_t$ de la tige ; en déduire l'expression de F en fonction de K , s , a et δL .
- – 24. En déduire l'expression du module d'élasticité E , défini par la relation (1), en fonction de \hbar , a et m_e . Comparer au résultat de la partie **II.A**.

III L'expérience de Kappler

On dispose au sein d'un gaz thermostaté à la température θ une plaque de masse m retenue par un ressort vertical de raideur $k = 1/\sigma$, disposée dans le champ de pesanteur d'intensité g (figure 6). Sous l'action des chocs des molécules du gaz, cette plaque se déplace de manière aléatoire le long du seul axe vertical (Oz) de part et d'autre de sa position d'équilibre z_0 ; on parle de *mouvement brownien*.

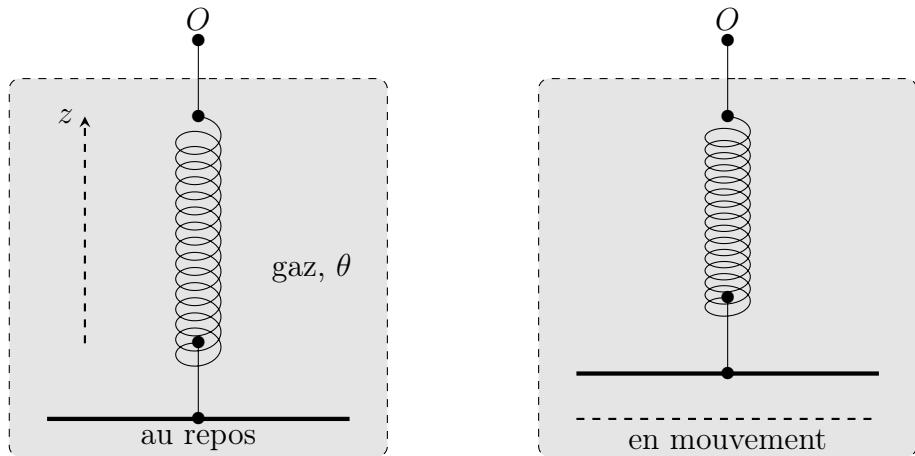


FIGURE 6 – Oscillations dues au mouvement brownien

- – 25. Le point d'attache du ressort est en $z = 0$ et on note ℓ_0 sa longueur au repos. Déterminer la position d'équilibre z_0 puis exprimer l'énergie potentielle totale dont dérivent les forces élastiques et de pesanteur en fonction seulement de σ et $z' = z - z_0$.

Dans ce qui suit on pourra introduire la fonction $E_p(z') = \frac{z'^2}{2\sigma}$.

On admet que les valeurs de z' lors du mouvement brownien sont alors régies par la loi de probabilité de Boltzmann : on note $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann et $P(z')dz'$ est la probabilité pour que la plaque soit disposée entre les altitudes z' et $z' + dz'$. On admet donc l'expression $P(z') = \frac{1}{\zeta(\theta)} \exp(-\gamma(\theta)z'^2)$.

On donne les valeurs des intégrales $\int_0^\infty e^{-at^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ et $\int_0^\infty t^2 e^{-at^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$.

- – 26. Exprimer $\gamma(\theta)$ et calculer $\zeta(\theta)$ en fonction de $k_B\theta$ et σ .
 □ – 27. Sans faire de calculs, que vaut la valeur moyenne $\langle z' \rangle$?
 □ – 28. Calculer la valeur moyenne $\langle z'^2 \rangle$; commenter, au regard du théorème d'équipartition.

En 1931, le physicien allemand EUGEN KAPPLER a publié dans la revue *Annalen der Physik* les résultats d'une expérience basée sur ce principe en utilisant un miroir suspendu à un fil de torsion vertical (ressort en rotation). L'expérience concluait à la validité de la loi de Boltzmann avec une mesure précise de la constante de Boltzmann.

- – 29. Connaissez-vous d'autres cas de mouvement brownien ? D'autres expériences ayant conduit à une vérification expérimentale de la loi de Boltzmann ?

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Thermodynamique du froid

Le sujet, consacré à l'étude de certaines propriétés physiques à très basse température, comporte deux problèmes totalement indépendants numérotés **I** (étude de transferts thermiques conductifs et convecto-conductifs) et **II** (étude d'un réfrigérateur par détente d'un gaz).

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{w}), à l'exception des vecteurs unitaires notés avec un chapeau (\hat{u}). Les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les *données numériques* nécessaires et un *formulaire*, relatif en particulier aux coordonnées sphériques, figurent en fin d'énoncé.

I Refroidissement des supraconducteurs

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ($T < T_{sc}$) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique *permanent* sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique λ de la loi de FOURIER, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'*intérieur* du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur laplacien.}$$

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de NEWTON : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température T vers le fluide de température T_f , par unité de temps et par unité d'aire, est $j_{\text{par}} = k(T - T_f)$ où k est une constante. Les études menées en **I.A** et **I.B** sont totalement indépendantes.

I.A Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Le matériau (supraconducteur) étudié dans cette partie **I.A** à la forme d'une boule de rayon R , de température uniforme $T(t)$. Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante $T_0 < T_{sc}$ (cf. figure 1).

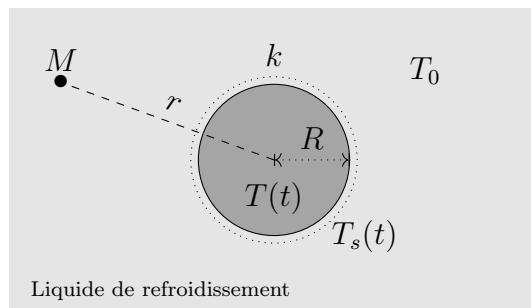


FIGURE 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

- 1. Donner, en les justifiant, les unités (ou les dimensions) de k et λ .
 Établir, dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus.

- 2. Rappeler l'expression de la diffusivité thermique D_{th} d'un matériau.

À quelle condition, portant sur la durée Δt du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme *uniforme* est-elle légitime ? *On se placera dans ce cas dans la suite.*

- 3. Exprimer en fonction des données la capacité thermique C_{th} de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement R_{th} associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température T_f en un point M du liquide supposé immobile ne dépend que de la distance r au centre O de la boule (figure 1). On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée λ' .

- 4. Montrer que $T_f(r,t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] R/r$

- 5. Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique ?

Exprimer la résistance thermique R'_{th} associée au refroidissement conductif, en fonction de λ' et R .

On suppose pour finir que $\lambda' \gg R k$.

- 6. Déterminer l'équation d'évolution de la température $T(t)$ de la boule solide ; on posera

$$\tau = \frac{\rho R c}{3k}.$$

- 7. On notera $T_i = T(t=0)$ la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe $T(t)$ et exprimer la durée Δt au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur \mapsto supraconducteur.

I.B Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

L'absence de résistivité dans les matériaux supraconducteurs n'empêche pas, notamment dans le cadre de régimes transitoires électromagnétiques, l'existence de dissipations de puissance dues au champ électrique induit. Il s'ensuit un chauffage local du matériau supraconducteur. Le passage éventuel de celui-ci au-dessus de la température critique T_{sc} a alors un effet catastrophique : l'effet Joule apparaît, la température augmente de plus en plus et la surchauffe du bobinage peut détruire celui-ci : c'est le phénomène de *quench* (voir figure 2).



FIGURE 2 – Fuite d'hélium suite à la destruction (*quench*) d'un aimant supraconducteur utilisé pour la RMN. Département de Chimie de l'université de l'Alberta

On va dans ce qui suit s'intéresser aux conditions de refroidissement propres à éviter le phénomène de quench.

Le matériau supraconducteur étudié a la forme d'un fil cylindrique de rayon R , de très grande longueur (figure 3). Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient une température uniforme $T_0 < T_{sc}$, avec lequel les échanges thermiques se font selon la loi de NEWTON. La totalité du fil cylindrique est le siège d'une production de puissance électromagnétique avec la densité volumique supposée uniforme et constante p_u .

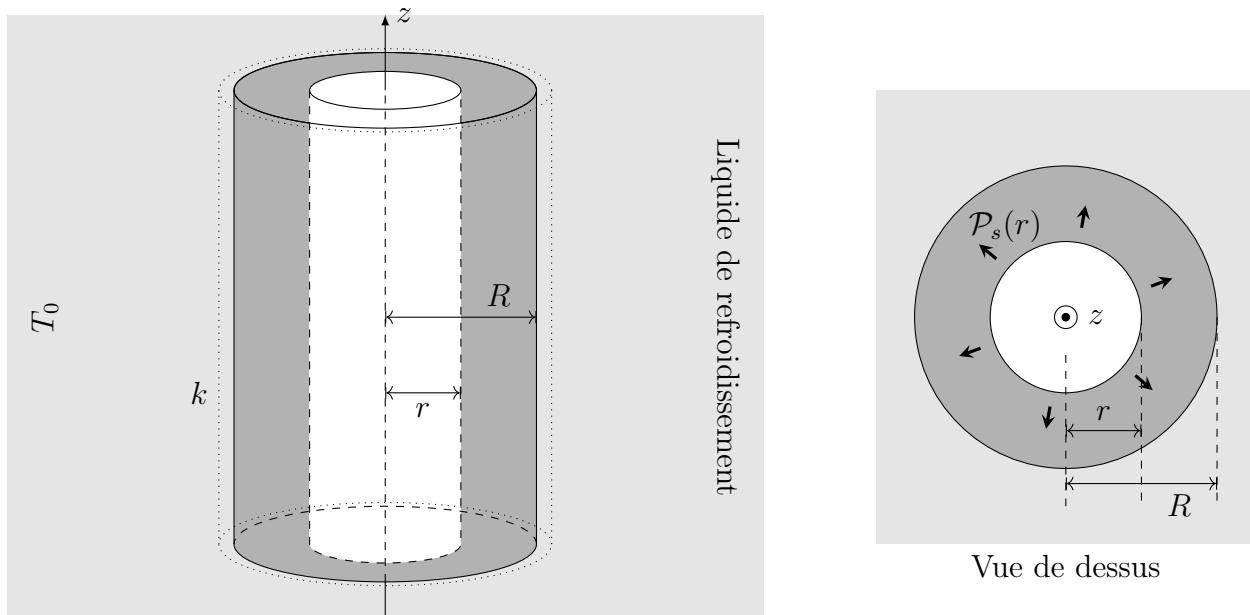


FIGURE 3 – Fil supraconducteur en régime stationnaire

- – 8. Exprimer la puissance totale $\mathcal{P}_s(r)$ évacuée par une hauteur H de la partie du fil située au plus à la distance r de l'axe avec $0 \leq r < R$, cf. figure 3.
- – 9. En déduire, en régime permanent, l'intensité $j_{th}(r)$ de la densité volumique de flux thermique conductif dans le fil.
- – 10. Déterminer l'expression de la température de surface T_s en fonction de T_0 , k , p_u et R .
- – 11. À quel endroit dans le fil la température est-elle maximale ?
Déterminer l'expression de la valeur T_{\max} correspondante.
Montrer que le phénomène de *quench* ne se produit pas si p_u est inférieur à une valeur critique p_{\max} que l'on exprimera.

II Réfrigérateur à détente de gaz

Les premières études des propriétés des systèmes physiques à très basses températures, et en particulier la découverte de la supraconductivité, ont été faites en utilisant des réfrigérateurs à détente de gaz, à la suite des travaux des néerlandais VAN DER WAALS et KAMERLINGH ONNES. Les parties **II.A** (étude statistique des gaz parfaits), **II.B** (modèle énergétique de VAN DER WAALS) et **II.C** (refroidissement par détente) sont indépendantes.

*On n'oubliera pas que le modèle utilisé pour la description thermodynamique des fluides n'est pas le même : modèle des gaz parfaits dans la partie **II.A** et modèle avec interactions entre molécules dans la suite.*

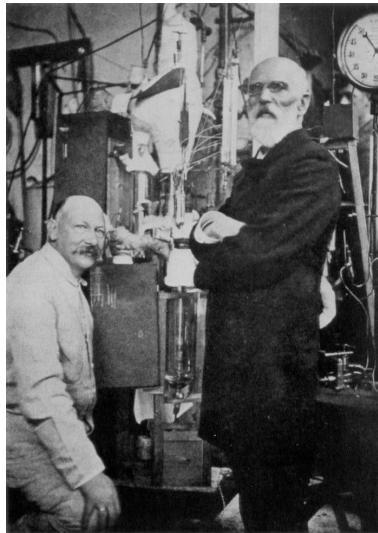


FIGURE 4 – KAMERLINGH ONNES (à gauche) et VAN DER WAALS (à droite) photographiés devant la machine à liquéfier l'hélium, laboratoire de l'Université de Leiden, 1908

II.A Thermodynamique des gaz parfaits

On étudie ici un système thermodynamique formé de N particules réparties sur p niveaux d'énergie ε_j ($j = 1, 2, \dots, p$) non dégénérés. Le système est maintenu à température constante T par contact avec un thermostat et on notera $\beta = 1/k_B T$.

- – 12. Rappeler la loi statistique de BOLTZMANN. On notera $Z(\beta) = \sum_{j=1}^p \exp(-\beta\varepsilon_j)$.
- – 13. Exprimer l'énergie moyenne $\bar{\varepsilon}$ d'une des N particules du milieu en fonction de $Z(\beta)$ et sa dérivée.
En déduire l'expression de l'énergie interne $U(\beta)$ du système.
- – 14. Montrer qu'on peut exprimer, en fonction d'une somme (qu'on ne cherchera surtout pas à calculer), l'écart-type σ_ε associé à la moyenne $\bar{\varepsilon}$.
Quel est l'écart-type σ_U associé ? Que peut-on en déduire ?

Les états possibles du système étant très nombreux, les sommes exprimant $Z(\beta)$ et donc $U(\beta)$ explicitées ci-dessus sont remplacées par des intégrales : le nombre dg d'états distincts correspondant à un intervalle d'énergie $d\varepsilon$ s'exprime alors sous la forme $dg = q(\varepsilon)d\varepsilon$ où $q(\varepsilon)$ est la *densité d'états*, on adoptera l'expression $Z(\beta) = \int q(\varepsilon) \exp(-\beta\varepsilon) d\varepsilon$ où l'intégrale est étendue à toutes les valeurs possibles de l'énergie ε .

- – 15. Préciser l'unité (ou la dimension) de la densité d'états $q(\varepsilon)$.

On étudie maintenant les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait monoatomique formé de N atomes identiques, décrits dans le cadre de la mécanique classique : un atome de masse m a pour vecteur position $\vec{r}(t)$ et pour vitesse $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ relativement au référentiel d'étude, supposé galiléen et lié au récipient fixe, de volume V , qui contient ce gaz. L'énergie des molécules est purement cinétique donc $0 \leq \varepsilon < +\infty$.

- – 16. Montrer que $q(\varepsilon)$ est proportionnel à $\sqrt{\varepsilon}$. Pour la suite, on pourra poser $q(\varepsilon) = Q\sqrt{\varepsilon}$ sans préciser la constante Q .
- – 17. En déduire l'expression de $Z(\beta)$ en fonction de β , Q et de l'intégrale $A = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$ (il est aussi inutile de calculer A).

- – 18. Déterminer enfin l'énergie interne U du gaz, en fonction de N et β ; commenter le résultat obtenu et proposer une généralisation dans le cas d'un gaz parfait diatomique.

II.B Le modèle de van der Waals

On peut raffiner le modèle du gaz parfait en considérant maintenant le modèle d'un fluide \mathcal{F} constitué de molécules assimilées à des sphères de rayon r_0 en interactions : l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules est attractive, ne dépend que de la distance r entre leurs centres et s'écrit $\varepsilon_p = -\frac{\alpha}{r^6}$ où $r > 2r_0$ et α est une constante. Le volume total occupé par le fluide est V , la température T et l'énergie cinétique moyenne du gaz sera notée $\bar{E}_c = \frac{Nk_B}{\gamma - 1}T$.

- – 19. Quelle est la nature des interactions décrites ici ?

Quel est le signe de α ?

Pour le calcul de l'interaction entre une molécule donnée de centre O (à l'origine des coordonnées) et le reste du gaz, on admet que les $N - 1$ autres molécules sont réparties uniformément en fonction de la distance r avec une densité partielle $n^* = \frac{N}{V}$ uniforme pour $r > 2r_0$ (voir la figure 5).

- – 20. Quel est le nombre (moyen) dN de molécules dont le centre est situé à une distance de O comprise entre r et $r + dr$?

En calculant une intégrale, déduire l'énergie potentielle d'interaction moyenne $\bar{\varepsilon}_1$ de la molécule centrée sur O avec toutes les autres. On pourra considérer que $V \gg r_0^3$ pour évaluer les bornes d'intégration.

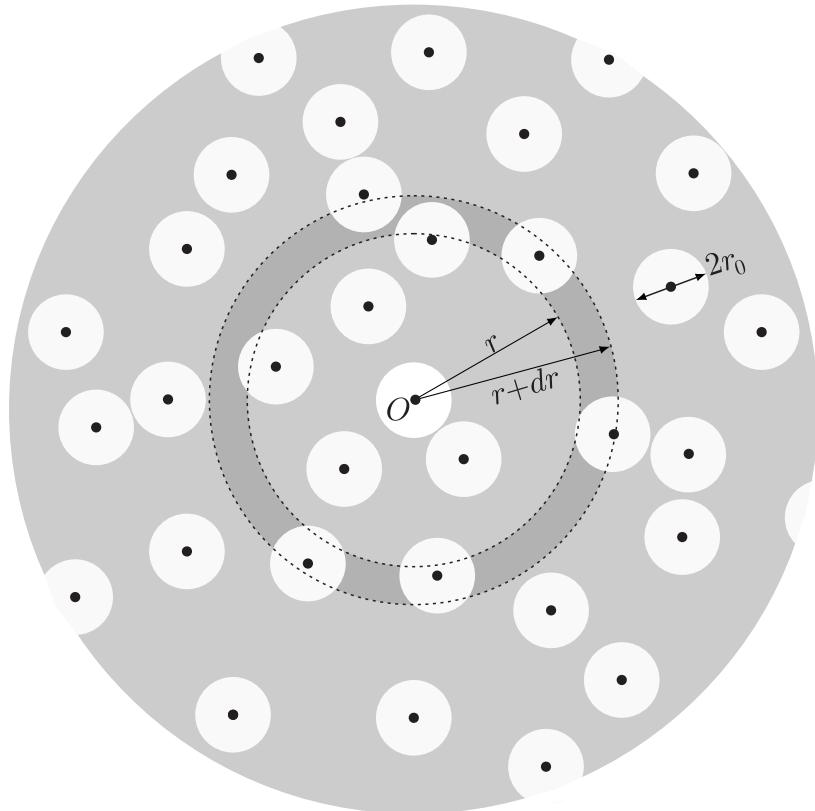


FIGURE 5 – Interaction d'une molécule avec le reste du gaz

□ – 21. En déduire l'expression de l'énergie interne du fluide \mathcal{F} se met sous la forme

$$U = \frac{Nk_B}{\gamma - 1} T - \frac{N^2 a}{V}$$

dans laquelle on exprimera la constante a en fonction de α et r_0 .

Un modèle un peu plus élaboré de physique statistique permet également d'obtenir l'entropie de la même quantité de fluide \mathcal{F} , elle s'écrit :

$$S = S_0 + k_B N \ln \frac{T^c(V - u)}{T_0^c(V_0 - u)}$$

où l'exposant c ainsi que S_0 , T_0 , V_0 sont des constantes et $u = N \frac{4}{3} \pi (2r_0)^3$.

□ – 22. Justifier physiquement le signe de c .

Pour toute évolution infinitésimale d'un système fluide de température T et à la pression P , on indique la relation $dU = T dS - P dV$ entre les variations dU , dS et dV de l'énergie interne, de l'entropie et du volume.

□ – 23. En déduire c en fonction de γ ainsi que l'équation d'état $P = P(T, V, N)$ du fluide \mathcal{F} . Commenter.

II.C Refroidissement par détente adiabatique

Dans cette dernière partie les grandeurs thermodynamiques utilisées sont toujours les mêmes que dans les parties précédentes mais elle s'entendent pour une mole de fluide.

On étudie les évolutions d'un fluide \mathcal{F} caractérisé par l'énergie interne molaire (admise) :

$$U = \frac{RT}{\gamma - 1} - \frac{A}{V}$$

et par l'équation d'état molaire (également admise) :

$$\left(P + \frac{A}{V^2} \right) (V - B) = RT$$

où A et B sont des constantes strictement positives (leurs valeurs numériques pour N_2 et H_2 figurent en fin d'énoncé) et $\gamma > 1$. Enfin, le modèle constitue une correction par rapport au modèle du gaz parfait ; en particulier, on se limitera partout aux corrections du premier ordre en fonction des constantes A et B .

□ – 24. Montrer que l'enthalpie molaire $H(T, P)$ du fluide s'écrit $H = C_P T - K P \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right)$ où $RT_r = \frac{2A}{B}$ et $C_P > 0$ et $K > 0$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données.

□ – 25. Comment nomme-t-on la détente adiabatique et isenthalpique d'un fluide ?

La transformation ainsi décrite est-elle réversible ?

À quelle condition une détente de ce type permet-elle un refroidissement ?

Faire l'application numérique pour N_2 et H_2 et conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE

Données numériques

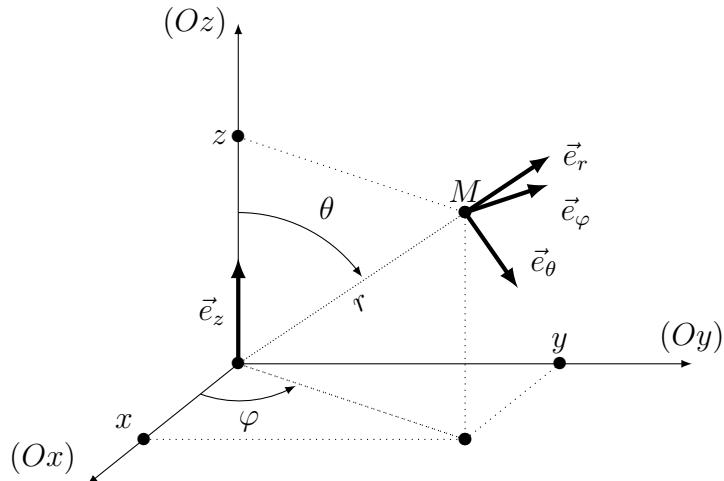
Grandeur	Notation	Valeur numérique
Constante d'Avogadro	\mathcal{N}_A	$6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	R	$8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Coefficients de l'équation de van der Waals

Pour le diazote N ₂	Pour le dihydrogène H ₂
$A = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{ SI}$ $B = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ SI}$	$A = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ SI}$ $B = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ SI}$

Repérage sphérique d'un point M

Le point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) peut aussi être repéré par ses coordonnées sphériques r , θ et φ rappelées sur le schéma ci-après :



Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$



**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Mesure et caractérisation du champ de pesanteur

Notations et données numériques utiles dans l'épreuve :

- constante de Boltzmann : $k_B = 1,3 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- constante de Planck : $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- célérité de la lumière : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- unité de masse atomique : $u = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$
- masse de la Terre : $m_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
- masse de la Lune : $m_L = 7,3 \times 10^{22} \text{ kg}$
- masse du Soleil : $m_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
- rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
- distance Terre-Soleil : $d_S = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
- distance Terre-Lune : $d_L = 3,8 \times 10^8 \text{ m}$
- masse atomique du rubidium : $m = 85 u$
- intervalle entre deux impulsions laser : $\tau = 5,0 \times 10^{-2} \text{ s}$
- longueur d'onde associée au transfert de quantité de mouvement : $\lambda_0 = 7,8 \times 10^{-7} \text{ m}$

De nombreux domaines technologiques nécessitent de connaître de manière précise la valeur du champ de pesanteur \vec{g} (tel que le poids \vec{P} d'un corps de masse m s'écrit $\vec{P} = m\vec{g}$). Ce sujet s'intéresse dans sa première partie à un modèle permettant d'expliquer la dépendance temporelle du champ de pesanteur mesurée par un appareil de précision étudié dans sa seconde partie. Dans tout le problème on notera $g = \|\vec{g}\|$ l'intensité de la pesanteur.

I Mesure de la variation temporelle de g

Un dispositif quantique de précision étudié dans la seconde partie permet d'accéder à de très faibles variations du champ de pesanteur. Dans cette première partie, on s'intéresse tout d'abord au champ de gravitation en un point M de masse m fixé à la surface de la Terre (et donc immobile par rapport à celle-ci). On note $\vec{g} = g\vec{u}$ le champ de pesanteur en M où \vec{u} est le vecteur unitaire de la verticale locale orientée vers le bas. On observe expérimentalement que g dépend faiblement du temps. On introduit alors \bar{g} , la moyenne temporelle de g sur une période d'étude et $\delta g = g - \bar{g}$. La courbe de la figure 1 représente les variations de δg en fonction du temps mesurées grâce au dispositif étudié dans la seconde partie. La valeur moyenne de g à l'endroit considéré et sur la période considérée est $\bar{g} = 9\,808\,907\,500 \text{ nm} \cdot \text{s}^{-2}$, l'axe des abscisses est gradué en jour julien moyen¹. La durée d'observation est d'environ 25 jours.

Le but de cette partie est de comprendre l'origine de cette variation temporelle et d'en donner une expression approchée. Pour cela, on s'intéresse aux forces gravitationnelles exercées sur le point M de masse m . On considère ici que chaque astre (Terre, Soleil, Lune, etc.) exerçant une influence gravitationnelle est à symétrie sphérique. Pour un astre (A), on notera A , R_A et m_A respectivement son centre, son rayon et sa masse (en particulier, la Terre (T) sera décrite par une sphère de centre T , de rayon R_T et de masse m_T). On note également $d_A = |\overrightarrow{TA}|$ la distance entre les centres A et T de l'astre (A) et de la Terre.

1. Le jour julien est un système de datation consistant à compter le nombre de jours et fraction de jour écoulés depuis une date conventionnelle fixée au 1er janvier de l'an 4713 av. J.-C.

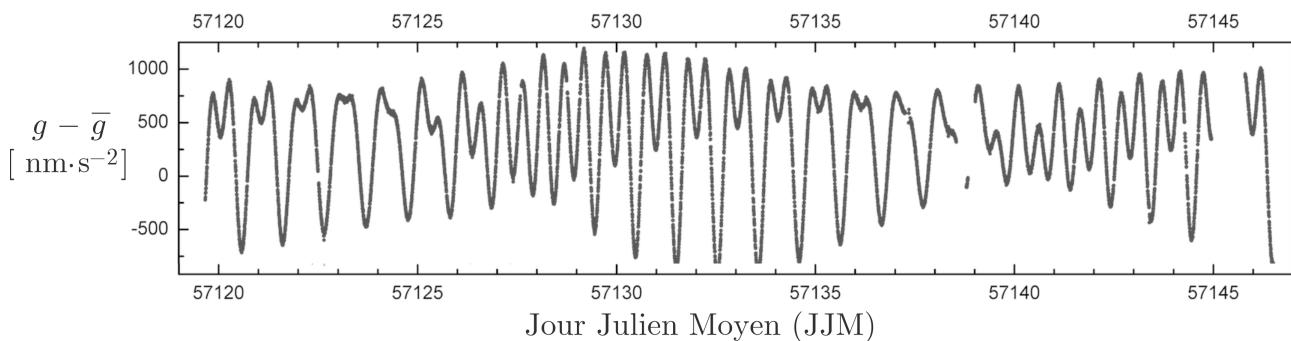


FIGURE 1 – Variation temporelle de l'intensité de la pesanteur

- – 1. Évaluer graphiquement les trois temps caractéristiques $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ qui apparaissent sur la courbe de la figure 1.
Que peut-on conjecturer sur les origines respectives des variations de g sur chacune de ces échelles de temps ?
- – 2. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen, du référentiel de Copernic \mathcal{R}_0 et du référentiel géocentrique \mathcal{R}_g .
- – 3. On considère que le référentiel \mathcal{R}_0 est galiléen. Montrer que \mathcal{R}_g ne l'est pas.

La force gravitationnelle $\vec{F}_{\mathbf{A} \rightarrow m}$ exercée par un astre (**A**) sur un corps ponctuel de masse m placé en M et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_{\mathbf{A}}(M)$ créé par l'astre (**A**) en M vérifient la relation $\vec{F}_{\mathbf{A} \rightarrow m} = m\vec{\mathcal{G}}_{\mathbf{A}}(M)$.

- – 4. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel, reliant notamment le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ et la constante de gravitation universelle G .
En déduire l'expression du champ $\vec{\mathcal{G}}_{\mathbf{A}}(M)$ créé par un astre (**A**) pour $AM > R_{\mathbf{A}}$, en fonction de G , $m_{\mathbf{A}}$ et \overrightarrow{AM} .

On introduit une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans \mathcal{R}_g telle que le plan $\mathcal{P}_e = (T, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ coïncide avec le plan équatorial terrestre. On considère que la Terre est en rotation uniforme autour de l'axe (T, \vec{e}_z) par rapport au référentiel \mathcal{R}_g et on note $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ son vecteur rotation. On considère un point M de masse m situé à la surface de la Terre et un astre quelconque (**A**). Le vecteur unitaire radial de la base sphérique locale en M est $\hat{e}_r = \overrightarrow{TM}/R_T$. On note finalement $\Psi_A = (\widehat{\overrightarrow{TM}}, \widehat{\overrightarrow{TA}})$ l'angle vu depuis le centre de la Terre entre le point M et le centre de l'astre (**A**). Ces notations sont explicitées sur la figure 2 dans laquelle les échelles, notamment de distance, ne sont pas respectées.

Dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g , les trajectoires du point M appartenant à la surface de la Terre, ainsi que celles des centres L et S de la Lune et du Soleil peuvent être considérées comme circulaires uniformes, de périodes respectives T_M , T_L , et T_S .

- – 5. Donner la valeur approximative, en jours terrestres, de chacune de ces périodes.
Déterminer la valeur numérique de ω en radian par seconde.

On suppose que l'influence gravitationnelle d'un astre (**A**) est non négligeable. Pour un point M de masse m posé à la surface de la Terre, immobile par rapport à la Terre et soumis à des forces de contact de résultante \vec{R} , l'intensité de la pesanteur est définie par

$$\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$$

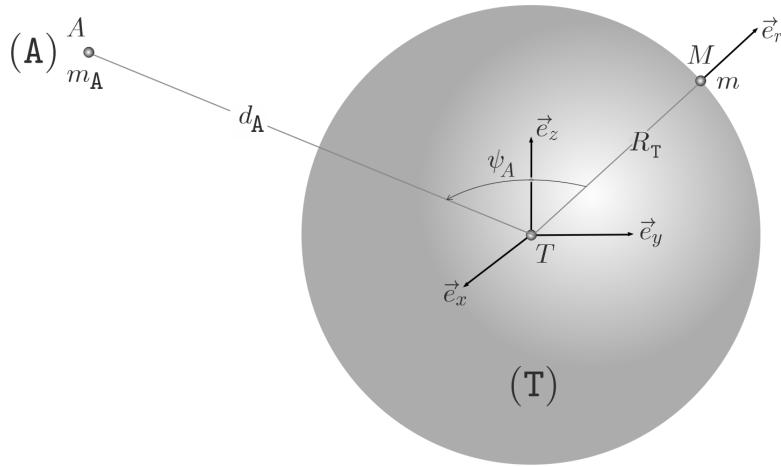


FIGURE 2 – Caractérisation géométrique du problème

- – 6. En étudiant le mouvement de M dans le référentiel \mathcal{R}_g , montrer que l'on peut exprimer \vec{g} sous la forme $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1$ où $\vec{\gamma}_0$ s'exprime en fonction de $\vec{\omega}$ et de \overrightarrow{TM} alors que $\vec{\gamma}_1$ est simplement la différence entre $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ et $\vec{\mathcal{G}}_A(T)$.
- – 7. Comment intervient le terme $\vec{\gamma}_0$ dans la variation du champ de pesanteur locale ?

En considérant uniquement l'effet d'un astre (A), on note δg_A l'expression théorique de la quantité δg discutée dans le préambule de cette partie I.

- – 8. Déterminer l'expression de δg_A en fonction de \vec{e}_r et de l'un des trois termes $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$, $\vec{\gamma}_0$ ou $\vec{\gamma}_1$.

En pratique, l'astre perturbateur (A) considéré est toujours très loin de la Terre. Ainsi, $d_A \gg R_T$ et l'on peut chercher à donner une expression approchée de $\vec{\gamma}_1$ en se limitant uniquement aux termes d'ordre 1 en R_T/d_A .

- – 9. Montrer que, dans cette approximation, $\vec{\gamma}_1$ s'exprime sous la forme

$$\vec{\gamma}_1 = -\frac{Gm_A}{d_A^3} \left(\overrightarrow{TM} + \mu \overrightarrow{TA} \right)$$

où l'on précisera l'expression de μ en fonction de \overrightarrow{TM} , \overrightarrow{TA} , d_A , R_T et Ψ_A .

En déduire l'expression de δg_A en fonction de G , m_A , d_A , R_T et Ψ_A .

- – 10. Déterminer l'expression de $|\delta g_A|$ dans le cas particulier où \overrightarrow{TM} et \overrightarrow{TA} sont colinéaires et de même sens.

Calculer alors, dans ce cas, les valeurs de $|\delta g_L|$ et $|\delta g_S|$, variations de g dues respectivement à la Lune et au Soleil ainsi que de leur rapport $\kappa = |\delta g_L|/|\delta g_S|$. Commenter les valeurs obtenues.

On se place dans un modèle dans lequel on admet que pour tous les astres (A) autres que le Soleil et la Lune on a $|\delta g_A| \ll |\delta g_S|$.

- – 11. En prenant en compte les résultats des questions précédentes, écrire l'expression la plus simple possible de $|\delta g|$ correspondant au modèle étudié en fonction notamment du temps t . Après avoir tracé l'allure de la fonction $t \mapsto |\delta g|(t)$ sur un mois, comparer ce résultat aux données expérimentales de la figure 1.

II Gravimètre à atomes froids

Dans un gravimètre à atomes froids, on utilise des atomes de rubidium, de masse m , refroidis à une température T_0 de l'ordre du microkelvin. À cette température, chaque atome peut être décrit par un paquet d'onde dont le centre évolue comme une particule classique, suivant un mouvement de chute libre sous l'action de la seule pesanteur. Les atomes se comportent alors comme des ondes de matière dont la propagation peut conduire à des phénomènes d'interférences. Ces interférences peuvent être exploitées pour mesurer l'accélération de la pesanteur avec précision.

Dans cette partie, on considère le référentiel terrestre ($Oxyz$) comme galiléen et on néglige toute action autre que celle de la pesanteur sur les atomes de rubidium. On s'intéresse uniquement au mouvement s'effectuant le long d'un axe vertical Oz orienté vers le bas par le vecteur unitaire \vec{e}_z . On note $p = m\vec{v} \cdot \vec{e}_z$ la *projection* selon \vec{e}_z de la quantité de mouvement d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} . Enfin, on considère g uniforme et indépendant du temps.

Lors de la chute d'un paquet d'onde, celui-ci interagit avec un rayonnement électromagnétique (impulsion laser) qui influe sur son mouvement de la manière suivante :

- À $t = 0$, une impulsion permet de dédoubler chaque paquet d'onde en deux parties (désignées par les indices 1 et 2 par la suite) en communiquant à un des deux paquets, par exemple le paquet 2, une quantité de mouvement supplémentaire p_γ , dans le sens $+ \vec{e}_z$. On note p_1 et p_2 les projections selon Oz des quantités de mouvement associées à chaque paquet. L'évolution de chaque paquet entre $t = 0$ et $t = \tau$ constitue l'étape (a).
- À $t = \tau$, une autre impulsion laser augmente p_1 et diminue p_2 de manière instantanée de la quantité p_γ . L'évolution de chaque paquet entre $t = \tau$ et $t = 2\tau$ constitue l'étape (b).
- À $t = 2\tau$, une nouvelle impulsion diminue p_1 de la quantité p_γ , puis une mesure permet de tester l'état du paquet d'onde total.

Les impulsions utilisées pour modifier les quantités de mouvement des paquets aux instants $t = 0$, $t = \tau$ et $t = 2\tau$ sont équivalentes à celles que produirait un laser monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On note p_γ la norme de la quantité de mouvement d'un photon de ce rayonnement. On introduit également $p_0^2 = \langle p^2 \rangle$, moyenne quadratique de la quantité de mouvement due à l'agitation thermique des atomes de rubidium à T_0 .

□ – 12. Déterminer les expressions de p_γ et p_0 en fonction notamment de λ_0 et T_0 , ainsi que leurs valeurs numériques. Commenter.

On étudie ici le mouvement des centres des paquets d'ondes, et on admet qu'ils évoluent chacun de la même manière qu'une particule de masse m , étudiée en mécanique classique. À $t = 0^+$, après interaction avec le faisceau laser, on prend comme conditions initiales $p_1(0^+) = p_0$ et $p_2(0^+) = p_0 + p_\gamma$.

□ – 13. Dans cette vision classique, exprimer, en fonction de p_0 , p_γ , m , g et τ , les distances $d_{1,a}$ et $d_{2,a}$ parcourues par chacune des particules dans la phase (a).

□ – 14. Exprimer, toujours en fonction de p_0 , p_γ , m , g et τ , les distances $d_{1,b}$ et $d_{2,b}$ parcourues par chacune des particules dans la phase (b).

En déduire que les centres des paquets d'ondes occupent la même position l'instant $t = 2\tau$. On notera z_0 cette position.

□ – 15. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $V(z)$ en prenant $V(0) = 0$. En déduire la relation entre $p(z)$, m , g , z et l'énergie mécanique E d'une particule soumise uniquement à l'action de la pesanteur.

On s'intéresse désormais au traitement quantique de la chute des paquets d'ondes dans le champ de pesanteur. On rappelle que l'évolution de la fonction d'onde $\psi(M, t)$ associée à une particule de masse m et d'énergie potentielle V s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

L'énergie potentielle V dépendant uniquement de z , on peut chercher les solutions sous la forme $\psi(z, t) = \phi(z)\zeta(t)$.

□ – 16. Montrer que les fonctions ϕ et ζ vérifient deux équations différentielles indépendantes.

En déduire que ψ peut finalement s'écrire sous la forme $\psi(z, t) = \phi(z)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, et justifier que E est une constante réelle.

On peut chercher les solutions sous la forme $\phi(z) = \phi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sigma(z)\right]$, avec ϕ_0 constant et $\sigma(z)$ une fonction que l'on peut exprimer sous la forme d'un développement en puissances de \hbar/i du type

$$\sigma(z) = \sigma_0(z) + \frac{\hbar}{i}\sigma_1(z) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\sigma_2(z) + o\left[\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\right]$$

où chaque $\sigma_i(z)$ est une fonction réelle.

Dans les cas où le potentiel varie peu sur les échelles spatiales considérées, condition que l'on supposera vérifiée par la suite, on admet qu'on peut alors limiter les calculs à l'ordre 1 en \hbar/i . Dans la suite, on se place dans le cas où $E \geq V(z)$ pour toutes les valeurs de z considérées.

□ – 17. Montrer que σ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\hbar}{i}\sigma'' + \sigma'^2 = 2m[E - V(z)] \stackrel{\text{def}}{=} \hbar^2 k^2(z).$$

En se limitant à l'ordre 1 en \hbar/i et en écrivant qu'un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles, établir le système d'équations différentielles vérifiées par $\sigma_0(z)$ et $\sigma_1(z)$, puis montrer que la fonction d'onde s'écrit alors sous la forme :

$$\phi_{\pm}(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k(z)}} \exp\left[\pm i \int_0^z k(u)du\right]$$

où Φ_0 est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer. Préciser laquelle (\pm) de ces solutions est physiquement acceptable.

Dans le cas particulier d'un potentiel uniforme $V = V_0$, déterminer l'expression de $\psi(z, t)$ et commenter cette dernière expression.

On peut montrer que la prise en compte des termes d'ordre 2 dans l'expression de σ conduit un expression du type :

$$\phi_{\pm}(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k(z)}} \left[1 \pm \frac{im\hbar}{4p^3(z)} \frac{dV}{dz} + \eta \right] \exp\left[\pm i \int_0^z k(u)du\right]$$

avec dans notre cas $\eta \ll 1$.

□ – 18. Déterminer l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} associée à une particule de quantité de mouvement p .

Exprimer, en fonction de $\frac{d\lambda_{dB}}{dz}$, la condition légitimant l'approximation d'ordre 1 pour σ .

Pour comprendre l'origine du déphasage entre les deux parties 1 et 2 du paquet d'onde associé à la particule, on s'intéresse à la phase de la fonction d'onde, et on note

$$\varphi_j(z) = \int_0^z k_j(u)du,$$

avec $j \in \{1,2\}$. On définit la différence de phase φ au point M_0 de cote $z = z_0$ par

$$\varphi = \varphi_2(M_0) - \varphi_1(M_0)$$

On se place dans l'approximation \mathcal{A}_0 suivante : « pour le calcul de φ , les valeurs de k_1 et k_2 sont considérées constantes durant chacune des étapes (a) et (b), et égales à leur valeur au début de chaque étape ». Cette approximation revient à négliger l'énergie potentielle $V(z)$ devant E . On note alors $\varphi^0 = \varphi_a^0 + \varphi_b^0$ l'expression approchée de φ obtenue à l'aide de cette approximation, où φ_a^0 et φ_b^0 sont les déphasages respectifs dus aux étapes (a) et (b).

- – 19. Déterminer, dans l'approximation \mathcal{A}_0 , les expressions k_{1a} , k_{1b} , k_{2a} et k_{2b} des grandeurs k_1 et k_2 en fonction de p_0 et p_γ pour chacune des étapes (a) et (b).
 Déterminer les expressions de φ_a^0 et φ_b^0 déphasage entre les paquets lors de ces deux étapes.
 En déduire que φ^0 s'exprime alors sous la forme $\varphi^0 = \mu g$ où l'on précisera l'expression de μ en fonction de τ et λ_0 , on déterminera également sa valeur numérique.

Une méthode de mesure par fluorescence (non détaillée) permet de recueillir à l'instant $t = 2\tau$ un signal s proportionnel à la densité de probabilité de présence de la particule au point M_0 .

- – 20. Montrer que $s = s_0 f(\varphi)$, où s_0 est la valeur maximale du signal s et $\varphi \mapsto f(\varphi)$ une fonction que l'on précisera.
 □ – 21. On désire pouvoir mesurer l'intensité de la pesanteur g avec une incertitude relative $\delta g/g = 10^{-9}$. Déterminer la précision minimale avec laquelle on doit être capable de déterminer le déphasage φ pour obtenir la précision voulue sur la mesure de g .
 Une variation du signal s est détectable uniquement si elle dépasse un seuil noté Δs . À partir de l'étude du graphe de la fonction $\varphi \mapsto f(\varphi)$ déterminer les valeurs de φ autour desquelles la mesure de g est la plus précise.

Dans le calcul du déphasage précédent, on a négligé les variations de k_1 et k_2 liées à la chute du paquet d'onde dans le champ de pesanteur. On cherche ici à estimer l'influence de cette approximation, pour l'étape (a) uniquement. On note φ_a le déphasage entre les centres des paquets d'ondes 1 et 2 à la fin de l'étape (a) .

- – 22. Montrer que $\varphi_a = F(p_0 + p_\gamma, d_{2,a}) - F(p_0, d_{1,a})$ où $F : (x,y) \mapsto K [(x^2 + \nu y)^{3/2} - x^3]$, on précisera les expressions de ν et K en fonction notamment de m , g et \hbar .
 □ – 23. Évaluer le rapport $m^2 g d_{1,a} / p_0^2$.
 Conclure quant à la légitimité de l'approximation \mathcal{A}_0 .

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



L'anémométrie à fil chaud

L'anémométrie à fil chaud est une technique permettant de mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide. Elle est basée sur l'influence de la vitesse d'écoulement du fluide sur le transfert thermique conducto-convectif d'un solide conducteur plongé dans ce fluide.

Le système le plus couramment utilisé est un petit fil cylindrique, d'un diamètre typique d_w de l'ordre de quelques micromètres, parcouru par un courant et donc chauffé par effet Joule.

Ce petit fil est fixé à des broches d'alimentation par l'intermédiaire d'une gaine d'adaptation qui permet notamment l'alimentation du fil et de fixer la longueur active du fil, notée L_w qui est ici de l'ordre de quelques millimètres.

Quelques valeurs numériques concernant certaines caractéristiques physiques du fil chaud sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

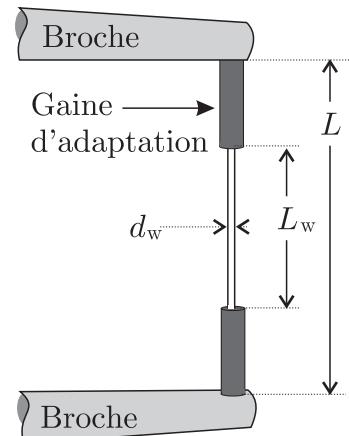


FIGURE 1 – Anémomètre

Matériaux	Résistivité à 20°C : ρ_{20} [$\mu\Omega \cdot \text{cm}$]	Conductivité thermique : λ_w [$\text{W} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]	Masse volumique : μ_w [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] $\times 10^4$	Capacité thermique massique : c_w [$\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]
Tungstène	5,5	1,9	1,93	0,14
Platine	9,8	0,72	2,15	0,13
Platine-iridium	32	0,17	2,16	0,13

Les applications numériques seront réalisées avec au plus 2 chiffres significatifs.

I Étude énergétique de l'anémomètre

I.A Bilan d'énergie dans le fil chaud

Le fil conducteur (en tungstène par exemple) est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I . Il est plongé dans un fluide en écoulement. On utilisera les notations suivantes :

- Caractéristiques du fil (que l'on repère avec l'indice « w » pour *wire* en anglais) : masse volumique μ_w , capacité thermique massique c_w , température T_w , résistivité (inverse de la conductivité) électrique ρ_w , conductivité thermique λ_w , longueur L_w et diamètre d_w .
- Caractéristiques du fluide (généralement de l'air que l'on repère lorsqu'il a ambiguïté avec l'indice « f » pour fluide) et de l'écoulement : masse volumique μ_f , viscosité η , température T_f , pression p_f , vitesse de l'écoulement \vec{V} . Ces caractéristiques sont supposées constantes pendant la mesure.

Si l'on note h le coefficient de transfert thermique conducto-convectif, la puissance thermique surfacique cédée par le fil au fluide à travers la surface S est donnée par la loi de Newton :

$$\frac{\delta \dot{Q}_f}{dS} = h(T_w - T_f) \quad (1)$$

On notera (Ox) l'axe du fil, ses extrémités étant situées en $x = -L_w/2$ et $x = +L_w/2$.

- – 1. Rappeler la loi d'Ohm locale. Définir les grandeurs intervenant dans cette loi et donner leurs unités usuelles. Établir l'expression de la résistance électrique totale, notée R_w , du fil en fonction de ρ_w , L_w et d_w .

En déduire la puissance \mathcal{P}_j dissipée par effet Joule dans le fil en fonction de ρ_w , L_w , d_w et I , puis la puissance volumique dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau}$.

- – 2. Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique. Définir les grandeurs intervenant dans cette loi. On dit souvent qu'il s'agit d'une loi phénoménologique. Que cela signifie-t-il ? La température est supposée homogène sur chaque section du fil d'abscisse x . Que peut-on en déduire ?

Établir l'équation de diffusion thermique dans le cas d'un fil à la température $T(x,t)$ où seuls les transferts thermiques par conduction ont lieu.

On se place en régime permanent dans tout le reste de la partie I et on suppose la vitesse \vec{V} de l'écoulement uniforme et indépendant du temps. En plus des transferts thermiques par conduction, on prend en compte les transferts thermiques par conducto-convection et ceux provenant de l'effet Joule. Les transferts thermiques sont intégrés dans le terme conducto-convectif.

- – 3. Dans la loi de Newton (1), la grandeur h dépend de la vitesse \vec{V} de l'écoulement. Quelle est son unité ? Expliquer qualitativement comment varie h en fonction de $V = \|\vec{V}\|$. Expliquer alors comment évolue T_w quand V augmente.
- – 4. En effectuant un bilan énergétique sur un élément de volume de fil compris entre les abscisses x et $x + dx$, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_w(x,t)$.

La résistivité du fil dépend en fait de la température T_w de ce dernier. Expérimentalement, on mesure que si le fil est en contact avec un fluide à la température T_f , sa résistivité ρ_w vérifie la relation :

$$\rho_w = \rho_f [1 + \alpha (T_w - T_f)] \quad (2)$$

où ρ_f est sa résistivité à la température du fluide et $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ est un coefficient expérimental supposé constant. On note enfin $T_1(x) = T_w(x) - T_f$.

- – 5. Mettre l'équation obtenue à la question 4 sous la forme :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + K_1 T_1(x) + K_2 = 0 \quad (3)$$

Exprimer les constantes K_1 et K_2 en fonction de l'intensité I et des caractéristiques du fil, du fluide et de l'écoulement. On montrera, en particulier, que $\alpha K_2 = K_1 + 4h/(\lambda_w d_w)$. Dans la plupart des anémomètres à fil chaud, K_1 est négatif. Déterminer la condition correspondante sur le coefficient conducto-convectif h . On se place dans ce cas dans toute la suite et on pose :

$$\ell_c = \frac{1}{\sqrt{|K_1|}}$$

On considère que le contact thermique assuré par les gaines d'adaptation entre les extrémités du fil et les broches de l'anémomètre (voir figure 1) se fait sans résistance thermique (contact parfait). Les broches et les gaines sont à la température T_f du fluide.

- – 6. Rappeler la définition d'une résistance thermique ainsi que son unité. Quelle est la conséquence d'un contact sans résistance thermique ?

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (3).

En tenant compte des conditions aux limites dans le problème et de sa symétrie, montrer que $T_1(x)$ s'exprime assez simplement à partir de la fonction cosinus hyperbolique. En déduire l'expression du profil de température $T_w(x)$ dans le fil de la sonde en fonction de x , ℓ_c , K_2 , T_f et L_w .

- – 7. Déterminer la puissance thermique \dot{Q}_g cédée par le fil à l'ensemble des *deux* gaines d'adaptation en fonction de ℓ_c , K_2 , L_w , λ_w et d_w .
- – 8. Montrer que la moyenne spatiale $\langle T_w \rangle$ de la température du fil s'écrit selon la relation

$$\langle T_w \rangle = T_f + K_2 \ell_c^2 \left[1 - \Lambda \tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right) \right]$$

dans laquelle on précisera l'expression du paramètre Λ .

La figure 2 représente la distribution de température dans le fil chaud pour différentes valeurs du rapport $k = \frac{L_w}{2\ell_c}$. La fonction tracée est

$$f(y) = \frac{T_w - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f} \quad \text{avec} \quad y = x/L_w$$

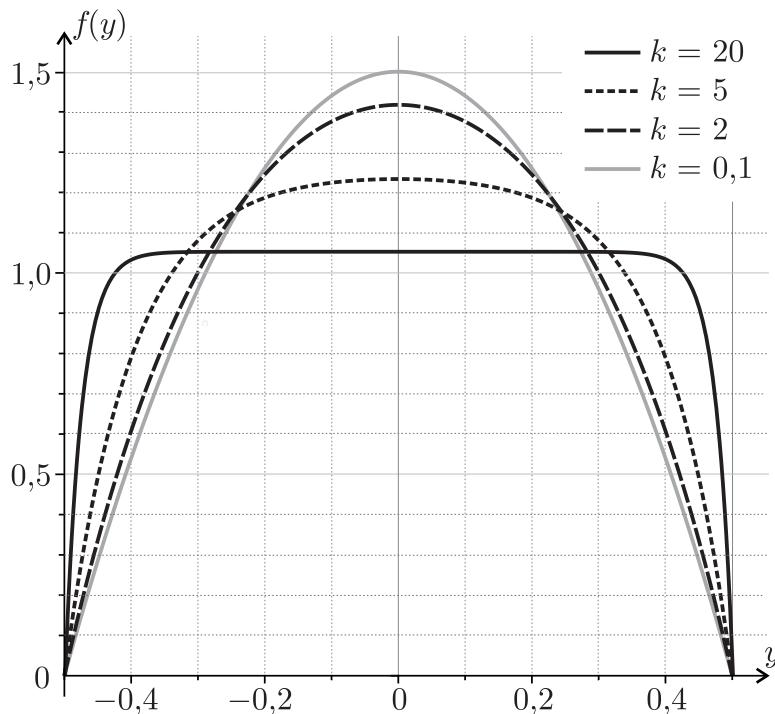


FIGURE 2 – Représentation graphique de la fonction $f(y)$ pour quatre valeurs du paramètre k .

- – 9. Pour un fil de tungstène de diamètre $d_w = 5 \mu\text{m}$, de longueur $L_w = 1,2 \text{ mm}$ et fonctionnant dans un régime de température T_w tel que $\ell_c = 30 d_w$, évaluer, en faisant les approximations pertinentes, la valeur numérique du coefficient

$$\xi = \frac{T_{w,\max} - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f}$$

où $T_{w,\max}$ est la température maximale atteinte dans le fil. En exploitant la figure 2, commenter la valeur trouvée.

I.B Puissance thermique cédée au fluide

- – 10. Commenter les courbes de la figure 2. Quelle approximation peut-on faire quant à la température T_w dans le cas d'un fil long (on précisera ce que « long » signifie ici) ?

La résistivité ρ_w du fil est toujours supposée dépendre de la température du fluide avec lequel il est en contact selon la relation (2).

- – 11. Calculer la résistance $R_{w,\infty}$ d'un fil supposé long en fonction de sa résistance R_f à la température T_f , de α et des températures $\langle T_w \rangle$ et T_f .

Toujours dans le cadre d'un fil long, on fait l'hypothèse que la puissance thermique \dot{Q}_g cédée par le fil aux deux gaines d'adaptation est négligeable devant la puissance \dot{Q}_f dissipée par effet Joule le long du fil ou celle, notée \dot{Q}_f , correspondant aux échanges thermiques conducto-convectifs reçus par le fluide à l'interface entre le fil et le fluide.

- – 12. Déterminer, en régime permanent, l'expression de \dot{Q}_f en fonction de la différence $\langle T_w \rangle - T_f$.

Pour un fluide de viscosité η et de masse volumique μ_f , qui s'écoule à la vitesse V autour d'un obstacle fixe de taille caractéristique d_w , on définit le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \mu_f V d_w / \eta$. Il compare deux modes de transport au sein du fluide.

- – 13. Sachant que la viscosité η s'exprime en $\text{Pa} \cdot \text{s}$ déterminer la dimension de \mathcal{R}_e .

On définit par ailleurs le nombre de Nusselt, $\mathcal{N}_u = h d_w / \lambda_f$.

- – 14. Déterminer la dimension de \mathcal{N}_u et proposer une interprétation physique de cette quantité. Comment varie \mathcal{N}_u lorsque la vitesse V du fluide s'écoulant autour du fil augmente ?

On admet que le nombre de Nusselt vérifie la loi de King $\mathcal{N}_u = A + B \sqrt{\mathcal{R}_e}$ où A et B sont des constantes connues qui ne dépendent que de la nature du fluide en écoulement.

- – 15. En exploitant l'expression de $\langle T_w \rangle$ obtenue à la question 8 et les résultats de la question 5, montrer que dans le cas d'un fil long on peut écrire

$$\ell_c = \frac{d_w}{2} \theta^\nu \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{\mathcal{N}_u} \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f}. \quad (4)$$

On précisera la valeur numérique de l'exposant ν .

- – 16. On considère de nouveau un fil de longueur L_w quelconque. Établir l'expression de la puissance thermique \dot{Q}_f associée au transfert conducto-convectif du fil vers le fluide.

On suppose que la relation (4) reste valable en ordre de grandeur pour un fil de longueur quelconque et que, de plus, le coefficient θ qu'elle fait intervenir est de l'ordre de l'unité pour toutes les mesures effectuées.

- – 17. En étudiant le rapport \dot{Q}_f / \dot{Q}_g , et sachant que dans le contexte d'étude $\mathcal{N}_u \simeq 10 \text{ SI}$, justifier *a posteriori* que l'on puisse simplifier le problème en ne considérant pas les pertes dans les gaines d'adaptation sous l'hypothèse d'un fil long.

En utilisant le résultat de la question 12 et en supposant que l'on puisse appliquer la loi de King, montrer que, pour un fil long, la mesure de la vitesse V du fluide se ramène à une mesure de résistance. On déterminera l'expression de V en fonction *notamment* de $R_{w,\infty}$, R_f et I .

II Anémométrie à deux fils

On étudie à présent une autre technique qui utilise deux fils parallèles séparés par une distance ϵ comme représenté sur la figure 3 ci-dessous.

Cette technique est plus précise que la précédente car elle permet de faire deux mesures : la première n'utilise que le premier fil ; la seconde étudie la réponse induite par le premier dans le second.

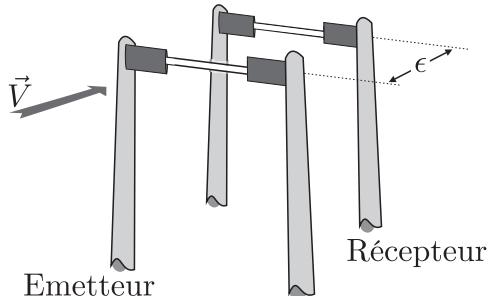


FIGURE 3 – Disposition des 2 fils.

- Le premier fil (l'émetteur, repéré par un indice e), froid initialement (c'est-à-dire à la température du fluide environnant T_f), est traversé par une impulsion électrique d'intensité $I = 1 \text{ A}$ et d'une durée τ de quelques μs , appelée « phase de chauffe », à l'issue de laquelle le fil s'est donc échauffé.

On fait ensuite passer dans l'émetteur un faible courant $I_0 = 1 \text{ mA}$, dont on négligera l'influence thermique, et on mesure la tension à ses bornes en fonction du temps. On obtient ainsi l'évolution de la résistance électrique $R_e(t)$ en fonction du temps et donc celle de sa température $T_e(t)$.

- Un second fil (le récepteur, repéré par un indice r) est placé parallèlement au premier, en aval dans l'écoulement du fluide (ici de l'air), à une distance $\epsilon = 0,5 \text{ mm}$ du premier. Sous l'action de l'écoulement, une trainée d'air chaud (zone échauffée du fluide par l'impulsion thermique de l'émetteur) va atteindre le récepteur.

L'acuité et la durée de cette trainée d'air chaud vue par le second fil vont dépendre notamment de la norme V de la vitesse de l'air.

Hormis leur température et donc leur résistance, les caractéristiques de ces deux fils sont supposées identiques à celles du fil utilisé dans la partie I.

On se concentre tout d'abord sur le fil émetteur de l'impulsion thermique afin d'étudier la première possibilité de mesure de la vitesse de l'écoulement. On néglige la conduction thermique dans le fil et entre le fil et les broches. On suppose donc, conformément à ce qui a été fait précédemment, que la température du fil est homogène et ne dépend que du temps, tout comme sa résistance toujours obtenue dans le cadre du modèle de résistivité résumé par la relation (2). Pendant la phase de chauffe, l'impulsion étant très brève, on négligera les pertes d'énergie dues à la convection de l'air autour du fil lors de cette phase. L'origine des temps $t = 0$ correspond au début de l'impulsion électrique.

- – 18. Montrer que, pendant la phase de chauffe, la température $T_e(t)$ vérifie une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d(T_e - T_f)}{dt} - \frac{T_e - T_f}{\tau_1} = \frac{R_f I^2}{C} \quad (5)$$

où l'on exprimera la durée caractéristique τ_1 de montée en température et le paramètre C en fonction des paramètres du problème. Que représente C ?

- – 19. Résoudre cette équation en exprimant finalement $T_e(t)$ en fonction de t , T_f , α et τ_1 .

En déduire, en fonction de τ , τ_1 et α , l'expression de l'amplitude de l'impulsion thermique $\Delta T_{e,\max} = T_{e,\max} - T_f$ obtenue dans le fil émetteur après qu'il a été parcouru par l'impulsion de courant.

- – 20. Une fois l'impulsion terminée, i. e. pour $t > \tau$, le fil émetteur ne reçoit plus de courant qui le chauffe, il se refroidit par convection au contact thermique de l'air en mouvement. Déterminer la température de l'émetteur $T_e(t)$ durant cette phase dite de relaxation en fonction de t , τ , T_f , $\Delta T_{e,\max}$ ainsi que d'une nouvelle durée τ_2 caractéristique de cette phase de relaxation dépendant notamment de N_u .

Sur la figure 4 ci-dessous le graphe de gauche indique l'allure de $T_e(t)$ mesurée lors des phases de chauffe et de relaxation au contact de deux écoulements de vitesse différente.

Sur cette même figure 4, le graphe de droite montre de façon plus quantitative en échelle semi-logarithmique, des relevés expérimentaux de la phase de relaxation pour différentes valeurs de la norme de la vitesse de l'écoulement.

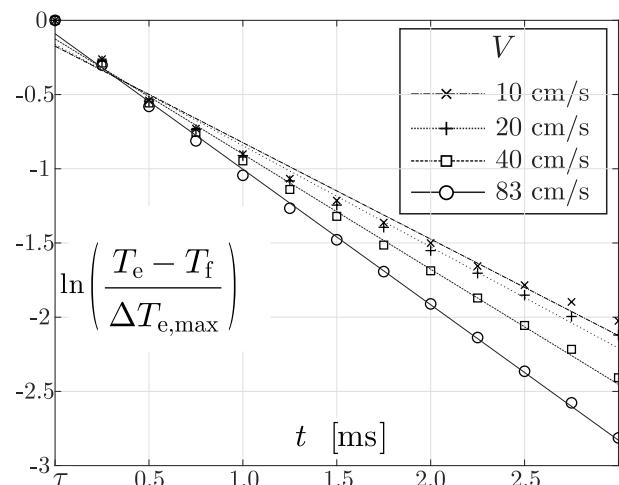
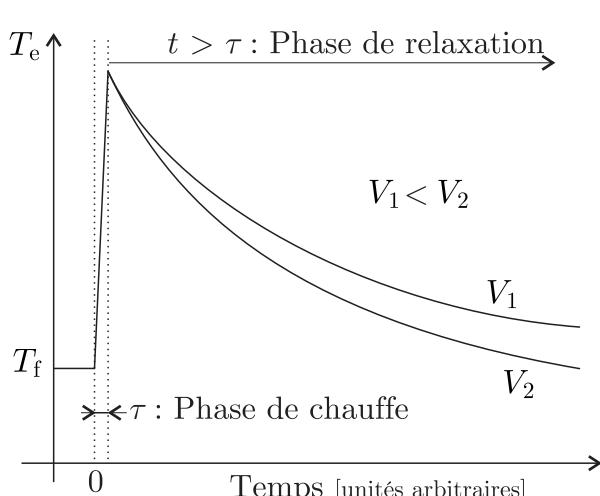


FIGURE 4 – Mesures au niveau de l'émetteur. Sur la figure de droite on a représenté les mesures et leurs différentes régressions linéaires.

- – 21. Pendant la phase de chauffe, on constate sur la partie gauche de la figure 4 que les deux courbes sont confondues. Quelle hypothèse émise plus haut ce résultat permet-il de confirmer ?

- – 22. Expliquer qualitativement comment l'analyse des courbes de la figure 4 permet une première mesure de la norme de la vitesse de l'écoulement du fluide.

L'air réchauffé par l'émetteur va être transportée par convection jusqu'au second fil, le récepteur. En alimentant ce dernier par un très faible courant $I_0 = 1 \text{ mA}$, dont on peut toujours négliger l'influence thermique, on peut mesurer sa résistance et en déduire sa température.

Certains résultats expérimentaux sont rassemblés dans la figure 5 sur la page suivante¹.

1. Ils ont été collectés dans l'article « *Pulsed-wire technique for velocity measurements in natural convection flow – a numerical optimisation tool* », Grignon et al., 1998, International Journal of Heat and Mass Transfer, volume 41, p. 3121-3129.

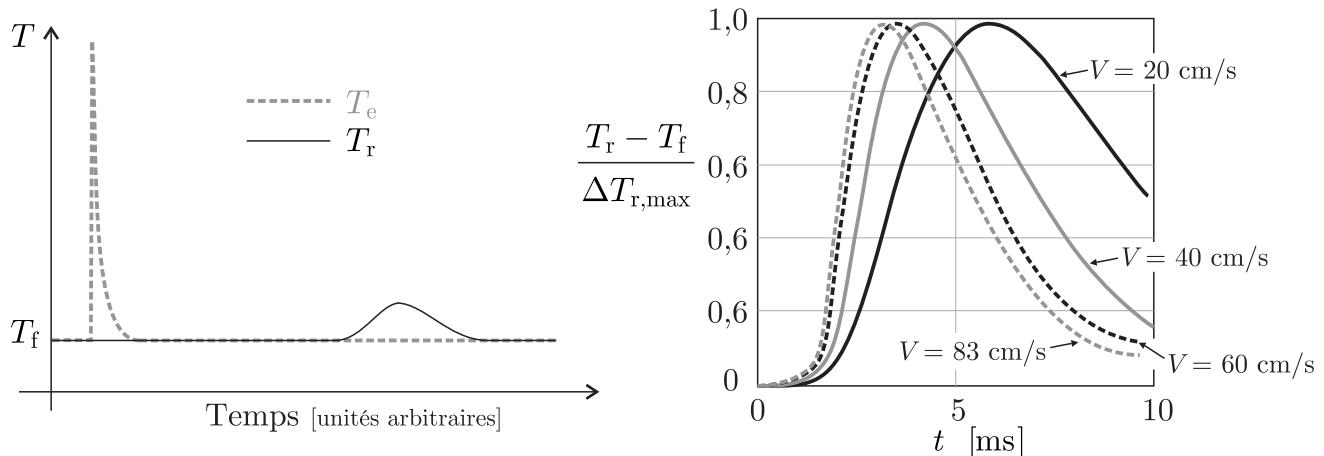


FIGURE 5 – Analyse des températures.

Sur la partie gauche de la figure 5, on a représenté avec les mêmes échelles de temps et d'amplitude l'allure typique des pics de températures relevés dans chacun des deux fils.

De façon plus quantitative, on a représenté sur la partie droite de cette même figure, le résultat des mesures de l'évolution de la fonction normalisée $(T_r(t) - T_f) / \Delta T_{r,\max}$ pour différentes valeurs de la norme de la vitesse de l'écoulement.

- – 23. Commenter les deux courbes de la partie gauche de la figure 5. Proposer des explications qualitatives pour les différents phénomènes que l'on peut observer.
- – 24. Expliquer qualitativement comment l'analyse des courbes de la figure 5 permet une seconde mesure de la norme de la vitesse de l'écoulement du fluide.

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



À propos des araignées

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont repertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à 70 μm . À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques ...

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches (\vec{v}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

Les 3 parties de ce problème sont indépendantes.

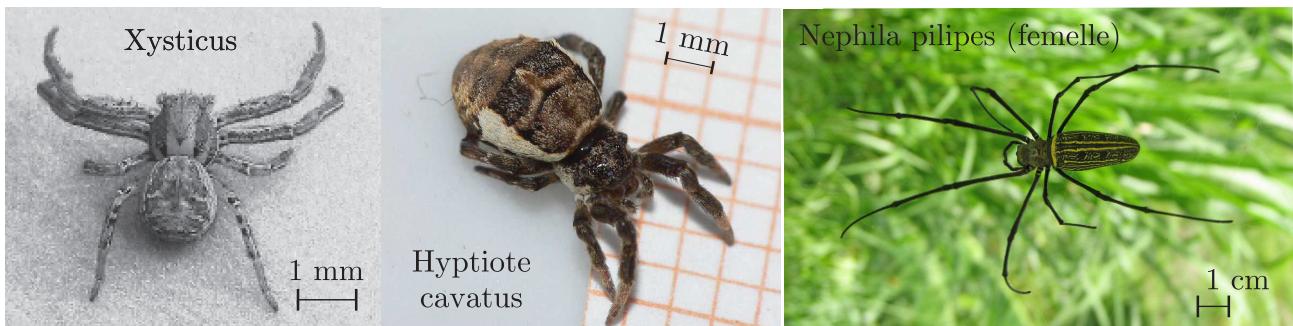


FIGURE 1 – *Xysticus sp.* est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

I Des araignées volantes

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

- 1. En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60 \text{ km}$ de celui-ci.

□ – 2. Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ .

Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez-vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q . Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2).

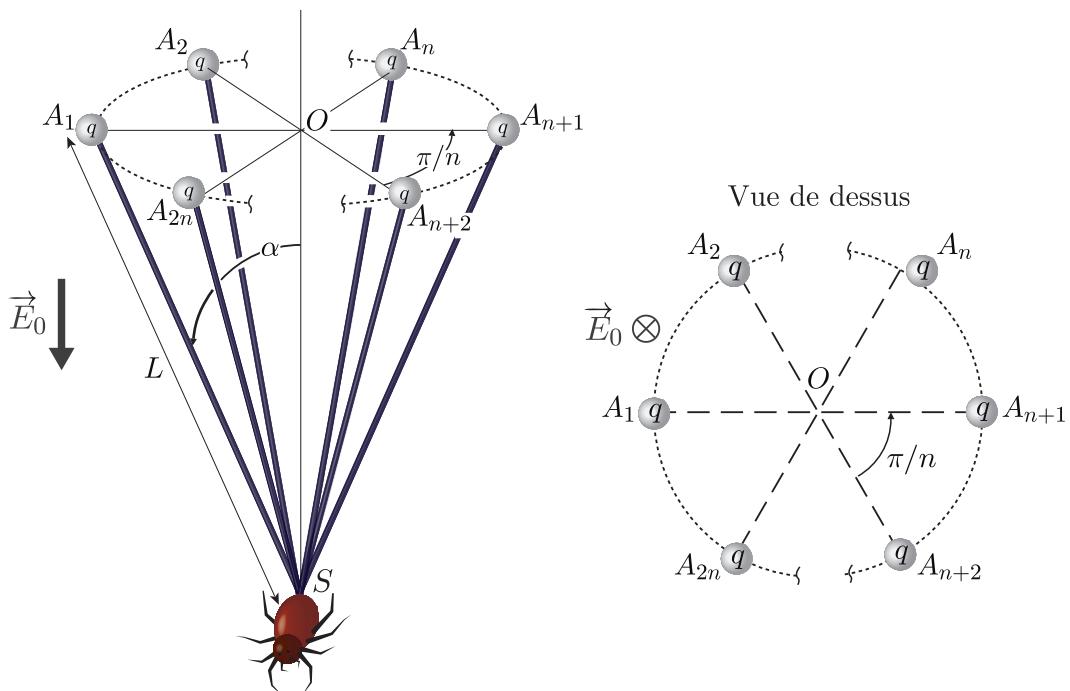


FIGURE 2 – Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

- – 3. Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les $2n - 1$ autres charges s'exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} G(n) \quad \text{avec} \quad G(n) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l'entier p . On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.

En déduire l'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des $2n$ charges en l'absence de champ électrique extérieur.

S'il n'est soumis qu'à ce potentiel, quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre ?

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en supposant qu'à l'instant t tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que S est fixe.

- – 4. Déterminer l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période T , du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de ϵ_0 , m , L , q et $G(n)$.
- – 5. Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre \vec{E}_0 existant au niveau du sol ainsi que l'équation permettant de déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q , n , L et E_0 . On observe un angle $\alpha = 30^\circ$ pour un éventail constitué de $2n = 6$ soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \simeq 38/(3\sqrt{3})$.
- – 6. Calculer le module de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées? Commenter ce résultat.

En réalité, lorsqu'elles décollent, les araignées sont situées sur des zones où le champ électrique est bien plus important que dans les conditions normales du fait d'un phénomène connu sous le nom d'effet de pointe. On retrouve ces conditions au sommet des arbres ou du mât du Beagle comme dans l'expérience de Darwin.

Pour appréhender un tel effet, on considère un conducteur plan infini dans lequel un endroit possède la forme d'un coin obtus ou aigu (Fig. 3) dont le sommet O forme l'origine d'un repère de coordonnées polaires. La région de l'espace pour laquelle $0 < \theta < \varphi$ est l'air assimilé au vide ne contenant aucune charge libre. Les conditions aux limites sont $V(r,0) = V(r,\varphi) = V_0$. On note $V(M)$, le potentiel électrique en un point M de l'espace.

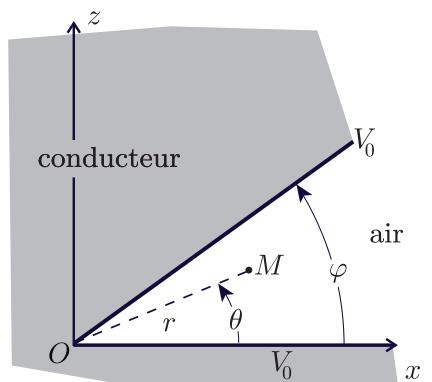


FIGURE 3 – Modèle de coin.

- – 7. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $V(r,\theta)$ dans cette région.

On cherche une solution aux variables polaires séparées : $V(r,\theta) = f(r) \times g(\theta)$. Écrire les équations vérifiées par f et g et en déduire que $V(r,\theta) = \tilde{V} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \theta)$. Dans cette relation, \tilde{V} et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer. On précisera par contre l'expression de ω_n en fonction de φ et de l'entier positif n .

- – 8. En ne considérant que le terme $n = 1$ qui s'avère prépondérant, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$.

En déduire une condition sur φ pour laquelle $\vec{E}(M)$ peut devenir très important si $M \rightarrow O$.

II Propriétés mécaniques des fils d'araignée

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale ℓ_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke : $\frac{\delta\ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$ où E est le module de Young du matériau constituant le fil.

- – 9. Quelle est la dimension de E ?

Montrer que, dans ce régime, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur ℓ_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de ℓ_0 et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur ℓ .

On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 4.

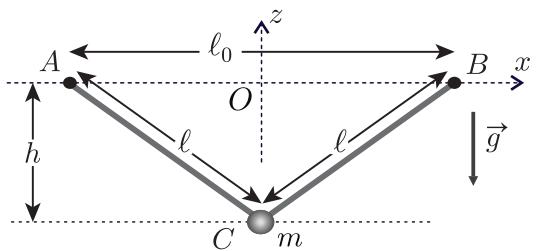


FIGURE 4 – Extension d'un fil.

- – 10. Établir, lorsque la masse m est suffisamment faible, la loi de puissance qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure 5 ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $\ell_0 = 5 \text{ cm}$ de rayon $a = 5 \mu\text{m}$ et différentes masses m suspendues.

- – 11. Vérifier que la loi obtenue à la question 10 est compatible avec l'expérience.

Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil. On pourra utiliser la figure 9 du formulaire.

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enruler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc.

Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.

La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{\max} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{\max} = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

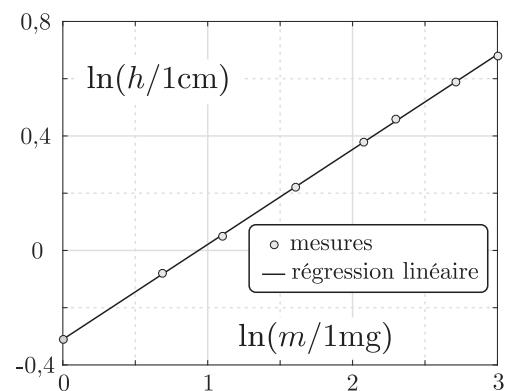


FIGURE 5 – Mesures de $h(m)$.

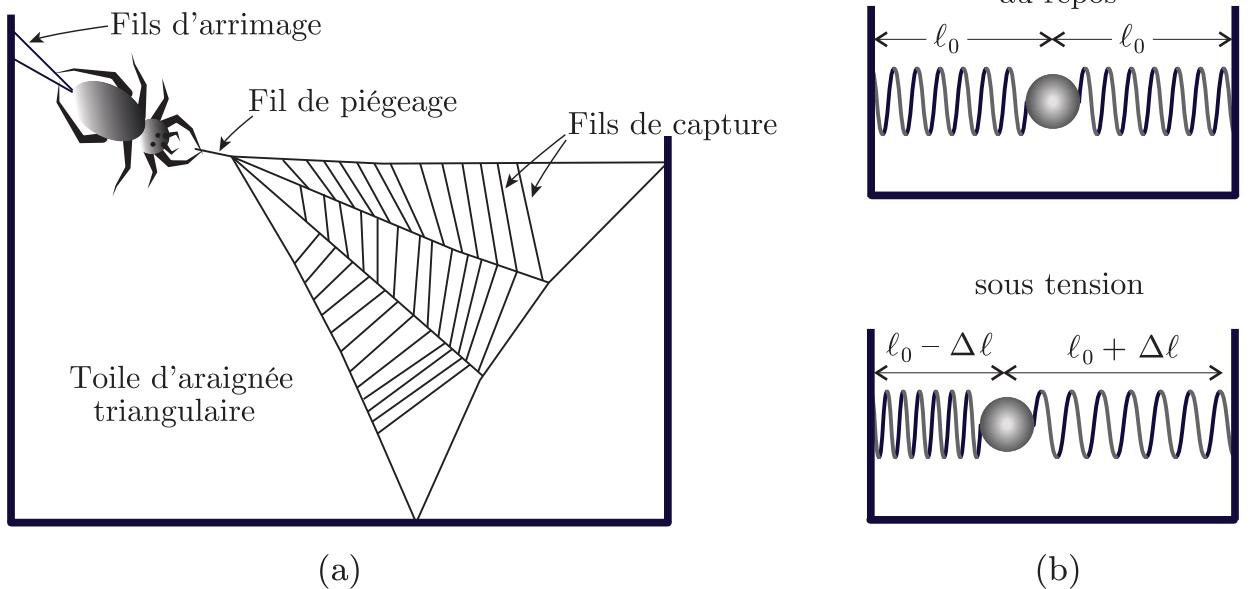


FIGURE 6 – (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension

□ – 12. En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l’araignée, estimer, en fonction de v_{\max} et a_{\max} , l’allongement maximum $\Delta\ell$ du fil avant que l’araignée ne relâche la tension (Fig. 6), ainsi que sa raideur k en fonction de m , v_{\max} et a_{\max} .

Évaluer, en fonction de m , v_{\max} et a_{\max} , la puissance mécanique instantanée maximale \mathcal{P}_{\max} développée pendant le processus de capture.

Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d’environ $\mathcal{P} = 326 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ par kilo de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu’il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse à $m = 75 \text{ kg}$, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d’immeuble en immeuble.

Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 25 \text{ m}$ sur un point de l’immeuble situé en face, à l’horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(t=0) = \pi/2$.

Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale. (Fig. 7).

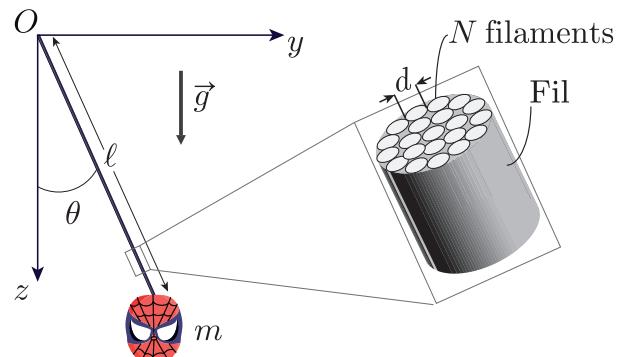


FIGURE 7 – Le vol de SPIDERMAN.

□ – 13. Écrire les équations du mouvement de SPIDERMAN. En déduire, en fonction de m et g , l’expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l’on suppose qu’il est inextensible.

On suppose que le fil que tisse SPIDERMAN est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle.

- – 14. Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèle.

Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10 \text{ MPa}$ et $a = 5 \mu\text{m}$, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne subissent pas une déformation supérieure à 1 % et donc pouvoir supporter SPIDERMAN lors de son vol ?

Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par SPIDERMAN dans les films ?

III Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r , mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ , autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x,t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x,t) = T_x(x,t)\hat{e}_x + T_z(x,t)\hat{e}_z$.

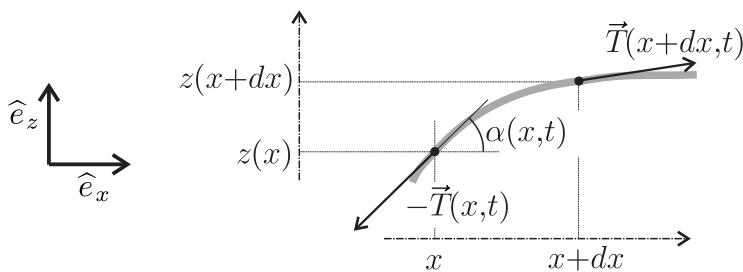


FIGURE 8 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x,t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $|\frac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$;
- On néglige les effets de la pesanteur.

- – 15. On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds , $\cos[\alpha(x,t)]$ et $\sin[\alpha(x,t)]$ en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x,t)$ ne dépend pas de x .

Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

□ – 16. Montrer que le déplacement du fil $z(x,t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

On exprimera c en fonction de T et μ . Que représente cette grandeur physique ?

□ – 17. Montrer que des fonctions de la forme $z(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g .

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoïdal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, \underline{A} et \underline{B} des amplitudes complexes.

□ – 18. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $\underline{z}(x,t)$.

En déduire la relation entre \underline{A} et \underline{B} ainsi que les valeurs de ω permises.

Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

□ – 19. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-1}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ?

Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 newtons, que pouvez-vous conclure ?

Dans le cadre d'un modèle plus élaboré on prend en compte la raideur du fil à travers son module de Young E . L'équation de propagation des ondes de déformation de faible amplitude dans un fil de rayon a devient alors :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{E\pi a^4}{4} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

□ – 20. En supposant que la déformation $z(x,t)$ de la corde est de la même forme que précédemment, établir la relation de dispersion donnant k en fonction de ω et des paramètres du problème.

Montrer que les fréquences propres de la corde s'écrivent alors sous la forme :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell} \sqrt{1 + Bn^2}, \quad (3)$$

où B est une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de E , T , ℓ et a .

Sachant que pour la corde fabriquée à partir des fils d'araignée $E = 6,0 \text{ GPa}$ et $a = 350 \mu\text{m}$ et que pour une corde classique $E = 2,5 \text{ GPa}$ et $a = 400 \mu\text{m}$, que pouvez-vous conclure sur la nature du son produit à T et ℓ fixées ?

Formulaire

Détail de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

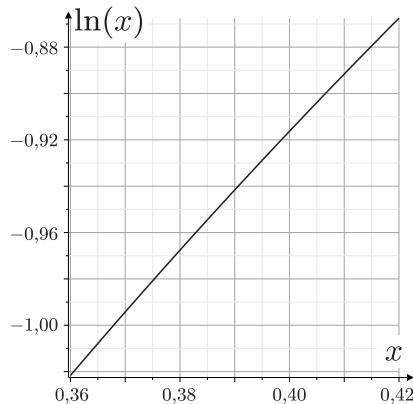


FIGURE 9 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0,36; 0,42]$.

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Rayon terrestre	$R_t = 6400 \text{ km}$
Permitivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Accélération de pesanteur terrestre	$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

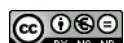
*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Des objets astronomiques, de Mars à Sirius

Ce sujet comporte deux problèmes totalement indépendants étudiant différents aspects de l'astronomie (la science des planètes et des étoiles) et en particulier de l'astrophysique (l'étude des modèles physiques des astres). Le problème **I** décrit des notions connues depuis le XVII^e siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de KEPLER et NEWTON). Le problème **II** propose une étude de quelques propriétés énergétiques des étoiles en comparant leur énergie gravitationnelle avec des termes comparables liés aux autres interactions au sein de l'étoile.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des *constantes fondamentales utiles*, des *données numériques* et des rappels de *syntaxe Python* sont regroupés en fin d'énoncé. On pourra noter $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy) , cf. figure 1.

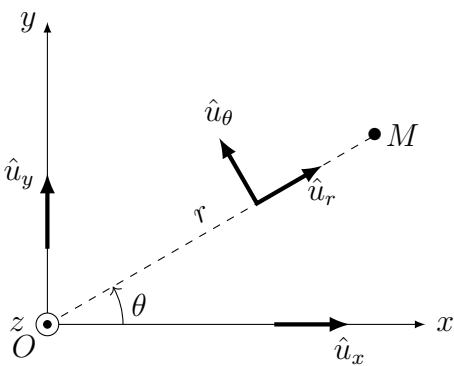


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $j^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Les vecteurs \vec{w} sont surmontés d'une flèche, sauf les vecteurs unitaires notés \hat{u} .

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique

Ce problème est consacré aux lois de KEPLER (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont tous deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par NEWTON (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

I.A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen (\mathcal{R}_0) , le mouvement d'un astre \mathcal{P} assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur \mathcal{A} de masse m_A et de centre fixe A . On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\hat{u}_r$.

□ – 1. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle \vec{F} exercée par \mathcal{A} sur \mathcal{P} si les deux astres sont assimilés à des points ?

- 2. Que devient l'expression de \vec{F} si \mathcal{P} reste ponctuel tandis que l'astre \mathcal{A} , de rayon $R_A < r$, possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.
- 3. Cette expression reste-t-elle encore applicable si \mathcal{P} et \mathcal{A} sont tous deux à symétrie sphérique ? *On pourra, dans tout ce qui suit, considérer \mathcal{A} et \mathcal{P} comme des points matériels A et P.*
- 4. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy) .

On note \vec{v} la vitesse de P et $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P . \vec{v} est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ .

- 5. Exprimer $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta) = C \frac{\hat{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ où \vec{e} est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation \mathcal{G} .

Montrer que le vecteur \vec{e} est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e\hat{u}_y$ avec $e = \|\vec{e}\| \geq 0$.

- 6. Exprimer \dot{r} et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ .

En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné.

Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T .

I.B Période du mouvement

- 7. En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T = \mathcal{I}p^{3/2}/\sqrt{\mathcal{G}m_A}$ où la constante \mathcal{I} s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$.
- 8. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des *lois de Kepler*, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique » sous forme d'une phrase en français.

Le calcul de l'intégrale \mathcal{I} en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

- 9. Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leq e \leq \frac{1}{2}$.

Note : on pourrait mener le calcul exact de l'intégrale qui fournit $\mathcal{I}(e) = (1 - e^2)^{-3/2} \mathcal{I}_{e=0}$. Ce calcul n'est pas demandé !

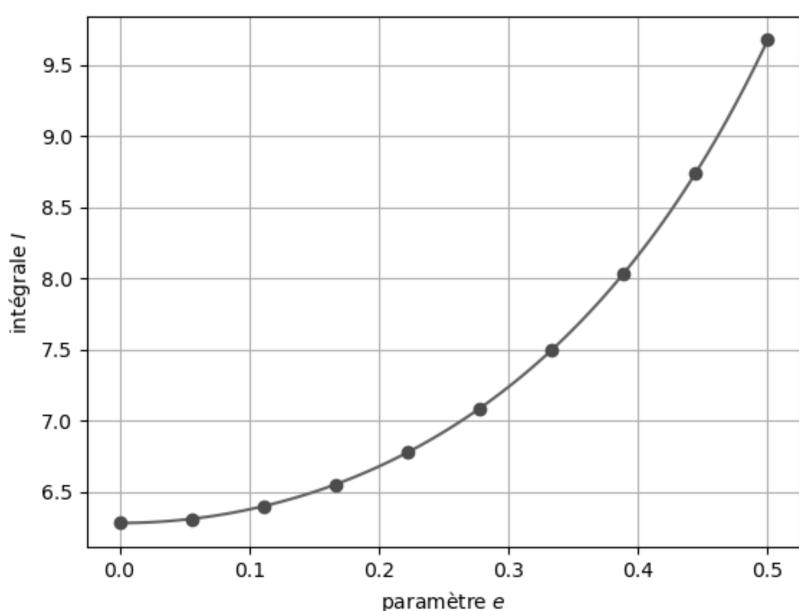


FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale \mathcal{I}

I.C Mesure de l'unité astronomique

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de COPERNIC, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1 , de périodes T_0 et T_1 .

Le principe de la mesure de a_0 proposée par CASSINI, à la fin du XVII^e siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7\,070$ km) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance *minimale* de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris → Mars et Cayenne → Mars).



FIGURE 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde *Mars Global Surveyor*, photo NASA

- – 10. Représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0 , a_1 , ℓ , α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).
- – 11. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0 , T_1 , ℓ et α .
- – 12. La valeur annoncée par CASSINI était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci-dessus ?

II Structure et énergie des étoiles

Les parties II.A, II.B et II.C sont très largement indépendantes. Les étoiles à l'équilibre seront ici décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile : il s'agira de la pression thermodynamique associée à l'agitation thermique dans la partie II.B et d'une propriété strictement quantique, la pression de confinement, dans la partie II.C.

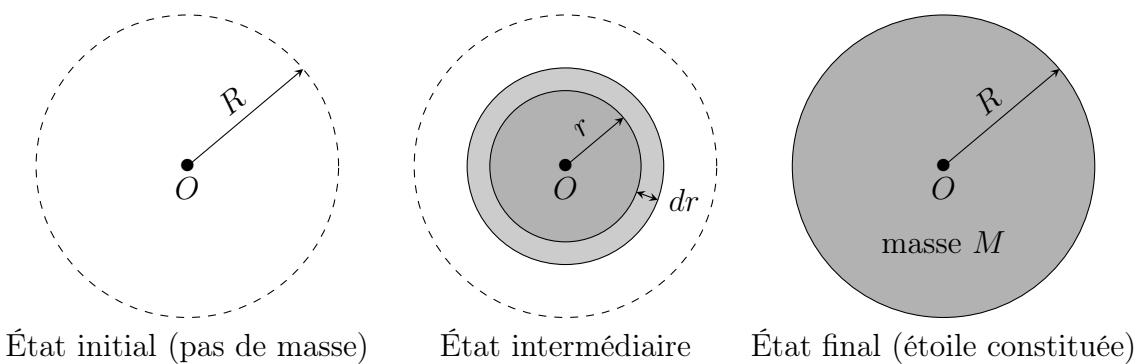


FIGURE 4 – Constitution progressive de l'étoile

II.A L'énergie gravitationnelle

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur *fournit* à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4). Ce calcul sera effectué pour une évolution *quasi-statique*, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

- – 13. Donner et justifier physiquement le signe de W_g . Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = -W_g$ l'*énergie de liaison* de l'étoile.
- – 14. Exprimer la masse volumique ρ , supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R .
En déduire, en fonction de M , R et r , les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de dm (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à $r + dr$).
- – 15. Justifier que la contribution dW_g à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à $r + dr$) s'écrit $dW_g = -\mathcal{G} \frac{m dm}{r}$.
Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de \mathcal{G} , M et R .

II.B Pression cinétique

Certaines étoiles sont en équilibre sous l'action de la pression cinétique liée à l'agitation thermique qui résiste seule à l'effondrement gravitationnel. On va tout d'abord décrire cet équilibre dans une géométrie cartésienne, l'axe (Oz) étant dirigé selon le champ de gravitation local $\vec{G}(z) = G(z)\hat{u}_z$ (figure 5) avec $G(z) < 0$. On note aussi $\rho(z)$ la masse volumique du fluide au repos et $P(z)$ la pression dans le fluide.

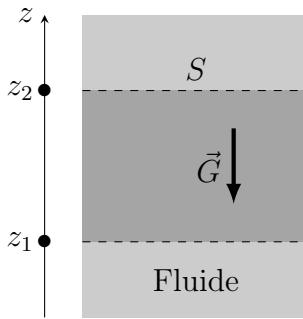


FIGURE 5 – Géométrie du champ de gravitation local

- – 16. On s'intéresse à l'équilibre de la colonne de fluide d'aire S et comprise entre les altitudes z_1 et z_2 . Expliciter, éventuellement sous forme intégrale, les forces exercées sur cette colonne.
En déduire l'équation différentielle reliant $P(z)$, $\rho(z)$ et $G(z)$.

La pression équilibrant la force gravitationnelle, les ordres de grandeur des énergies thermique et gravitationnelle doivent être comparables ; nous allons ici le vérifier en évaluant l'énergie cinétique de l'étoile dans le cadre d'un modèle très simplifié dans lequel la masse volumique ρ est constante mais qui prend maintenant en compte la géométrie sphérique du système. On suppose ainsi que l'équation d'équilibre local obtenue en géométrie cartésienne à la question 16 se généralise grâce à la symétrie sphérique en faisant $z \rightarrow r$ avec $\rho(r) = \text{cste.}$

- – 17. Un volume V de fluide est soumis à la pression P , supposée uniforme. Dans quel modèle l'énergie cinétique d'agitation thermique associée peut-elle s'écrire $E_c = \frac{3}{2}PV$? *Dans la suite de cette partie II.B on supposera que c'est bien le cas en chaque point intérieur à l'étoile.*
- – 18. Expliciter le champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ ressenti au sein de l'étoile en équilibre à la distance r du centre, en fonction de \mathcal{G} , M , R et r .
En déduire l'expression de la pression $P(r) = \frac{3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^6}(R^2 - r^2)$.
- – 19. Calculer l'énergie cinétique totale de l'étoile E_c en fonction de \mathcal{G} , M et R ; commenter.

II.C Pression de confinement quantique

Nous ne ferons plus ici l'hypothèse d'un équilibre de la gravitation par la pression cinétique ; au contraire, nous négligerons tout effet thermique pour les étoiles décrites dans cette partie **II.C**.

L'étoile sphérique étudiée ici, de rayon R , de masse M et de volume V est essentiellement constituée de N atomes d'hydrogène, donc de N protons de masse m_p et d'autant d'électrons de masse $m_e \ll m_p$, chacune de ces particules étant confinée dans un volume $\vartheta = V/N$. On va montrer que le principe d'incertitude impose à chacun des atomes une énergie cinétique dite de confinement quantique. Celle-ci sera évaluée dans un modèle très simplifié, chaque particule restant libre de toute interaction mais confinée dans un volume cubique de côté a tel que $a^3 = \vartheta$.

- – 20. Exprimer a en fonction de M , R et m_p seulement.

On rappelle pour un état stationnaire d'une particule de masse m , libre et à une dimension (Ox), l'équation de SCHRÖDINGER avec $\hbar = h/2\pi$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ pour la fonction d'onde $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-j\omega t}$.

- – 21. La particule étudiée étant confinée à l'intervalle $x \in [0, a]$, exprimer la fonction d'onde spatiale $\psi_1(x)$ et l'énergie e_1 de l'état fondamental en fonction de h , m et a .
Justifier que cette relation illustre le principe d'indétermination de HEISENBERG.
- – 22. Que deviennent ces expressions de la fonction d'onde et de l'énergie de l'état fondamental dans un modèle confiné à trois dimensions, $x \in [0, a]$, $y \in [0, a]$ et $z \in [0, a]$?
- – 23. En déduire que l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile se met sous la forme $E_c = \gamma M^{5/3}/R^2$ dans laquelle on exprimera γ en fonction de h , m_p et m_e .

II.D Le cas des naines blanches

On s'intéresse ici aux naines blanches, étoiles dans lesquelles la pression due au confinement quantique (avec l'énergie cinétique exprimée en fonction de M et R dans la partie **II.C**) est nettement supérieure aux effets de l'agitation thermique (que l'on négligera donc ici) et compense seule les effets de la gravitation (avec l'énergie de gravitation exprimée également en fonction de M et R dans la partie **II.A**).

La particularité de ces étoiles (essentiellement composées de carbone) et la prise en compte des dégénérescences des états d'énergie des électrons introduisent des facteurs numériques dans l'expression de γ obtenu dans un cas simple à la question **23**. Ces spécificités ne modifient toutefois pas l'expression de l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile. En 1926, FOWLER¹ propose la valeur $\gamma = 1,6 \cdot 10^6$ SI pour les naines blanches. On utilisera cette valeur dans le reste du problème.

- – 24. Pour une étoile de ce type, déterminer le rayon R_{eq} qui assure un minimum de l'énergie totale.
- – 25. Calculer numériquement R_{wd} dans le cas d'une masse égale à celle du Soleil et conclure.
En 1931, CHANDRASEKHAR² explique qu'il faut prendre en compte le caractère relativiste des électrons confinés dans les naines blanches. Il en deduira un modèle plus correct pour ces étoiles.
- – 26. En estimant la vitesse des électrons dans le modèle de FOWLER justifier l'argument de CHANDRASEKHAR.

FIN DE L'ÉPREUVE

1. R. H. FOWLER, *On dense matter*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **87**, 114, 1926
2. S. CHANDRASEKHAR, *The maximal mass of ideal white dwarfs*, Astrophysical Journal, **74**, 81, 1931

Formulaire en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} [F(r)] = \frac{dF}{dr} \hat{u}_r \quad \text{div } [F(r) \hat{u}_r] = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 F(r)]$$

Données numériques

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687 \text{ j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4,85 \mu\text{rad}$

On donne $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \simeq 1,6$ et $\left[\frac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \frac{5}{4}$.

Syntaxes Python

Syntaxe d'appel	Résultats ou commentaires
★ Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a, b]$:	
<code>r = numpy.linspace(a, b, n)</code>	<code>r</code> est un tableau de type <code>numpy.array</code>
★ Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique	
<code>r = scipy.integrate.quad(f, a, b)</code>	<code>r = (y, err)</code>
★ Créer ou activer une fenêtre de tracé :	
<code>r = matplotlib.pyplot.figure()</code>	exécuter <i>avant</i> de générer des tracés
★ Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$	
<code>matplotlib.pyplot.plot(x, y)</code>	<code>x</code> et <code>y</code> , énumérables de même dimension
★ Afficher la ou les fenêtres de tracé :	
<code>matplotlib.pyplot.show()</code>	exécuter <i>après</i> avoir généré des tracés



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Impulsion mécanique et mesures optiques

Le sujet comporte quatre parties **I**, **II**, **III** et **IV** qui, bien que liées les unes aux autres, peuvent être abordées de manière totalement indépendante sous réserve d'admettre éventuellement les résultats affirmés par l'énoncé. Dans les questions posées, *exprimer* signifie donner une expression littérale et *calculer* signifie donner une valeur numérique ; toutes les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les vecteurs seront surmontés d'une flèche, \vec{p} ou \vec{v} . Les grandeurs complexes seront soulignées, Ψ ou \underline{z} , sauf i, tel que $i^2 = -1$.

Dans le langage général, le sens usuel du mot *impulsion* désigne l'élan initial qu'on peut donner à une particule élémentaire ou à un projectile macroscopique qui poursuit ensuite son mouvement. Le même mot a un sens plus spécifique en physique ; l'impulsion, d'abord définie en mécanique *classique* comme la quantité de mouvement dans de très nombreux cas, se retrouve en mécanique *quantique* comme en mécanique *relativiste* avec un sens étendu.

Nous *admettrons* dans tout ce qui suit que l'impulsion \vec{p} d'une particule ponctuelle *libre* (non engagée dans une liaison), de masse m et d'énergie E est, dans le cadre général de la théorie d'EINSTEIN (1905), donnée par la relation dite du *triangle relativiste* :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1)$$

où $p = \|\vec{p}\|$ et $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide ; par ailleurs, cette même impulsion \vec{p} est, dans la description *ondulatoire* des particules, associée à la longueur d'onde λ de l'onde associée à la particule par la relation de DE BROGLIE (1924) :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

où $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$ est la constante de PLANCK (1900).

I Impulsion de particules élémentaires

- 1. Quel est, à votre avis, la nature du « triangle relativiste » évoqué par la relation (1) ? Représenter celui-ci.

Quelle est l'unité usuelle, dans le système international, de l'impulsion p ? du produit pc ?

L'énergie des systèmes *macroscopiques* s'exprime usuellement en joule (J) ou en kilowatt-heure ($1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$). Dans toute la suite de la partie **I**, l'énergie des particules *élémentaires* sera donnée en MeV (méga-électron volt) où $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ et $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Les masses des particules seront données en MeV/c^2 et leurs impulsions en MeV/c . Par exemple la masse de l'électron vaut $m_e = 0,51 \text{ MeV}/c^2$ et celle du proton vaut $m_p = 940 \text{ MeV}/c^2$ (ou, si on préfère, $m_e c^2 = 0,51 \text{ MeV}$ et $m_p c^2 = 940 \text{ MeV}$).

- 2. On appelle *énergie de repos* d'une particule la valeur E_0 de l'énergie de celle-ci lorsque son impulsion est nulle. Exprimer E_0 pour un proton et calculer sa valeur numérique.

Pour une particule *en mouvement*, le supplément d'énergie $E_c = E - E_0$ porte le nom d'*énergie cinétique*.

- 3. On s'intéresse d'abord aux particules vérifiant la relation (1) dans le cas de la *limite classique*, lorsque $E_c \ll E_0$. En vous limitant au premier ordre non nul, donner dans ce cas une expression de E_c en fonction de l'impulsion p et de la masse m de la particule. Quelle est alors la relation entre l'impulsion \vec{p} et la vitesse \vec{v} d'une particule ?

Quelle vitesse maximale peut-on donner à un proton pour rester dans la limite classique telle que $E_c/E_0 < 1\%$? Même question pour un électron.

Si on ne se limite pas aux faibles vitesses, on peut montrer, et on l'admettra, la relation générale entre la masse m , la vitesse \vec{v} de norme $v = \|\vec{v}\|$, l'impulsion \vec{p} de la particule et la célérité c de la lumière :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

- – 4. En déduire l'expression générale de l'énergie totale $E = f(E_0, v, c)$ d'une particule de masse m .
- – 5. Un photon est une particule associée à une onde électromagnétique dans le vide et dont la vitesse est donc égale à c . Que peut-on en déduire, pour sa masse, de la relation $E = f(E_0, v, c)$ établie à la question précédente ?

Déduire de (2) l'expression de l'énergie E d'un photon en fonction de la longueur d'onde λ puis de la fréquence ν de l'onde. Faire l'application numérique dans les cas des ondes lumineuses des domaines bleu ($\lambda \sim 400 \text{ nm}$) puis rouge ($\lambda \sim 600 \text{ nm}$). On pourra exploiter le fait que $hc \simeq 1,2 \text{ eV} \times \mu\text{m}$ et on exprimera E en eV.

II Le spectre d'émission des atomes d'hydrogène

On s'intéresse ici à l'émission d'un photon, d'énergie E et d'impulsion $p = E/c$, par un atome initialement au repos, de masse m . Au cours de cette émission, l'atome passe de l'énergie initiale E_i à l'énergie finale $E_f = E_i - \Delta E < E_i$ et il recule avec, dans le cadre d'une description classique, l'impulsion $m\vec{v}$ et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ (figure 1) de sorte que l'impulsion *totale* du système complet reste nulle après l'émission, comme elle l'était avant émission. La direction de l'impulsion \vec{p} du photon est donc opposée à la vitesse \vec{v} de l'atome qui recule.

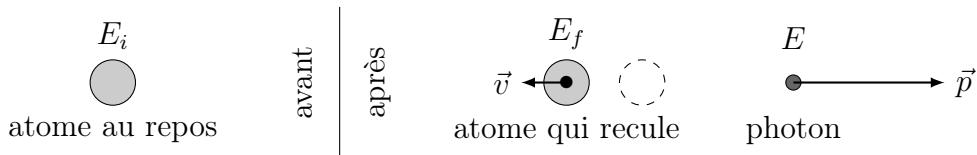


FIGURE 1 – Émission d'un photon par un atome au repos

- – 6. On admet que l'énergie totale du système après émission est identique à celle de l'atome au repos avant l'émission. En déduire la relation $E = mc^2 \left(\sqrt{1 + 2\eta} - 1 \right)$ et exprimer η en fonction de ΔE , m et c .
- – 7. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, ΔE est de l'ordre de quelques électrons-volts. En déduire qu'on peut négliger l'énergie de recul de l'atome et conclure quant à la relation entre $\Delta E = E_i - E_f$ et l'énergie E du photon émis.

La résolution de l'équation de SCHRÖDINGER (1922) dans le cas de l'atome d'hydrogène montre que les valeurs de l'énergie E_n de l'atome sont quantifiées en fonction du nombre quantique principal $n \in \mathbb{N}^*$ et de la grandeur $H = 27,2 \text{ eV}$ selon la relation : $E_n = -H/(2n^2)$. Cette expression est confirmée par l'étude des ondes lumineuses, de longueur d'onde λ , émises par un ensemble d'atomes d'hydrogène qui rayonnent par désexcitation depuis un état initial quantifié par n_i vers l'état final quantifié par $n_f < n_i$.

- – 8. Lorsque l'état final est $n_f = 1$, montrer qu'il existe une λ_{\max} telle que $\lambda \leq \lambda_{\max}$ et donner une estimation de λ_{\max} . Quel est le domaine spectral correspondant à ces raies d'émission ? Lorsque l'état final est $n_f > 2$, montrer qu'il existe une λ_{\min} que l'on estimera, telle que $\lambda \geq \lambda_{\min}$. Quel est le domaine spectral correspondant à ces raies d'émission ? Les raies d'émission de l'hydrogène dans le domaine visible (les raies de BALMER) ont été étudiées à partir de 1853 par ÅNGSTRØM ; à quelles valeurs de n_f correspondent-elles ?

C'est la connaissance précise de ce spectre qui a permis l'étude de la quantification de l'énergie des atomes donc l'introduction de la mécanique quantique au début de XX^e siècle. Cette connaissance a été par la suite améliorée au moyen de la spectrométrie interférentielle.

III Mesures interférométriques de longueurs d'onde

En 1907, MICHELSON est le premier américain à recevoir le prix Nobel de physique pour ses instruments optiques de précision et les mesures spectroscopiques et métrologiques réalisées au moyen de ceux-ci. En particulier, il publierà en 1892 des mesures relatives aux spectres d'émission de plusieurs sources, obtenues par spectroscopie interférentielle, et notamment pour les raies H_α (rouge) et H_β (bleue) d'émission par les atomes d'hydrogène.

III.A L'interféromètre de Michelson

Le schéma du montage utilisé par MICHELSON est proposé figure 2. Le dispositif monochromateur, formé d'un prisme de verre dispersif et d'une fente étroite, éclaire l'appareil en sélectionnant une raie quasi-monochromatique de longueur d'onde λ_0 , appartenant au domaine visible. L'observation est réalisée au moyen d'un oculaire afocal, réglé à l'infini : il donne d'un objet situé à grande distance une image également à grande distance, mais agrandie.

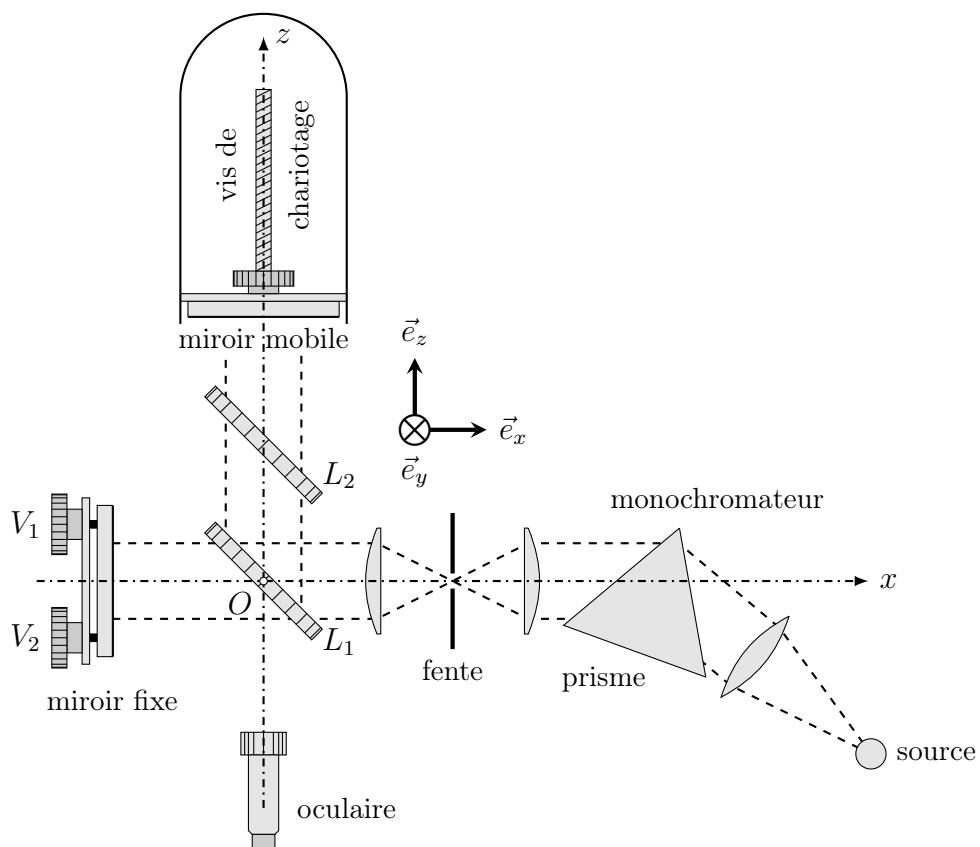


FIGURE 2 – Dispositif de mesure en spectroscopie interférentielle

- – 9. L'interféromètre comporte deux lames de verre L_1 et L_2 , parallèles, de même épaisseur e et de même indice optique n , inclinées d'un angle $\pi/4$ relativement à l'axe (O, \vec{e}_x) normal au miroir fixe. La lame L_1 est munie d'une couche semi-réfléchissante sur une seule de ses faces ; laquelle ? Justifier, en vous appuyant sur un schéma.

- – 10. Après réglage des vis V_1 et V_2 les miroirs fixe et mobile sont rendus rigoureusement perpendiculaires ; l'axe optique (O, \vec{e}_z) de l'oculaire est alors confondu avec la normale au miroir mobile et l'opérateur observe, au moyen de cet oculaire réglé à l'infini, des franges d'interférence. Quelle est la forme de ces franges ?
Peut-on encore les observer si l'oculaire est déréglé ?
- – 11. Tout en observant les franges, l'observateur peut actionner la vis micrométrique et déplacer le miroir mobile dans le plan (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y), le long de l'axe (O, \vec{e}_z). Relier le nombre ΔN de franges sombres qui défilent au centre du champ et le décalage Δz du miroir mobile.
- – 12. Exprimer, au moyen d'un schéma approprié, la différence de marche observée à l'infini dans une direction donnée, en fonction de l'écart séparant les deux miroirs.
Le déplacement maximal de la vis micrométrique à partir du contact optique est noté Δz_{\max} . Déterminer, après ce déplacement, l'angle $\Delta\theta$ qui sépare le centre de la figure de la première frange de même nature.
- – 13. Dans le cas d'une des raies de l'hydrogène atomique, on observe le défillement de $N = 3\,156$ franges pour un décalage $\Delta z = 1\,035 \pm 2 \mu\text{m}$. S'agit-il de la raie H_α ou H_β ?
Avec quelle précision relative mesure-t-on sa longueur d'onde λ_0 ?
Que vaut alors $\Delta\theta$? Commenter.

III.B Cohérence spectrale d'une source

Une source de lumière éclaire avec la même intensité I_0 les deux voies d'un interféromètre ; l'observation est réalisée en un point où la différence de marche est δ .

- – 14. Dans le cas où la source est rigoureusement monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , exprimer l'intensité $I(\delta)$ en fonction de I_0 , λ_0 et δ . Définir et calculer le facteur de contraste C des franges.

Certaines sources lumineuses sont en fait *bichromatiques* : elles émettent deux radiations de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2 et on pose alors $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ en admettant toujours $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

- – 15. Pour certaines sources bichromatiques les deux radiations émises sont de même intensité ; c'est le cas des lampes à vapeur de sodium, étudiées notamment par MICHELSON dans les conditions décrites en III.A. Expliciter l'intensité I observée en fonction de I_0 , de la différence de marche δ , de λ_0 et de $\Delta\lambda$.

Exprimer le facteur de contraste C des franges et montrer comment il permet la mesure de $\lambda_0/\Delta\lambda$.

- – 16. D'autres sources, comme celles émettant la raie H_α de l'hydrogène, peuvent être écrites comme bichromatiques mais les intensités I_1 et $I_2 < I_1$ émises aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Pour quelle(s) valeur(s) de δ le facteur de contraste des franges est-il minimal ? Quelle est cette valeur minimale ?

Dans le cas de la raie double H_α , l'écart $\Delta\lambda$ est de l'ordre de $1,4 \times 10^{-11} \text{ m}$. Est-il possible de le mettre en évidence avec le montage proposé ci-dessus ?

III.C Les tubes à hydrogène

Pour l'étude du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène, une première technique¹, initiée dans les années 1930, a consisté à utiliser un tube AB contenant de l'hydrogène moléculaire (dihydrogène, formule H_2) sous faible pression (150 mbar) soumis à des décharges électriques de

1. D. Chalonge et Ny Tsi Zé, *J. Phys. Radium*, 1930

haute tension entre deux électrodes E_1 et E_2 ; l'observation se fait au travers d'une fenêtre de quartz F (cf. figure 3). Le spectre d'émission obtenu présente la superposition d'un fond quasi-continu et de raies bien identifiées, comme le montre la figure 4 tirée de l'article présentant la technique originelle.

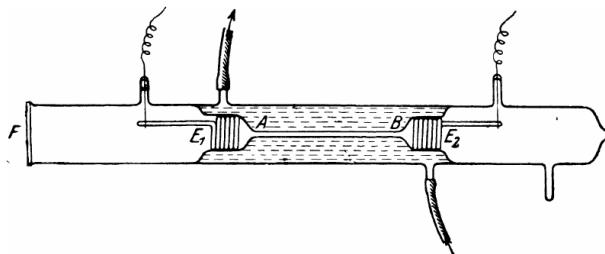


FIGURE 3 – Illustration du dispositif : reproduction de la figure 1 de l'article original

□ – 17. Quel est le rôle du circuit à circulation d'eau qui entoure le tube central ?

Sur le spectre proposé en figure 4, quelle est l'unité de la graduation donnée en abscisse ? Quelle est, à votre avis, l'origine du fond continu (essentiellement dans le proche ultraviolet) marqué en trait pointillé gris ?

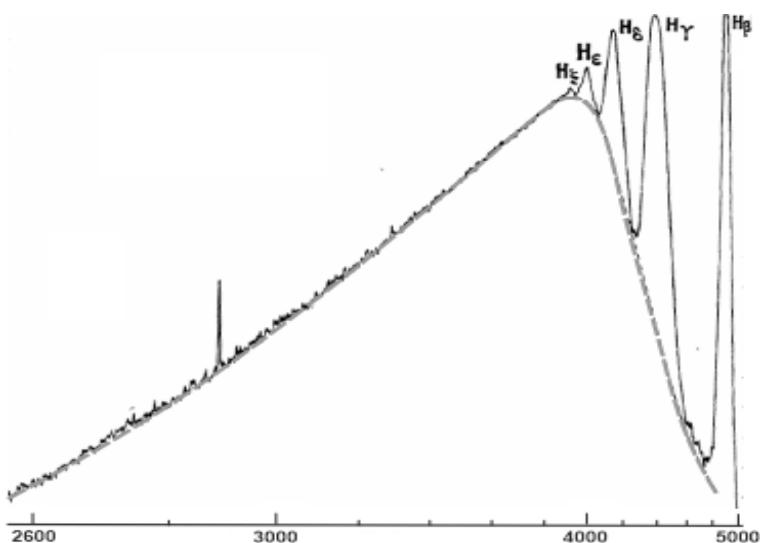


FIGURE 4 – Spectre d'émission du tube à hydrogène en échelle logarithmique

On préfère actuellement utiliser des lampes à décharge d'une constitution différente : il s'agit de tubes à décharge remplis de vapeur d'eau permettant l'obtention d'un spectre atomique sans bande continue. En présence des décharges à haute tension, ce type de lampe est le siège des réactions $\text{H}_2\text{O} = \text{HO} + \text{H}$.

□ – 18. Quelle propriété du spectre d'émission de la molécule hydroxyle HO est ici mise à profit ?

Ces lampes contiennent une certaine proportion d'*eau lourde*, molécules HDO dans laquelle un des deux atomes d'hydrogène ${}_1^1\text{H}$ est remplacé par un atome de deutérium ${}_1^2\text{D}$, dont le noyau est formé d'un proton et d'un neutron. Si on tient compte de la masse m_N du noyau atomique, on peut montrer que la longueur d'onde d'émission d'une des raies spectrales de l'hydrogène atomique vérifie la relation :

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{m_e + m_N}{m_N}$$

où m_e est la masse de l'électron et λ_∞ la longueur d'onde idéale si $m_N \rightarrow \infty$.

- – 19. Les raies d'émission du deutérium sont-elles, par rapport à celle de l'hydrogène ordinaire, décalées vers le bleu ou vers le rouge ?

De quelle résolution spectrale (en nanomètre) faut-il disposer pour séparer les raies de l'hydrogène et celles du deutérium ?

À partir d'une lecture de la courbe de la figure 4, faire l'application numérique dans le cas de la raie H_β .

IV L'équation de Klein–Gordon

Lors du développement de la mécanique quantique (ou mécanique ondulatoire), l'onde de matière $\underline{\Psi}(\vec{r},t)$ a d'abord été considérée comme solution de l'équation de SCHRÖDINGER (4) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\Psi} + V(\vec{r})\underline{\Psi} = i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial t} \quad \text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ et } i^2 = -1 \quad (4)$$

pour une particule de masse m repérée par sa positon \vec{r} et soumise à l'interaction décrite par la fonction potentiel scalaire $V(\vec{r})$. En 1926, KLEIN et GORDON en ont proposé une version modifiée qu'on écrira :

$$\hbar^2 c^2 \Delta \underline{\Psi} + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r}) \right)^2 \underline{\Psi}(\vec{r},t) = m^2 c^4 \underline{\Psi}(\vec{r},t) \quad (5)$$

Dans la suite on s'intéressera exclusivement aux solutions de l'une ou l'autre équation, de la forme :

$$\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - p(E)x) \right]$$

où $\underline{\psi}_0$ est une certaine constante complexe, x est l'une des coordonnées cartésiennes de \vec{r} , $E > 0$ est l'énergie de la particule et $p(E) > 0$ son impulsion.

- – 20. L'état associé à cette fonction d'onde est-il stationnaire ?

Dans quel sens le mouvement de la particule décrite par cette onde a-t-il lieu ?

Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g en fonction de E , de $p(E)$ et de sa dérivée.

- – 21. Exprimer $p(E)$ et $v_g(E)$ dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de SCHRÖDINGER dans un domaine où V est constant. En déduire le caractère relativiste ou non du modèle associé à l'équation de SCHRÖDINGER.

- – 22. Répondre aux mêmes questions dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de KLEIN–GORDON (5).

On s'intéresse enfin à la résolution du problème physique suivant : la particule étudiée est libre ($V = 0$) pour $x < 0$ et $x > a$ et pourvue d'une énergie E , tandis que, dans l'intervalle $x \in [0,a]$, elle est soumise à une interaction caractérisée par $V = V_0 > E$ (figure 5) et même $V_0 - E > mc^2$. Les solutions de l'équation (de SCHRÖDINGER ou de KLEIN–GORDON) seront donc écrites, pour $x < 0$ et $x > a$, sous les formes respectives :

$$\underline{\Psi}(x < 0, t) = \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right] + \underline{R} \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et + px) \right]$$

$$\underline{\Psi}(x > a, t) = \underline{T} \underline{\psi}_0 \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]$$

où \underline{T} et \underline{R} sont deux constantes complexes.

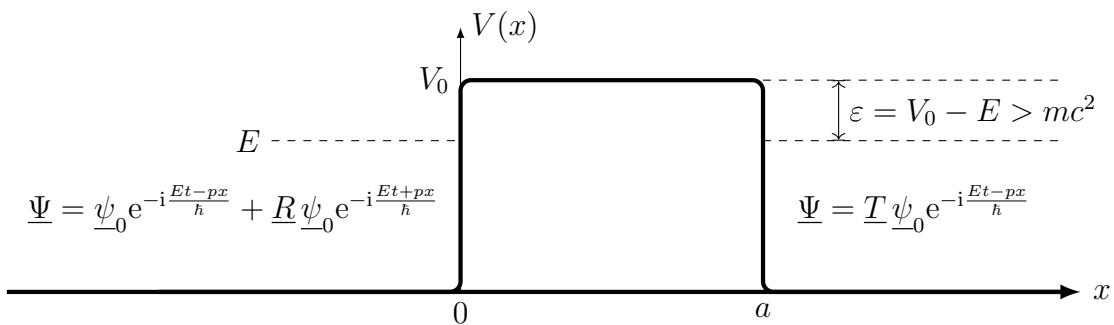


FIGURE 5 – Barrière de potentiel

On se place d'abord dans le cas de l'équation de SCHRÖDINGER.

- – 23. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x \in [0,a]$?

Quelles relations permettent de calculer \underline{R} et \underline{T} ? *On ne demande pas de les exprimer ici!*

Quel phénomène physique peut-on mettre ainsi en évidence ?

Quelle est l'interprétation physique de $|\underline{T}|^2$?

On se place maintenant dans le cas de KLEIN–GORDON.

- – 24. Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x \in [0,a]$? On notera qu'en introduisant

$$\varepsilon = E - V_0, \text{ on a } q^2 = \frac{(\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2)}{c^2} > 0.$$

Les mêmes relations que dans l'étude de la barrière de potentiel dans le cadre de l'équation de SCHRÖDINGER conduisent, pour l'onde de KLEIN–GORDON, à la relation (que l'on admettra) :

$$|\underline{T}|^2 = \frac{1}{|\cos \varphi - i\alpha \sin \varphi|^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{qa}{\hbar}$$

- – 25. Déterminer la valeur maximale de $|\underline{T}|^2$. Commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



La Lune, notre satellite

La Lune est le satellite naturel de la Terre. De tout temps, elle a été pour les humains un objet de mesure du temps, une source de lumière nocturne voire une divinité. Elle est aujourd’hui un objet de recherche scientifique et un symbole de la conquête spatiale.



Ce sujet aborde différents aspects de l’étude de la Lune. Il comporte, tout d’abord, l’étude antique qu’a réalisée Aristarque de Samos sur la Lune, puis la télémétrie Terre-Lune moderne. On étudie ensuite une théorie sur l’origine de la Lune avant de s’intéresser à l’étude de son noyau. Les deux parties sont largement indépendantes.

Les applications numériques seront données avec 2 chiffres significatifs.

Plusieurs données numériques et formules sont fournies en fin de sujet.

I Les caractéristiques de la Lune et de son orbite

I.A La Lune dans l’antiquité

Dès l’antiquité les humains se sont intéressés à la Lune et à ses caractéristiques.

La Lune réalisant une révolution autour de la Terre tout en étant éclairée par le Soleil, la partie visible de la Lune depuis la Terre change. La succession des phases de la Lune vue depuis la Terre s’appelle un cycle lunaire et a permis de définir la notion de mois. La durée d’un cycle lunaire est environ $\tau_{cl} = 30$ jours.

L’écart entre la période de révolution τ_ℓ de la Lune et le cycle lunaire provient du fait qu’en même temps que la Lune tourne autour de la Terre, cette dernière tourne également autour du Soleil. Après une révolution de la Lune autour de la Terre, la phase de la Lune n’est pas la même. La Lune doit parcourir une plus grande distance pour finir le cycle lunaire.

- – 1. Rappeler quelle est la période de révolution τ_t de la Terre autour du Soleil.
En déduire la fraction φ de l’orbite que parcourt la Terre durant un cycle lunaire.
- – 2. En déduire la période de révolution de la Lune autour du centre de la Terre.

Au III^{ème} siècle avant Jésus-Christ, Aristarque de Samos réalise des mesures astronomiques afin de déterminer les dimensions de la Lune ainsi que le rayon de son orbite autour de la Terre. À partir de ses observations il mesure que :

- la Lune met 1 heure à parcourir son propre diamètre vu depuis la Terre ;
- lors d’une éclipse totale de Lune, la Lune reste 2 heures dans l’ombre de la Terre ;
- l’angle sous lequel on voit la Lune depuis la Terre est de 2° (on sait aujourd’hui que c’est environ 4 fois moins).

- – 3. À la même période, Ératosthène mesure qu'un arc de $7,2^\circ$ de la circonférence terrestre mesure environ 800 km. En déduire la valeur du diamètre terrestre.
- – 4. En utilisant les mesures d'Aristarque de Samos, déterminer le rapport entre le diamètre lunaire et le diamètre terrestre. On pourra s'aider d'un schéma.
En déduire la valeur du diamètre lunaire évaluée par Aristarque.
Calculer l'écart relatif de ce résultat avec le véritable diamètre de la Lune qui est d'environ 3 500 km. Commenter.
- – 5. On conserve désormais la valeur du diamètre de la Lune valant 3 500 km. Déterminer la distance Terre-Lune à partir des mesures d'Aristarque de Samos.
- – 6. La masse volumique moyenne d'une roche est de l'ordre de quelques tonnes par mètre cube. En déduire une estimation de la masse de la Lune puis de l'intensité du champ de pesanteur lunaire. Comparer avec l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

I.B La mesure moderne de la distance Terre-Lune

La mesure actuelle de la distance Terre-Lune se fait à l'aide de la télémétrie laser. Depuis la surface de la Terre, on envoie une impulsion laser vers des miroirs déposés à la surface de la Lune par différentes missions, dont celui le plus utilisé, déposé par la mission Apollo 15 en 1971.

Pour produire le laser nécessaire à cette expérience, on réalise une cavité optique constituée de deux miroirs en vis-à-vis séparés par de l'air dans lequel on place un amplificateur optique. La cavité optique est paramétrée sur la figure 1. Le repère orthonormé $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$ est direct.

On considère que les miroirs sont constitués de métal idéal, c'est-à-dire qu'un champ électrique ne peut pas se propager à l'intérieur. Le champ électrique $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ est introduit dans la cavité optique. Enfin, l'amplificateur optique ne sera pas pris en compte pour la propagation de l'onde dans la cavité remplie d'air qui sera supposé avoir les mêmes propriétés que le vide pour le champ électromagnétique.

On rappelle la relation de passage pour le champ électrique entre deux milieux 1 et 2 : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ où \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont les champs électriques dans les milieux 1 et 2 ; σ est la charge surfacique de l'interface entre les deux milieux ; ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide ; \vec{n}_{12} est le vecteur normal à l'interface dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.



FIGURE 1 – Cavité optique.

- – 7. Quelles sont les caractéristiques du champ électrique \vec{E}_i introduit dans la cavité optique ?
On précisera le nom et l'unité des grandeurs E_0 , ω et k .
- – 8. En utilisant la relation de passage fournie, déterminer l'expression du champ électrique réfléchi par le miroir situé en $x = L$.
- – 9. Déterminer les expressions du champ magnétique incident \vec{B}_i et du champ magnétique réfléchi \vec{B}_r existants dans la cavité.
- – 10. En déduire l'expression du champ électrique résultant \vec{E} et du champ magnétique résultant \vec{B} dans la cavité. Commenter le résultat obtenu en terme d'amplitude, de phase et de tout autre caractère pertinent.

- – 11. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde électromagnétique résultante ainsi que sa valeur moyenne au cours d'une période $\tau = 2\pi/\omega$. L'un des deux miroirs n'est pas parfaitement réfléchissant, quel en est l'intérêt ? Expliquer le rôle de l'amplificateur optique.
- – 12. Justifier que la forme du champ électromagnétique ne permet pas d'utiliser la cavité pour obtenir n'importe quelle fréquence laser. Déterminer l'expression des fréquences possibles en fonction notamment de la longueur L de la cavité.
- – 13. Le laser utilisé pour la télémétrie Terre-Lune est un laser YAG-Nd de longueur d'onde $\lambda = 1\,064\text{ nm}$ auquel on a adjoint un doubleur de fréquence. Quelle est la longueur d'onde utilisée pour cette mesure et quel est le domaine électromagnétique correspondant ?
- – 14. La durée moyenne de l'aller-retour pour un très grand nombre d'impulsions laser entre la Terre et la Lune est $\Delta t = 2,56\text{ s}$. Déterminer la distance Terre-Lune obtenue par la télémétrie laser. Comparer avec le résultat obtenu par la mesure d'Aristarque de Samos. Commenter.

II Les origines de la Lune

L'origine de la Lune a été soumise à de nombreuses hypothèses. Des hypothèses les plus folkloriques aux hypothèses les plus sérieuses, l'origine de la Lune est toujours soumise à controverses, malgré un consensus important de la communauté scientifique sur la théorie de l'impact.

II.A La théorie de la fission

La théorie de la fission est introduite par l'astronome Georges Darwin, fils du célèbre biologiste, à la fin du XIX^{ème} siècle. Dans cette théorie Darwin suppose que, lorsque la Terre était encore en formation et liquide, sa rotation a suffi à la déformer et à en expulser une partie. Ce morceau expulsé de la Terre serait à l'origine de la Lune. Darwin imaginait même que le grand océan pacifique était le vestige de cet événement.

On a représenté sur la figure 2 ci-après les différentes phases de cette théorie : 1.La Terre non déformée, 2.La Terre déformée par rotation, 3.La création d'un bourrelet pré-lunaire et l'expulsion de la Lune et 4.La Lune créée.

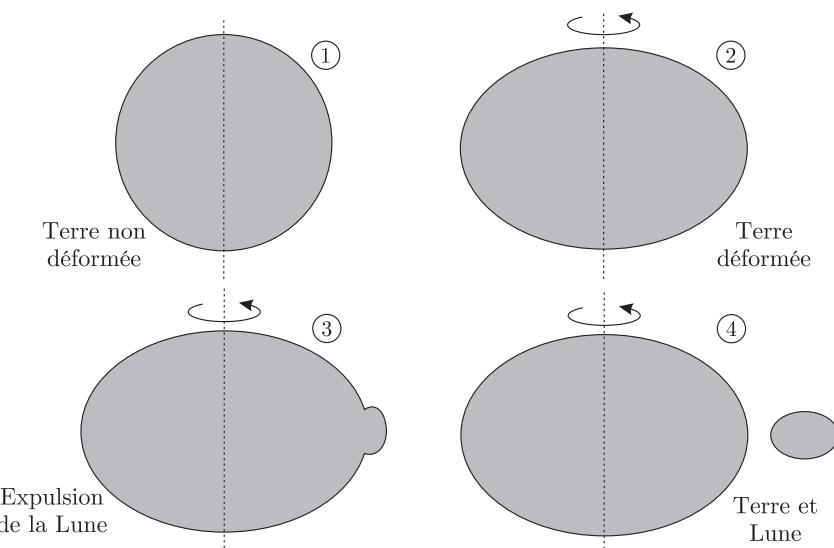


FIGURE 2 – Étapes de la formation de la Lune dans la théorie de Darwin de la fission.

- – 15. Expliquer en quoi la plus faible densité de la Lune par rapport à la Terre est un argument en faveur de la théorie de la fission.

On étudie un morceau de roche terrestre de masse m , posé sur la surface de la Terre. On se place dans le référentiel terrestre non galiléen en coordonnées sphériques $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\phi)$. On rappelle que la latitude d'un point de la surface terrestre est l'angle entre le rayon de la Terre en ce point et le plan de l'équateur, lui-même orthogonal à l'axe de rotation terrestre.

- – 16. Rappeler le nom et l'expression générale de chacune des forces d'inertie. On précisera clairement la signification des différentes grandeurs introduites.
- – 17. Réaliser un bilan des forces exercées sur l'élément de masse m posé à la surface de la Terre. Réaliser un schéma de la situation dans le cas où la masse considérée se trouve à la latitude λ .
- – 18. Justifier la forme de la Terre déformée par rotation représentée sur la seconde étape de la figure 2. Déterminer une estimation de la variation ρ du rayon de la terre entre sa valeur au pôle et celle à l'équateur.

On considère désormais que la masse se situe au niveau de l'équateur.

- – 19. En reprenant le bilan des forces sur la masse m dans ce cas, calculer la période de rotation terrestre nécessaire pour expulser de la Terre cette masse. Comparer cette valeur avec la période actuelle de rotation terrestre. Faire un commentaire sur la validité de la théorie de la fission.

II.B La théorie de l'impact

La théorie de l'impact propose qu'une petite planète ait percuté la Terre, provoquant le mélange des deux astres et l'expulsion de débris qui se sont regroupés pour former la Lune. Cette théorie est celle qui fait actuellement consensus dans la communauté scientifique.

Les études sismologiques sur la Lune ont montré qu'elle possède un noyau dont une partie est solide. On retrouve la structure interne de la Lune sur la figure 3.

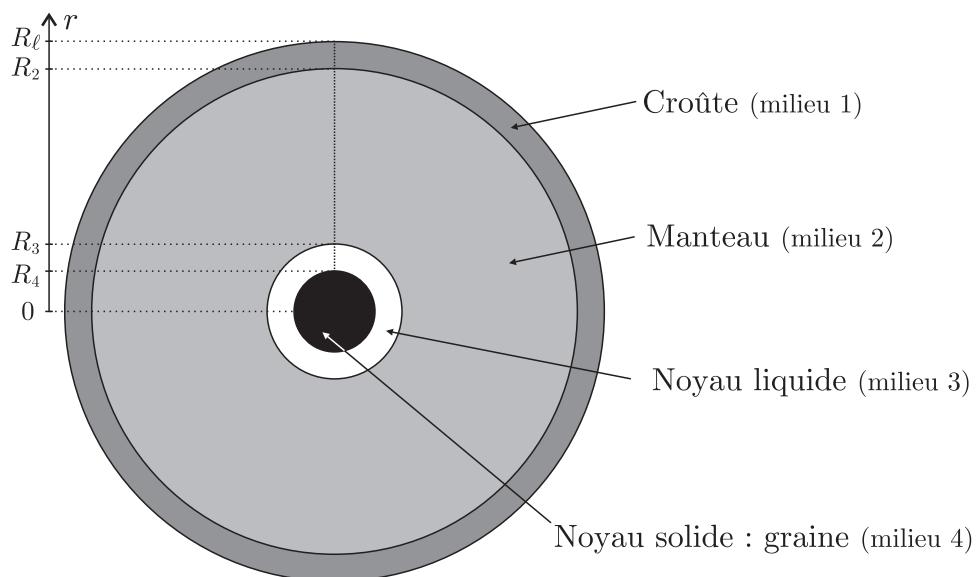


FIGURE 3 – Structure interne de la Lune.

La croûte est constituée d'anorthosite, une roche magmatique. Le manteau est constitué d'un mélange d'olivine, d'orthopyroxène et de clinopyroxène. Le noyau liquide et la graine sont principalement constitués de fer. On considère que chacune des couches est homogène. On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution de la température de la Lune suite à l'impact. On note :

- T_s et T_ℓ , les températures à la surface du Soleil et de la Lune ;
- R_s et R_ℓ , les rayons du Soleil et de la Lune ;
- $D_{s-\ell}$, la distance entre le Soleil et la Lune ;
- \mathcal{A} , l'albédo de la Lune, c'est-à-dire la fraction de l'énergie solaire reçue qui est réfléchie par la Lune.

□ – 20. En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, fournie en fin de sujet, déterminer l'expression de la puissance solaire absorbée par la Lune. En l'assimilant à un corps noir, déterminer ensuite l'expression de la puissance perdue par la Lune par rayonnement. Déterminer enfin l'expression de la puissance totale perdue par la Lune.

L'application numérique de cette grandeur donne une puissance de l'ordre de 10^{15} W.

□ – 21. Rappeler la loi de Fourier en indiquant les noms et les unités des grandeurs introduites.

□ – 22. Établir l'équation de la chaleur. Donner l'expression du coefficient de diffusion thermique et son unité. On notera les grandeurs avec l'indice $i = 1,2,3,4$ correspondant aux différents milieux décrits sur la figure 3. On considérera les conductivités thermiques uniformes et constantes en les prenant égales à leur moyenne sur le volume de la couche considérée.

□ – 23. Établir les quatre équations traduisant la conservation du flux thermique au niveau des quatre interfaces que l'on doit considérer.

Différentes études permettent d'obtenir une estimation de la température de la Lune en fonction de la profondeur. Les résultats de cette estimation sont fournis sur la figure 4.

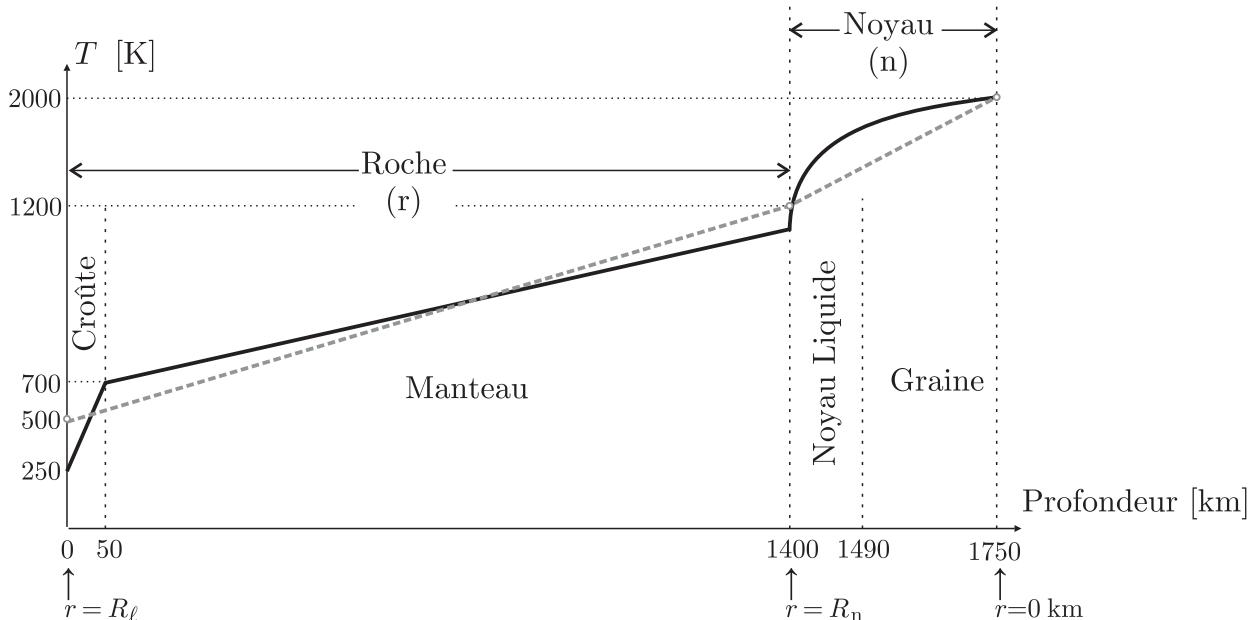


FIGURE 4 – Estimation de la température interne de la Lune en trait noir plein. Modèle simplifié (affine par morceau) en trait gris pointillé.

- – 24. Expliquer en quoi le profil de température dans le noyau n'est pas incompatible avec l'existence de la graine.

On adopte dorénavant une vision simplifiée dans laquelle :

- la Lune n'est constituée que de deux couches : la couche rocheuse jusqu'à 1400 km de profondeur et le noyau de fer au centre ;
- la température de chacune des deux couches est modélisable par une fonction affine de la coordonnée radiale : $T_n(r) = a_n - b_n r$ pour le noyau (n) et $T_r = a_r - b_r r$ pour la roche (r). Ce modèle simplifié est représenté en trait gris pointillé sur la figure 4 ;
- les capacités thermiques volumiques du noyau et de la roche peuvent être considérées comme constantes en les prenant égales à leur moyenne sur le volume de la couche correspondante.

- – 25. Déterminer les valeurs numériques des constantes a_n , b_n , a_r et b_r .
- – 26. En utilisant la modélisation affine de la température, déterminer l'expression de l'énergie interne de la Lune en fonction notamment des capacités thermiques volumiques de la roche et du noyau ainsi que des rayons R_n du noyau et R_ℓ de la Lune.
L'application numérique de cette grandeur donne $4,1 \cdot 10^{28}$ J.
- – 27. Déterminer l'expression de l'énergie interne de la Lune lorsqu'elle sera totalement refroidie et thermalisée à la température $T_f = 250$ K.
L'application numérique de cette grandeur donne $1,4 \cdot 10^{28}$ J.
- – 28. Donner une estimation du temps nécessaire pour que la Lune soit uniformément refroidie dans ce modèle. Commenter le résultat obtenu.

Données

- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Permeabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$
- La puissance *surfacique* \mathcal{P} rayonnée par un corps noir dont la surface est à la température T est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann. Elle s'exprime sous la forme $\mathcal{P} = \sigma T^4$ où σ est la constante de Stefan-Boltzmann.
- Gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

- Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$$



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Instabilités et oscillations de relaxation

Ce sujet est consacré à certaines situations physiques instables conduisant à des oscillations de relaxation. Ce terme désigne des oscillations non linéaires obtenues par l'augmentation continue d'une contrainte, suivie du relâchement subit de celle-ci. Le sujet est constitué de trois problèmes totalement indépendants sur cette thématique assez courante en physique.

Bien que les trois problèmes traitent de phénomènes physiques analogues, les méthodes développées sont totalement différentes :

- le problème **I** analyse un oscillateur historique de l'électronique linéaire. Il s'agit de l'emploi de méthodes numériques pour l'intégration des équations différentielles déduites des lois physiques, avec prise en compte d'un basculement périodique ;
- le problème **II** est consacré à l'étude des régimes stables et instables d'un montage à portes logiques. Il s'agit de la résolution par morceaux d'une équation différentielle linéaire, avec raccordement par continuité d'une grandeur physique ;
- le problème **III** s'intéresse à une description analytique complète des équations du mouvement d'un solide frottant sur un support fixe et du crissement qui en résulte.

Les vecteurs (\vec{w}) sont surmontés d'une flèche. Les applications numériques seront réalisées avec un seul chiffre significatif. Lorsqu'un **code informatique** est demandé, il sera rédigé dans la syntaxe de **Python 3**. Un petit formulaire et quelques valeurs numériques sont regroupés en fin d'énoncé.

I Oscillateur à tube

On considère le montage de la figure 1 comportant un générateur idéal de tension constante E_0 , un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C et un dipôle \mathcal{D} assimilé à un résistor de résistance $R_L = \alpha R$.

I.A Une première équation d'évolution

Dans un tel circuit linéaire, l'équation d'évolution de $u(t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont la solution comporte d'une part une solution de l'équation homogène $u_H(t)$ et d'autre part une solution particulière $u_P(t)$.

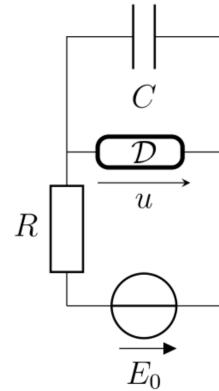


FIGURE 1 – Circuit

– 1. Laquelle de ces deux solutions correspond au régime transitoire ?

Sa forme générale dépend-elle de E_0 ?

Proposer un schéma simplifié et en déduire, en effectuant le moins de calculs possible, qu'il s'agit d'une solution caractérisée par une constante de temps τ_α qu'on explicitera en fonction de $\tau_0 = RC$ et de α .

– 2. À quelle condition l'autre solution correspond-elle au régime permanent ?

Sa forme générale dépend-elle de C ? des résistances R et R_L ?

Proposer un schéma simplifié et en déduire simplement l'expression correspondante u_∞ de u en fonction de α et E_0 .

I.B Un dipôle à deux états

En réalité, le dipôle \mathcal{D} est une lampe contenant un gaz raréfié qui peut être dans deux états électriques (lampe éteinte ou allumée). Ces deux états correspondent chacun à une valeur de α .

Le comportement électrique de \mathcal{D} diffère selon son état : c'est un assez bon conducteur si elle est allumée, et un assez bon isolant si elle est éteinte.

□ – 3. Que peut-on dire *a priori* de α si la lampe est éteinte ? si elle est allumée ?

On réalise le circuit avec $R = 20 \text{ k}\Omega$ et $C = 200 \mu\text{F}$. Lors du branchement initial du circuit, on admettra que la lampe est éteinte et le condensateur déchargé. Par la suite :

- la lampe reste éteinte tant que la tension à ses bornes vérifie $|u| < U_a$ où $U_a = 90 \text{ V}$ est la tension d'allumage ; dans ce cas elle a pour résistance $R_e \gg R$;
- une fois allumée, la lampe a pour résistance $R_a \simeq 1 \text{ k}\Omega$; elle reste allumée sauf si la tension à ses bornes diminue trop et elle va donc s'éteindre dès lors que $|u| < U_e$ où $U_e = 70 \text{ V}$ est la tension d'extinction.

□ – 4. Exprimer et calculer τ_α dans les deux régimes, successivement lampe éteinte puis allumée.

□ – 5. Exprimer la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ si la lampe ne s'allume jamais ; puis si elle reste allumée.

En déduire que le système oscille seulement si $E_0 > 0$ est compris dans un intervalle que l'on déterminera. Est-ce le cas avec $E_0 = 120 \text{ V}$, valeur choisie dans la suite ?

Ces oscillations seront-elles observables à l'œil ?

I.C Étude numérique du régime d'oscillation

On propose une étude numérique des oscillations au moyen d'un algorithme dérivé de la méthode d'Euler explicite pour l'étude de $u(t)$; le passage de t à $t + \delta t$ se fait au moyen de la fonction `Next` :

```

1 def Next(u, al, dt):
2     i = (E - u)/R
3     if al:
4         al = u >= Ue
5     else:
6         al = u > Ua
7     u += dt*(i - al*u/Ra)/C
8     return u, al

```

□ – 6. Quelle est la signification de la variable (logique) `al` ?

Quel est l'objectif des lignes 3 à 6 ?

Justifier, au moyen d'un schéma électrique, la ligne 7.

On propose enfin de tracer l'allure de la courbe représentative de $u(t)$ au moyen du code ci-après :

```

1 E = 120.0
2 R = 2.0E4
3 C = 200.0E-6
4 Ua = 90.0
5 Ue = 70.0
6 Ra = 1.0E3
7 tmax = 20.0
8
9 def Etude(tmax, N, u0, al10):
10    h = tmax/N
11    t, u, all = 0, u0, al10
12    LT = LU = []

```

```

13     for k in range(N):
14         LT.append(t)
15         LU.append(u)
16         t = t + h
17         u, all = Next(u, all, h)
18     pl.figure()
19     pl.plot(LT, LU)
20     pl.show()

```

suivi de l'exécution des lignes :

```

1 import matplotlib.pyplot as pl
2 Etude(tmax, 500, 0, False)

```

– 7. Le tracé sera-t-il satisfaisant ?

Si non, quelle(s) modification(s) proposez-vous ?

Après rectification si nécessaire, *l'allure* du tracé obtenu est représenté figure 2.

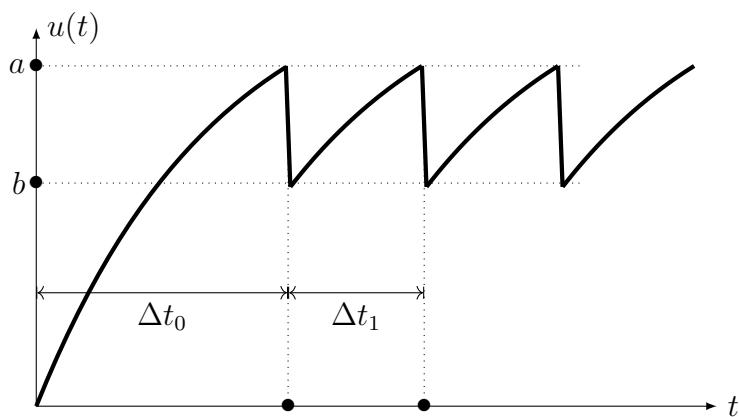


FIGURE 2 – Tracé de $u(t)$ par la méthode numérique proposée

– 8. Sur la figure 2, identifier les phases où la lampe est allumée et celles où elle est éteinte ; quelle est la valeur de a ?

La valeur de b dépend en fait du paramètre N de la fonction `Etude` ; avec $N = 500$ on trouve par exemple $b \simeq 59$ V. Expliquer pourquoi cette valeur reste inférieure à 70 V ?

II Oscillateur à portes logiques

Dans la partie précédente, les oscillations étaient dues aux deux états du dipôle \mathcal{D} . On peut également utiliser un circuit comportant une rétroaction pour engendrer des oscillations : c'est le cas dans cette partie.

II.A Identification d'un circuit intégré

On récupère au laboratoire un circuit intégré comportant un certain nombre de portes logiques identiques, dont on est sûr :

- de leur tension d'alimentation $V_{cc} = 15$ V associée à la technologie CMOS employée ;
- de la faible valeur ($i < 0,1 \mu\text{A}$) des courants d'entrée, qu'on négligera donc dans tout ce qui suit.

Les références du circuit intégré n'étant plus lisibles, on n'est plus sûr de la nature des portes en question ; on sait cependant qu'il s'agit nécessairement de portes figurant dans la liste AND, OR, NAND, NOR (ou en français ET, OU, NON ET, NON OU). Pour déterminer la nature de ces portes, on réalise deux séries de mesures de la caractéristique *entrée-sortie* selon les schémas des figures 3 et 4

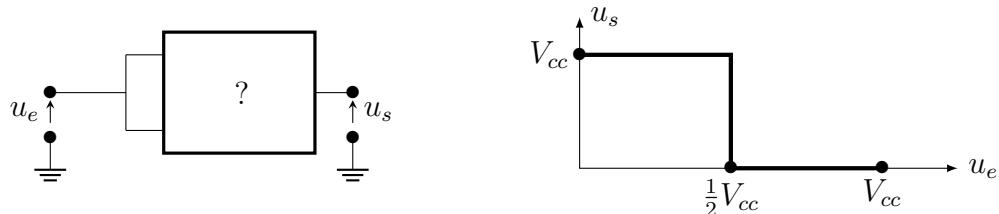


FIGURE 3 – Montage d'une première série de mesures (à gauche) et ses résultats (à droite).

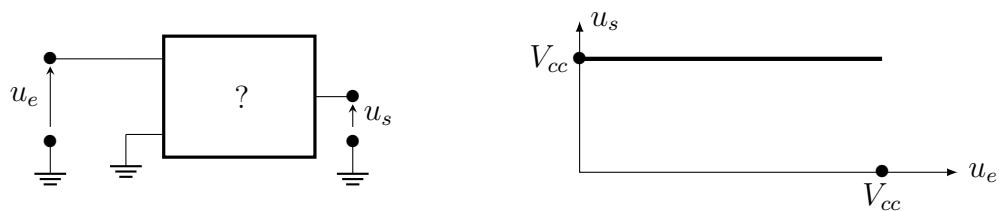
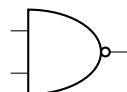


FIGURE 4 – Montage de la seconde série de mesures (à gauche) et ses résultats (à droite).

- – 9. Que peut-on déduire de la *première* expérience (figure 3) ? Et de la *seconde* expérience (figure 4) ?

On poursuivra l'étude, indépendamment des conclusions ci-dessus, en n'utilisant que des portes NAND (NON ET) que l'on symbolisera à l'aide du schéma suivant :



- – 10. Proposer des montages n'utilisant que des portes NAND réalisant les fonctions NOT, AND et OR. On vérifiera le comportement de chaque montage en donnant sa table de vérité.
- – 11. Le circuit intégré *Texas Instruments CD-4011* (photographie de la figure 5) comporte quatorze broches (*pins* en anglais). Combien de portes NAND comporte-t-il au maximum ? Justifier.



FIGURE 5 – Circuit intégré TI CD-4011

II.B Emploi de portes logiques

De nombreux documents destinés à la réalisation de montages d'électronique musicale proposent l'utilisation du circuit théorique présenté sur la figure 6 avec $R = 1\text{ M}\Omega$ et $C = 100\text{ nF}$. La tension d'entrée marquée v (pour « valid ») peut être, selon le cas :

- maintenue égale à $v = 0\text{ V}$ (le circuit est alors dit *invalidé*) ;
- portée à la valeur constante $v = +V_{cc}$ (le circuit est alors dit *validé*). On considérera qu'à l'instant de la validation le condensateur est déchargé.

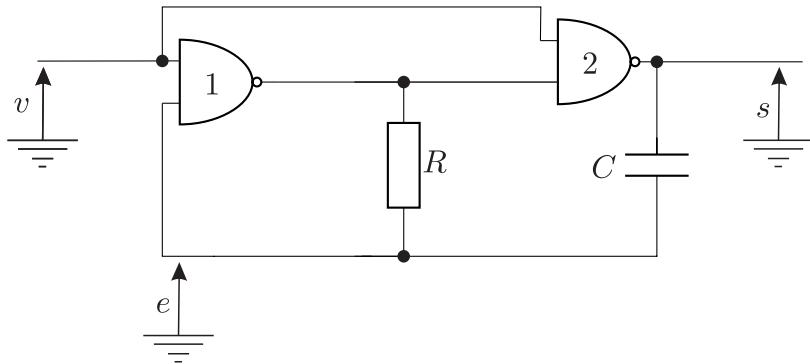


FIGURE 6 – Un circuit classique de l'électronique musicale

On notera $s(t)$ la tension en sortie de la porte 2 et $e(t)$ la tension à l'autre entrée de la porte 1 (voir figure 6). Les tensions e , s et v sont toutes déterminées relativement à la masse électrique du montage. Dans toute la suite de cette partie, on suppose que le seuil de basculement des portes NAND utilisées est égal à $V_{cc}/2$. On notera respectivement b_s et b_e les valeurs binaires associées à s et e ; ainsi par exemple $b_s = 1$ si $s > V_{cc}/2$ et $b_s = 0$ sinon.

- – 12. Lorsqu'il est invalidé, montrer que le circuit atteint toujours un état stable pour lequel on déterminera les valeurs de s et e , et de b_s et b_e .
- – 13. À l'instant $t = 0$ le circuit est alors validé. Montrer qu'une seule des deux portes NAND change d'état (on dit qu'elle bascule); laquelle ?
Que dire de la différence $e(t) - s(t)$ en $t = 0^+$ et en $t = 0^-$? Exprimer $e(t)$ et en déduire que cet état dure jusqu'à un instant t_1 , que l'on déterminera en fonction de R et C .

Un nouveau changement d'état a lieu à l'instant $t = t_1$

- – 14. Exprimer $s(t_1^+)$ et $e(t_1^+)$ où la notation t_1^+ désigne la limite $t \rightarrow t_1$ par valeur supérieure. Déterminer alors $e(t)$ pour $t > t_1$ et en déduire que cet état dure jusqu'à un instant t_2 que l'on exprimera en fonction de R et C .
- – 15. Avec la même convention, exprimer $s(t_2^+)$ et $e(t_2^+)$, puis $e(t)$ pour $t > t_2$. En déduire l'existence d'un nouvel instant de basculement $t_3 > t_2$ que l'on exprimera en fonction de R et C .
- – 16. Tracer l'allure de $e(t)$ et $s(t)$ sur une durée au moins égale à $2t_3$, en positionnant clairement les instants t_1 , t_2 et t_3 ainsi que les valeurs de e et s correspondantes.
- – 17. Commenter le comportement du circuit et calculer la valeur numérique de la durée caractéristique associée.

Proposer une application dans le domaine pour lequel ce circuit a été conçu.

III Le crissement

III.A Les lois de Coulomb

Les crissements et grincements qui caractérisent certains frottements sont des oscillations de relaxation. La fréquence des relaxations est aussi celle de l'onde sonore émise, qui est souvent désagréable à entendre, notamment à cause de sa position dans la gamme des sons aigus. Nous allons en donner une description très simplifiée, dans le cadre des lois, dites de Coulomb, qui régissent le frottement de glissement d'un solide (Σ) en translation relativement à un support fixe (F).

Nous supposerons ici l'existence (figure 7) d'une surface de contact plane entre (Σ) et (F).

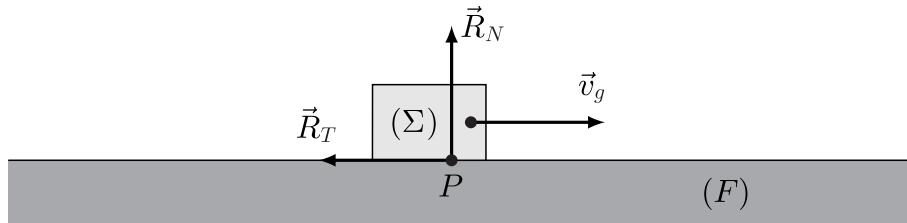


FIGURE 7 – Lois de Coulomb du frottement de glissement

Ces lois décrivent la force de contact $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ exercée par le support (F) sur le solide (Σ). Il s'agit d'une force exercée en un point P de la surface de contact des deux solides ; elle peut être décomposée en une partie \vec{R}_T colinéaire à la surface de contact des deux solides et une autre \vec{R}_N perpendiculaire à celle-ci.

Les lois de Coulomb distinguent deux situations :

- Lorsque (Σ) est *en mouvement* à la vitesse \vec{v}_g (dite vitesse de glissement), \vec{R}_T est colinéaire à \vec{v}_g , de sens inverse et de norme proportionnelle à celle de \vec{R}_N , $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$, où le coefficient $f_d > 0$ porte le nom de *coefficient de frottement dynamique* ; il reste constant pendant tout le mouvement et ne dépend que de l'état de surface des deux solides en contact.
- Lorsque le mouvement de (Σ) cesse, $\vec{v}_g = \vec{0}$ et la composante tangentielle vérifie nécessairement la condition $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$ où le coefficient f_s porte le nom de *coefficient de frottement statique* ; lui aussi ne dépend que de l'état de surface des solides.

III.B Le modèle de crissement

Lorsqu'on appuie une craie sur un tableau noir avant de la déplacer, on entend parfois distinctement le bruit du crissement lors du déplacement de la craie. Pour étudier cette situation, on modélise (figure 8) la craie et son appui par un solide rectangulaire (Σ) de masse M attaché à un ressort ; le tableau noir par un support fixe (F) confondu avec le plan horizontal (Oxy) ; le déplacement, par le mouvement à vitesse constante v_0 de l'extrémité A du ressort élastique de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

Le ressort reste constamment parallèle à l'axe (Ox), à $t = 0$ il est à sa longueur naturelle ℓ_0 .

L'autre extrémité du ressort, notée H , est liée au mobile (Σ) ; c'est sa vitesse que l'on souhaite étudier. À l'instant $t = 0$, on a $x_H(0) = -\ell_0$.

On note enfin $f_s > f_d$ les coefficients de frottement statique et dynamique de la craie sur le tableau et $g = \|\vec{g}\|$ l'accélération de la pesanteur.

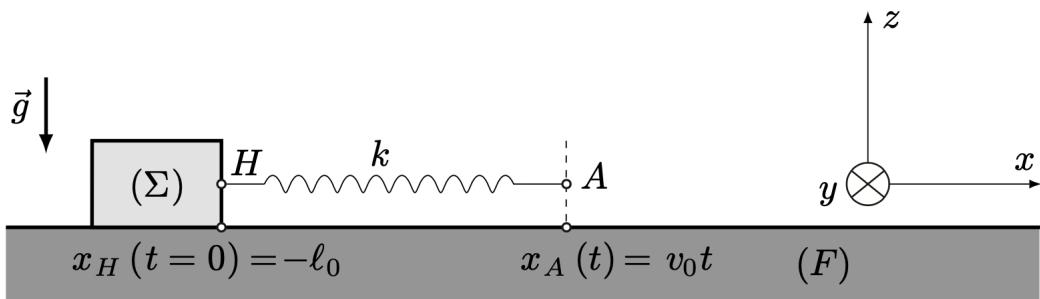


FIGURE 8 – Un modèle pour le crissement

- – 18. Exprimer la force de traction exercée par le ressort sur le mobile en fonction de k , v_0 , t et de $X_H(t) = x_H(t) + l_0$.
Exprimer aussi la composante normale \vec{R}_N de la force de contact exercée sur la craie.
- – 19. En déduire qu'à partir de $t = 0$ la craie reste immobile jusqu'à l'instant $t = t_0$ que l'on déterminera en fonction de f_s , M , g , k et v_0 .
- – 20. On pose $\tau = t - t_0$. Préciser les valeurs de x_A , de X_H et de sa dérivée $V_H = \frac{dX_H}{d\tau}$ à l'instant $\tau = 0$ avant d'expliciter l'équation différentielle vérifiée par $X_H(\tau)$ sous la forme :

$$\frac{d^2 X_H}{d\tau^2} + \omega^2 X_H = \omega^2 v_0 \tau + \gamma$$

où l'on exprimera les constantes ω et γ en fonction de k , M , g , f_s et f_d .

III.C Étude du mouvement de crissement

La suite du mouvement du mobile se poursuit en alternant les étapes d'immobilité et de glissement ; le mouvement ainsi observé est périodique de pulsation Ω et il est la cause du bruit de crissement, par exemple, de la craie sur un tableau.

On pourra se reporter au formulaire donné à la fin de cette partie.

- – 21. Déterminer les expressions de $X_H(\tau)$ et $V_H(\tau)$ en fonction de τ , v_0 , ω et $\alpha = \frac{\gamma}{\omega v_0}$.

On note τ_{\max} le premier instant où V_H atteint sa valeur maximale V_{\max} et $\theta_{\max} = \omega \tau_{\max}$.

- – 22. Sans nécessairement exprimer τ_{\max} , déterminer les expressions de $\cos(\theta_{\max})$ et $\sin(\theta_{\max})$ en fonction de α . En déduire que $V_{\max} = v_0 \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right)$.

Tracer l'allure de la courbe donnant $V_H(\tau)$ puis montrer alors que cette vitesse s'annule à nouveau à un instant $\tau_1 > 0$ correspondant à l'angle $\theta_1 = \omega \tau_1$ dont on exprimera le cosinus et le sinus en fonction de α . On admettra dans la suite que $0 < \alpha < 1$.

La première mise en mouvement du mobile (Σ) correspond à l'intervalle $0 \leq \tau \leq \tau_1$. À l'issue de cette phase, il s'immobilise alors pendant un laps de temps avant de redémarrer par la suite. On rappelle que longueur du ressort est donnée à chaque instant par $\ell = x_A - x_H$.

- – 23. Déterminer l'expression de $\ell(\tau)$ et en déduire la longueur du ressort $\ell(0)$ à l'instant $\tau = 0$. Montrer qu'à l'instant τ_1 elle est devenue $\ell(\tau_1) = \ell(0) - 2\alpha v_0 / \omega$.

En déduire la durée τ_2 qui devra alors s'écouler avant que le mobile se remette en mouvement. Compléter alors le tracé de la question précédente en faisant apparaître une période T complète du mouvement du mobile ; préciser sur ce schéma dans quelle phase du mouvement il y a *augmentation continue d'une contrainte* et dans quelle phase il y a *relâchement subit* de celle-ci.

Exprimer Ω en fonction de τ_1 et τ_2 puis en fonction de ω , α et θ_1 .

- – 24. Pour estimer les ordres de grandeur du phénomène, on prend $\theta_{\max} = 5\pi/6$ avec un frottement caractérisé par $f_s \simeq 1$ et $f_d \simeq 0,6$ pour une vitesse de traction du ressort $v_0 = 1 \text{ cm/s}$. On prendra $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$. En déduire les valeurs numériques de α , puis de Ω .

Quel lien existe-t-il entre cette pulsation et celle du son émis ?

Préciser et justifier le domaine fréquentiel du crissement.

Formulaire et données numériques

On donne $\ln(2) = 0,7$ et $\ln(3) = 1,1$.

Si $t = \tan \theta$ alors $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}$.

On rappelle par ailleurs que $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$.

On pourra prendre $\sqrt{3} \simeq 1,73$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$, $\pi \simeq 3,14$ et $2/\pi \simeq 0,64$;

FIN DE L'ÉPREUVE



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Physique et chimie automobiles

Ce sujet aborde les principes de base du fonctionnement de certains éléments liés à la circulation d'une automobile, comme la batterie d'accumulateurs électriques (partie **I**), le moteur thermique (cas d'un moteur à essence, partie **II**) ou enfin le principe de la mesure de vitesse par les autorités de contrôle (partie **III**).

Ces trois parties sont totalement indépendantes entre elles. Les données numériques et valeurs des constantes physiques nécessaires sont regroupées en fin d'énoncé.

Pour les applications numériques demandées on se contentera de 2 chiffres significatifs.

Dans la partie **III**, outre $i^2 = -1$ on repère les scalaires complexes par une barre : $\bar{T} \in \mathbb{C}$.

I Batterie d'accumulateurs au plomb

Une batterie au plomb est constituée d'un certain nombre d'éléments accumulateurs logés dans un bac en plastique fermé par un couvercle scellé (figure 1). Chacun de ces accumulateurs est composé d'une électrode positive et d'une électrode négative, baignant toutes deux dans la même solution aqueuse d'acide sulfurique H_2SO_4 (à la concentration c) et de sulfate de plomb **II** (Pb^{2+} , SO_4^{2-}) (à la concentration c'). Les électrodes sont formées d'une grille (chimiquement inerte mais conduisant l'électricité) dont les alvéoles sont remplies d'une pâte poreuse ; cette pâte est formée de peroxyde de plomb PbO_2 pour une des électrodes et de plomb métallique Pb pour l'autre. Les espèces en solution dans l'eau sont donc seulement H^+ (qu'on pourra choisir de noter H_3O^+), Pb^{2+} et les ions HSO_4^- issus de l'acide sulfurique et SO_4^{2-} ; Pb et PbO_2 sont des solides.



FIGURE 1 – Une batterie 12 V, 65 A·h fabriquée au Royaume-Uni par Yuasa[©]

- 1. Laquelle des deux électrodes est l'électrode positive ?

Justifier et préciser, pour chacune des deux électrodes, l'équation-bilan de la réaction à l'électrode en fonctionnement spontané (c'est-à-dire en régime de décharge de la batterie).

- 2. Établir l'expression de la force électro-motrice E d'un tel accumulateur (à 25°C) en fonction des données et des seules concentrations $[H^+]$ (ou bien $[H_3O^+]$) et $[Pb^{2+}]$.

Supposant pour une batterie la concentration de sulfate de plomb **II** $c' = [Pb^{2+}] = 1,0 \text{ mol/L}$, calculer le pH de la solution nécessaire pour obtenir $E = 1,9 \text{ V}$; commenter.

En toute rigueur l'étude de l'accumulateur devrait être complétée à cause de la formation d'un précipité solide de sulfate de plomb $PbSO_4$ selon le bilan $Pb^{2+} + SO_4^{2-} = PbSO_4$. La prise en compte de cette réaction se traduit par une modification de la force électromotrice E des accumulateurs au plomb par rapport au calcul précédent, qui devient de l'ordre de 2,0 V. À part cette modification numérique nous ne tiendrons pas compte du précipité de sulfate de plomb dans ce qui suit.

Les batteries d'accumulateurs automobiles ont une force électromotrice E_t de l'ordre de 12 V ; la batterie étudiée ici est caractérisée par sa capacité $Q_t = 65 \text{ A}\cdot\text{h}$ (on rappelle que la capacité électrique d'une pile est la valeur de la charge électrique qui la traverse avant que la réaction électrochimique de décharge s'arrête).

- 3. Combien d'accumulateurs faut-il associer pour réaliser une batterie automobile ?

Représenter cette association sur un schéma.

Quelle est la capacité Q de chacun des accumulateurs ?

En déduire les quantités de matière totales n_{Pb} et n_{PbO_2} contenues dans les grilles de l'*ensemble des électrodes contenues dans la batterie* au complet (on admettra que ces espèces Pb et PbO₂ sont les seuls réactifs limitants).

Obtenir une valeur imposée du pH impose de pouvoir contrôler la concentration molaire volumique c (ou, ce qui revient au même, la concentration massique c_m) de l'acide sulfurique dans l'accumulateur. On mesure en pratique cette concentration au moyen d'un *pèse-acide*, dispositif qui évalue la masse volumique ρ_{sol} de la solution ou bien sa densité relativement à l'eau pure $d = \rho_{\text{sol}}/\rho_0$. Celle-ci dépend en effet simplement de la concentration totale c en formes sulfatées, $d = a + b \cdot c$ avec $c = [\text{H}_2\text{SO}_4] + [\text{HSO}_4^-] + [\text{SO}_4^{2-}]$, a et b étant des constantes.

- 4. Déduire des données les valeurs numériques de a et b .

D'après un site technique automobile, la densité de l'électrolyte d'une batterie scellée en bon état doit être de l'ordre de 1,3. En déduire c et commenter.

Dans une solution aqueuse contenant de l'acide sulfurique à la concentration molaire volumique c , on note $x_1 = [\text{H}_2\text{SO}_4]/c$, $x_2 = [\text{HSO}_4^-]/c$ et $x_3 = [\text{SO}_4^{2-}]/c$ et les tracés de $x_1(\text{pH})$, $x_2(\text{pH})$ et $x_3(\text{pH})$ porte le nom de *courbes de prédominance*. Ces courbes sont tracées sur la figure 2.

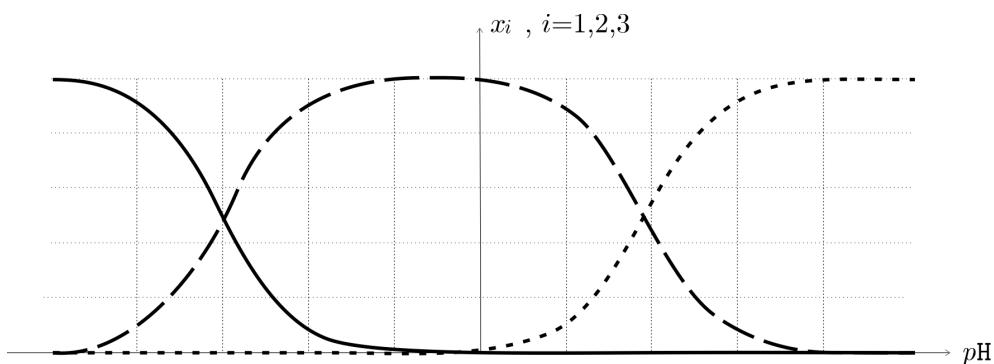


FIGURE 2 – Diagramme de prédominance pour l'acide sulfurique

- 5. Donner les expressions des constantes d'acidité K_{a_1} et K_{a_2} .

Reproduire rapidement sur votre copie ce diagramme, complété par l'identification des trois courbes et préciser en les justifiant les graduations des axes horizontal et vertical.

- 6. Déterminer les valeurs de c et c_m dans un accumulateur au plomb à usage automobile ; proposer un commentaire des valeurs numériques obtenues.

Les courbes de la figure 2 ont été tracées au moyen d'un script **Python** utilisant une fonction dont l'en-tête est `def Pred(pH):` qui, pour une valeur donnée du pH, donne pour résultat le triplet (x_1, x_2, x_3) .

- 7. Déduire des expressions de K_{a_1} et K_{a_2} celles des x_i et proposer le code **Python** de la fonction `Pred`.

II Un moteur à essence turbocompressé

Le moteur qui équipe les automobiles thermiques peut être décrit comme une machine ditherme à air (on néglige la quantité de carburant et les gaz brûlés devant l'air au niveau des pistons) fonctionnant de manière pseudo-cyclique (l'air rejeté par la ligne d'échappement n'est évidemment pas le même que celui qui est admis dans le filtre à air, mais il est en même quantité). On caractérise un tel moteur par les températures de la « source froide » T_f (en pratique c'est celle de l'air ambiant et on prendra $T_f = 27^\circ\text{C}$) et de la « source chaude » T_c (au moins égale à celle du point le plus chaud du cycle, après la combustion du carburant).

II.A Rendement du moteur

- – 8. Définir le rendement η d'un tel moteur thermique ditherme.

Énoncer et démontrer avec soin le théorème de CARNOT.

Certains véhicules sont mus par un moteur à essence à quatre temps ; le carburant utilisé est de l'Eurosuper 95 produisant, par combustion totale, une énergie $W_v = 3,6 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{L}^{-1}$ (joules produits par litre de carburant consommé). En circulant à la vitesse stabilisée $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur route horizontale, le moteur du véhicule étudié ici développe la puissance $\mathcal{P} = 18 \text{ kW}$ (pour vaincre essentiellement les frottements aérodynamiques) et consomme une quantité q égale à 5,4 litres de carburant pour parcourir 100 km.

- – 9. Déduire des données ci-dessus le rendement réel η_r du moteur.

Quelle inégalité concernant T_c peut-on déduire du théorème de CARNOT ?

Cette inégalité est-elle vérifiée en pratique, sachant que dans le moteur étudié la température est $T_c \simeq 2\,000 \text{ K}$?

II.B Thermodynamique des gaz

Une quantité donnée de gaz est caractérisé par ses fonctions d'état énergie interne U et enthalpie H et par leurs dérivées $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ et $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ qui sont les capacités thermiques du gaz. On définit le rapport adiabatique $\gamma = C_P/C_V$; dans ce qui suit ce rapport γ est supposé constant.

- – 10. De quel(s) paramètre(s) thermodynamique(s) dépendent les fonctions U et H dans le cadre du modèle du gaz parfait ?

En déduire les expressions de C_P et C_V en fonction de la quantité de matière n , du rapport adiabatique γ et d'une constante fondamentale.

On admettra l'expression de l'entropie *molaire* $s_m(T,V)$ d'un gaz parfait de température T et de volume V :

$$s_m(T,V) = s_m(T_0, V_0) + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \quad (1)$$

- – 11. En déduire la relation de LAPLACE qui relie les variations de pression P et de volume V d'un gaz parfait évoluant de manière isentropique depuis un état initial (P_0, V_0) .

II.C Le cycle moteur à quatre temps

Le moteur à quatre temps a été décrit pour la première fois en 1862 par l'ingénieur ALPHONSE BEAU. Ce cycle est décrit par l'air (pris à l'extérieur à la pression atmosphérique p_0), assimilé à un gaz parfait diatomique, qui évolue entre un volume minimal V_1 et un volume maximal

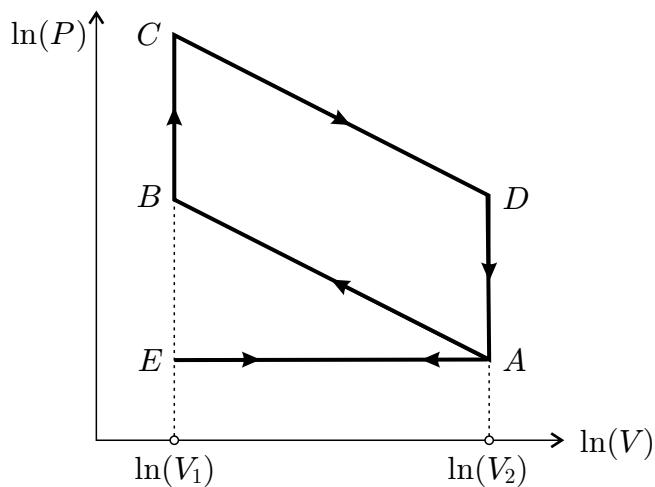


FIGURE 3 – Cycle moteur de Beau à quatre temps en échelle logarithmique

$V_2 = \alpha V_1$ avec le taux de compression $\alpha > 1$. Il est représenté sur la figure 3 en échelle doublement logarithmique dans le diagramme de CLAPEYRON.

Ce cycle comporte :

- Une phase d’admission EA de l’air extérieur dans les cylindres du moteur ;
- Une phase de compression adiabatique AB de l’air enfermé dans le piston (mélangé avec un peu d’essence) suivie de la combustion BC quasiment instantanée provoquée par une étincelle produite par le système électrique d’allumage ;
- Une phase motrice de détente adiabatique CD de l’air (et du combustible brûlé) jusqu’à l’ouverture en D des soupapes d’échappement avec chute brutale DA de la pression ;
- Une phase d’échappement AE évacuant les gaz brûlés avant la reprise du cycle.

Dans toute la suite de l’étude les phases d’échappement AE et d’admission EA ne jouent aucun rôle et on pourra donc les ignorer.

- – 12. On considère d’abord que toutes les évolutions au sein du cycle $ABCDAEA$ sont réversibles. Montrer que les transformations AB et CD sont décrites par deux droites parallèles et déterminer leur pente commune $p_{rv} < 0$.
- – 13. Reproduire sur votre copie le diagramme de la figure 3 en y ajoutant les isothermes de températures T_f (température minimale du cycle) et T_c (température maximale du cycle).
- – 14. Exprimer les transferts thermiques sur les phases AB , BC , CD et DA en fonction des températures T_A , T_B , T_C et T_D aux divers points du cycle.
En déduire l’expression η_{rv} du rendement du cycle moteur de la figure 3 en fonction des températures puis en déduire que $\eta_{rv} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.
- – 15. Pour le moteur étudié ici $\alpha = 9$ et on prendra pour l’air $\gamma = 1,4$. Calculer η_{rv} et commenter.

En réalité l’hypothèse de réversibilité des transformations adiabatiques AB et CD n’est pas réaliste ; pour s’approcher du rendement réel on la remplace par un modèle amélioré, toujours adiabatique mais non réversible, dans lequel le cycle devient $AB'C'D'A$, mais on suppose toujours que AB' et $C'D'$ sont des droites de pentes (négatives) respectives p'_{comp} et p'_{det} pour la compression AB' et la détente $D'A$.

- – 16. En application du second principe montrer que $p'_{comp} < p_{rv} < p'_{det}$.

III Principe d'un cinémomètre radar

La plupart des dispositifs de mesure des vitesses v des véhicules sont basés sur l'effet DOPPLER : une onde électromagnétique est émise en direction du véhicule à contrôler. Le décalage de fréquence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie est proportionnel à v/c (où c est la célérité de la lumière dans le vide) et, même si cet écart est faible, un dispositif électronique approprié permet de le mesurer.

III.A Transmission et réflexion d'une onde

Dans l'air, qui sera assimilé au vide, un émetteur E fixe dans le référentiel lié au sol émet une onde électromagnétique qui se propage en direction du véhicule dont on souhaite mesurer la vitesse v (figure 4). À la surface S d'abscisse z_S du véhicule (on supposera une surface plane et un véhicule métallique) le phénomène de réflexion engendre une onde transmise dans le métal et une onde réfléchie, qui sera ultérieurement mesurée par le récepteur R .

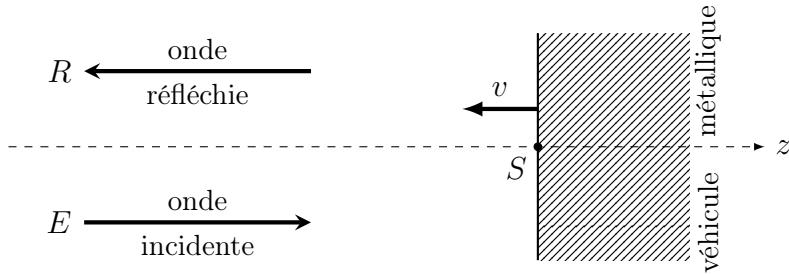


FIGURE 4 – Onde électromagnétique dirigée vers un véhicule en mouvement

Les représentations complexes de l'onde incidente (dans le vide $z < z_S$) et l'onde transmise (dans le métal $z > z_S$) seront respectivement cherchées sous les formes :

$$\vec{E}_{\text{inc}} = E_0 \exp [i(\omega t - kz)] \vec{e}_x \quad \vec{E}_{\text{tr}} = \bar{T} E_0 \exp [i(\omega t - \bar{k}z)] \vec{e}_x \quad (2)$$

où l'émetteur fixe les valeurs (supposées réelles positives) de E_0 et ω .

- – 17. Dans le vide, établir l'équation de propagation puis la relation de dispersion pour le champ \vec{E}_{inc} .

En déduire la relation liant la longueur d'onde dans le vide λ_0 et la fréquence f de l'onde.

Le métal étudié est de l'acier caractérisé par une densité volumique de charge nulle $\rho = 0$, le lien entre le champ électrique et la densité volumique de courant est donné par la relation $\gamma_0 \vec{E} = \vec{j} + \tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ où $\gamma_0 \simeq 1,4 \cdot 10^7$ SI et $\tau = 1,0 \cdot 10^{-14}$ s.

- – 18. Préciser la dimension de la grandeur γ_0 (on utilisera les notations L, M, T et I pour les dimensions des longueur, masse, durée et intensité de courant) et la signification physique de τ .

Établir la relation de dispersion donnant \bar{k}^2 en fonction de ω , c , μ_0 , γ_0 , τ et ω .

- – 19. On s'intéresse à la seule solution \bar{k} de partie réelle positive ; elle s'écrit $\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{i}{\delta}$ où $\lambda > 0$ et $\delta > 0$. Quelles sont les interprétations de ces deux grandeurs ?

- – 20. A quelles conditions (que l'on traduira par des inégalités faisant intervenir ω , c , μ_0 , γ_0 , τ et ω) correspondent les 3 régimes de fréquences que l'on peut lire sur la figure 5 ?

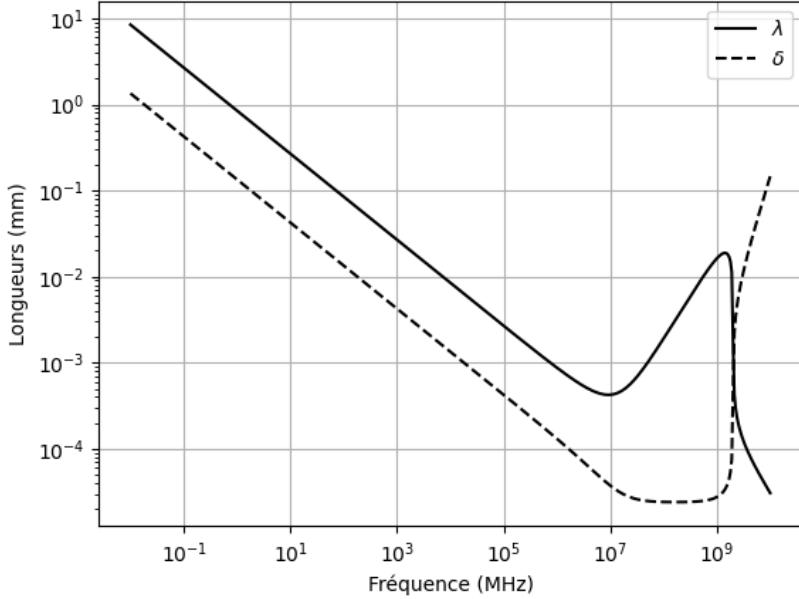


FIGURE 5 – Longueurs caractéristiques pour une onde dans un métal en échelle log-log

- – 21. Ici et dans toute la suite on se limitera au domaine radar ($f \sim 25$ GHz). Justifier par le calcul la forme limite des deux courbes ; préciser leur décalage. On notera ici $d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$. Peut-on dire que le matériau étudié est un métal parfait ? Est-il opaque ou transparent aux ondes radar ? Justifier, quantitativement, la réponse à ces deux questions.

III.B Réflexion métallique

On adopte maintenant une description simplifiée de la réflexion des ondes électromagnétiques sur la surface du véhicule : on admet l'absence totale d'onde transmise (ce qui, dans l'équation (2), correspond à $\bar{\tau} = 0$). On rappelle que dans cette situation la surface $z = z_S$ du métal porte éventuellement des charges $\sigma(t)$ et des courants $\vec{i}_s(t)$ surfaciques, donnés par les relations de passage entre des milieux I et II :

$$\vec{E}_{\text{II}} - \vec{E}_{\text{I}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad \vec{B}_{\text{II}} - \vec{B}_{\text{I}} = \mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{n}_{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad (3)$$

On se place d'abord dans le cas où le véhicule est immobile en $z_S = 0$ m. En plus de l'onde incidente décrite par l'équation (2), une onde réfléchie de même polarisation et de même fréquence se propage dans le vide en sens inverse.

- – 22. Montrer l'absence de charge surfacique sur le métal et expliciter complètement le champ électrique de l'onde réfléchie.

On considère maintenant que le véhicule est en $z_S = 0$ m à $t = 0$ s et se dirige à vitesse v vers l'émetteur de l'onde étudiée. Le plan de réflexion est donc $z_S = -vt$ et on cherche une onde réfléchie de la forme $\vec{E}_{\text{ref}} = E'_0 \exp[i(\omega't + k'z)] \vec{e}_x$.

- – 23. Quelles relations lient ω et k d'une part, ω' et k' d'autre part ?

Exprimer E'_0 en fonction de E_0 puis ω' en fonction de ω , v et c .

- – 24. Montrer l'existence de courants surfaciques sur la face $z_S = -vt$ du véhicule et préciser à quelle pulsation ω_i ils oscillent.

III.C Effet Doppler et mesure de vitesse

Compte tenu de la condition évidente $|v| \ll c$ les pulsations ω de l'onde incidente et ω' de l'onde réfléchie sont assez proches ; toutefois leur écart relatif $\Delta = \frac{|\omega' - \omega|}{\omega}$ peut être mesuré par un dispositif électronique adapté, disposé au niveau de l'émetteur fixe en $z = -\ell$, qui permet finalement de mesurer la vitesse du véhicule.

Un dispositif possible de mesure de Δ est ainsi constitué : un circuit multiplieur réalise en temps réel le produit d'un signal s proportionnel au champ électrique émis au point $z = -\ell$ et d'un signal s' proportionnel au champ électrique réfléchi reçu au même point. La sortie du multiplieur est reliée à un filtre de fréquence de coupure f_c ; enfin, un analyseur de spectre mesure la fréquence fondamentale f_1 du signal ainsi filtré (figure 6).

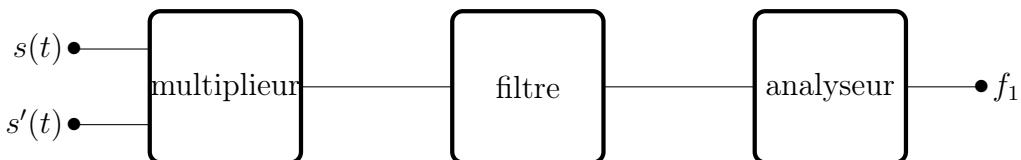


FIGURE 6 – Circuit de mesure de vitesse

- – 25. Exprimer Δ au premier ordre en v/c et proposer une application numérique raisonnable ; commenter.

Montrer que la fréquence f_1 est pratiquement proportionnelle à la vitesse v à mesurer, sous réserve d'un choix pertinent de la nature du filtre et de f_c , que l'on proposera.

Données numériques

Formule d'analyse vectorielle $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \Delta \vec{V}$.

Relation trigonométrique $\cos \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \theta') + \cos(\theta - \theta')]$.

$10^{1/3} = 2,2$; $10^{2/3} = 4,6$; $9^{1/5} = 1,6$; $9^{2/5} = 2,4$; $\log_{10}(2\pi) = 0,80$.

Facteurs de conversion, $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$; $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$; $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L}$. Concentration de référence $C^\circ = 1 \text{ mol/L}$. Masse volumique de l'eau liquide pure $\rho_0 = 1,0 \text{ kg/L}$.

Constantes physiques :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'AVOGADRO	$N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de FARADAY	$F = eN_A = 9,6 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de NERNST à 25°C	$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,059 \simeq 0,06 \text{ V}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Quelques potentiels rédox standard à 25°C :

Couple oxydant/réducteur	$\text{Pb}^{2+} / \text{Pb}$	$\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$	$\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$	$\text{PbO}_2 / \text{Pb}^{2+}$
Potentiel standard E° (V)	-0,13	0	1,23	1,69

L'acide sulfurique H_2SO_4 (masse molaire $\mathcal{M} = 98 \text{ g/mol}$; masse volumique de l'acide sulfurique liquide pur $\rho = 1,8 \text{ kg/L}$) est un diacide :

Couple acide/base	$\text{H}_2\text{SO}_4 / \text{HSO}_4^-$	$\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}$
Constante d'acidité K_A°	$pK_{\text{a}_1} = -3,0$	$pK_{\text{a}_2} = 1,9$



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Fonctions spéciales

Ce sujet comporte trois parties indépendantes.

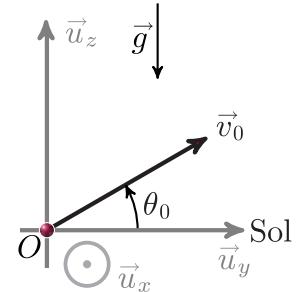
Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales » .

I La fonction de W de LAMBERT

I.A Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



- – 1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- – 2. Établir les équations horaires du mouvement.
Montrer que le mouvement est plan.
- – 3. Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- – 4. Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

I.B Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

- – 5. Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- – 6. Établir, en fonction $g, \tau, v_0 = \|\vec{v}_0\|, \theta_0$ et t , les nouvelles équations horaires du mouvement.
- – 7. Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.
- – 8. Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite v_∞ .
Où retombe le projectile ?
- – 9. Déduire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- – 10. Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ .

FIGURE 1 – Tir d'un projectile

I.C La portée maximale d'un tir avec frottement

- – 11. Dresser le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$ et déterminer la valeur β de son minimum global.

La fonction W de LAMBERT est définie comme étant la fonction réciproque de T sur $[\beta, +\infty[$. Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

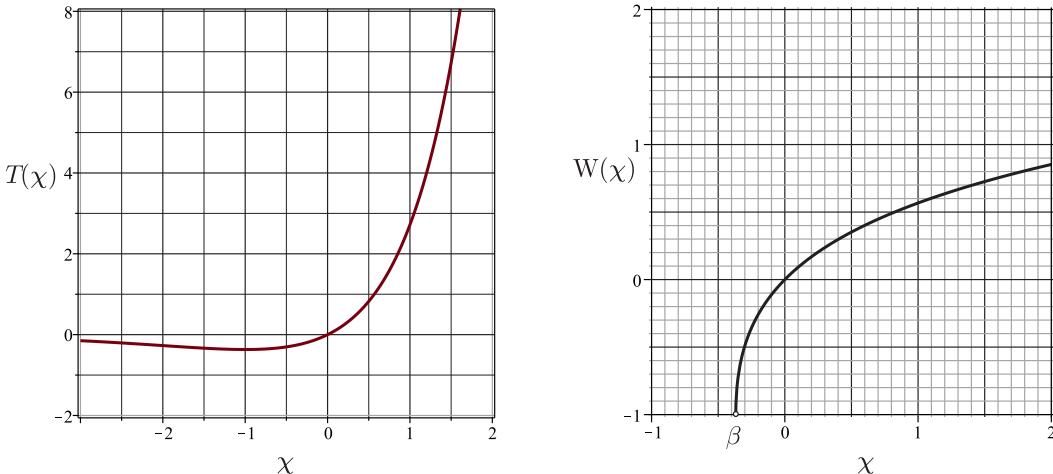


FIGURE 2 – Représentations graphiques de $T(\chi)$ (à gauche) et $W(\chi)$ (à droite)

- – 12. On peut montrer que : $(\chi + \exp[W(\chi)]) W'(\chi) = 1$. Quelle est la valeur de $W(0)$?

On souhaite appliquer le schéma d'EULER explicite avec un pas $h = 0.0001$ pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de $W(\chi)$ sur l'intervalle $[0 ; 2,5[$.

La fonction $W(\chi)$ est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler avec : `from scipy.special import lambertw`.

On montre que si $ad \neq 0$, la solution de l'équation $at + b + ce^{dt} = 0$ pour l'inconnue t est donnée par l'expression

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right).$$

- – 13. En déduire à quel instant $t^* > 0$ le projectile touche le sol. On posera $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$.

- – 14. On rappelle que par définition $W \exp(W) = \text{Id}$ où Id est la fonction identité : $\chi \mapsto \chi$.

En déduire que la portée est donnée par $\ell = \tau v_0 \cos \theta_0 (1 - W(ue^u)/u)$.

En posant $\gamma = v_0/v_\infty$, on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}\right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{e - 1}\right) \simeq 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

- – 15. À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\tau = 0,4 \text{ s}$.

II L'intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y).

On repère sa position par l'angle $\theta(t)$. À $t = 0$ on lâche le pendule sans vitesse initiale avec $\theta(t = 0) = \theta_0 \in]0, \pi/2[$.

□ – 16. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $\theta(t)$.

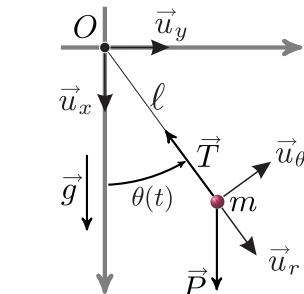


FIGURE 3 – Pendule simple

□ – 17. On fait l'approximation des petits angles tels que $\sin \theta \sim \theta$.
Établir dans ces conditions la période T_0 des oscillations.

□ – 18. Déterminer l'expression générale de $\frac{d\theta}{dt}$ sans faire l'approximation des petits angles.
En déduire que la période T des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}.$$

En effectuant le changement de variable $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$, on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K}\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}.$$

On souhaite calculer l'intégrale $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians pour un angle $\theta_0 = \pi/3$.

□ – 19. Après avoir tracé le graphe de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$ pour $\chi \in [0; 9]$, illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel $I = \int_0^9 (\sqrt{\chi} + 1) d\chi$ en utilisant 9 rectangles.

Si on double le nombre de rectangles utilisés qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de I et la valeur approchée numériquement par la méthode des rectangles médians ?

□ – 20. Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```

1 import math as m
2 def f(x,phi):
3     return .....
4
5 S = 0.
6 N = 100
7 a = 0.
8 b = m.pi/2.
9 pas = .....
10 theta_0 = m.pi/3.
11 x = m.sin(theta_0)**2
12 for i in range(N):
13     phi = .....
14     S = .....
15
16 print(pas * S)

```

python code

La fonction $\chi \mapsto \mathcal{K}(\chi)$ est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. La commande `from scipy.special import ellipk` permet de l'appeler directement dans `scipy`.

- – 21. En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que $T_0 = 1\text{ s}$, évaluer T lorsque $\theta_0 = 50^\circ$. Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

Au XVII^e siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de FRANCE et d'ANGLETERRE avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

Christiaan HUYGENS (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

- – 22. Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?

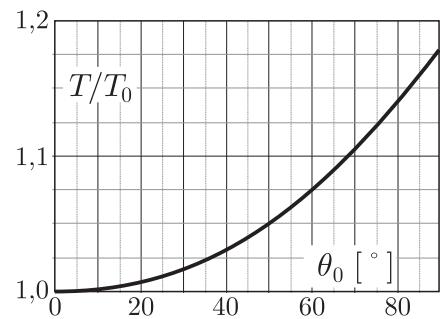


FIGURE 4 – $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$

III La fonction d'erreur de GAUSS : $\text{erf}(\chi)$

III.A Introduction au problème de STEFAN

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIX^e siècle Lord KELVIN a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

- – 23. Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord KELVIN ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0^-$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

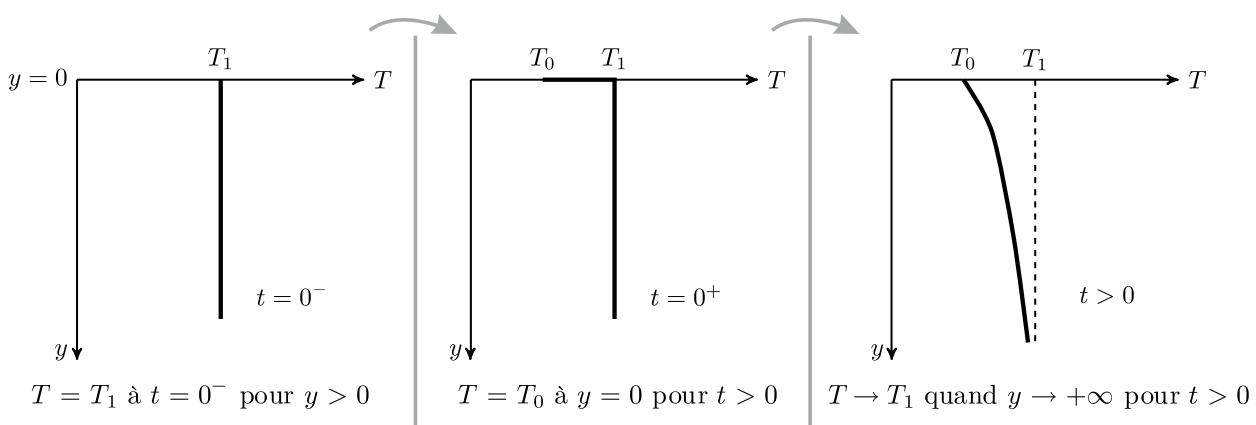


FIGURE 5 – Évolution de la température

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta\phi_Q$.

- – 24. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.
En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface \mathcal{S} .

- – 25. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?
Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique »?
Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, \mathcal{S} , dy et dt
puis en fonction de ρ , c , \mathcal{S} , $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .
En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.
En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_1}{T_0 - T_1}.$$

- – 26. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y,t)$?
Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow +\infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

- – 27. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0.$$

- – 28. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y,t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de GAUSS, elle est implémentée dans `scipy`.

Elle est souvent notée `erf`(χ). On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

III.B Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

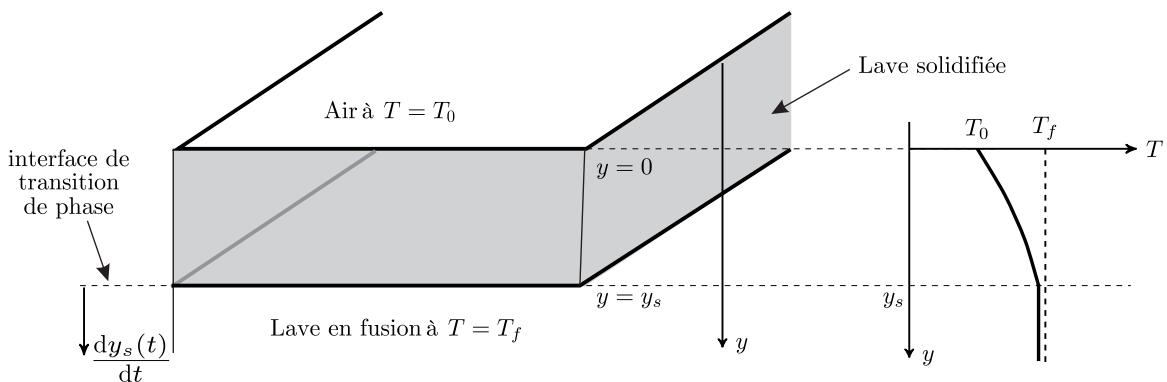


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposerons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = cte = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

□ – 29. En reprenant l'équation de la question 27, montrer que

$$\theta(\eta) = \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)} .$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$

- – 30. Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$.
- – 31. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

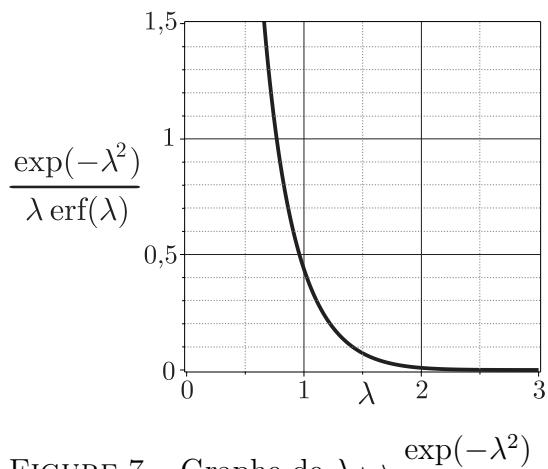


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

□ – 32. En déduire que

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f).$$

□ – 33. Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ?

Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

□ – 34. À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .

En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.

Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

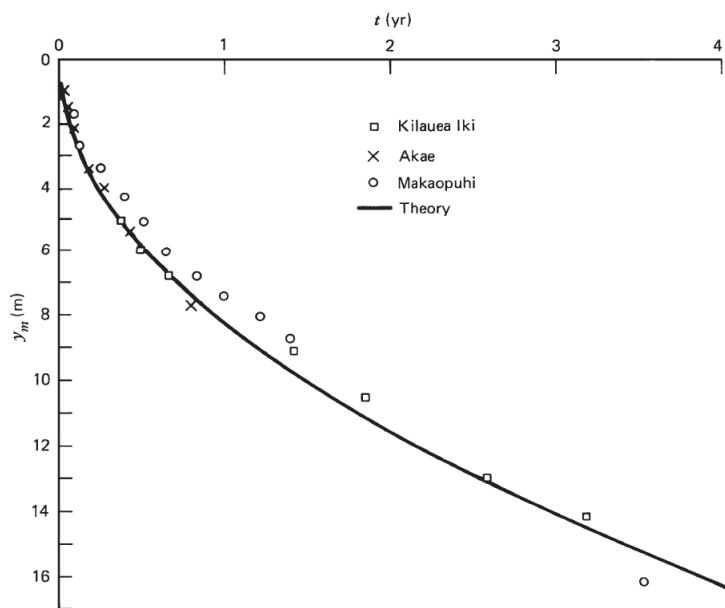


FIGURE 8 – Épaisseurs des croûtes de lave solides à la surface des lacs de lave dans les trois cratères à fosse Kilauea Iki (1959), Alae (1963) et Makaopuhi (1965) sur le volcan Kilauea, Hawaii (Wright et al., 1976), et résultat théorique.

FIN DE L'ÉPREUVE

1. Wright, T. L., Peck, D. L., and Shaw, H. R. (1976). Kilauea lava lakes : Natural laboratories for study of cooling, crystallization, and differentiation of basaltic magma. In The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin, eds. G. H. Sutton, M. H. Manghnani, R. Moberly, and E. U. McAfee, vol. 19 of Geophysical Monograph Series, Washington, D.C. : American Geophysical Union, pp. 375–90