A 2014 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Représentation matricielle Ae^A

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\cdot$ On admet que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ, la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1) Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $w = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = w$ équivaut au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) = \alpha - \theta \quad \text{(modulo } 2\pi). \end{cases}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha - \theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

2) Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on en déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ?

Soit $D = \{Re^{i\theta}\ ;\ R > 0\ et\ 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et g l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

3) Déduire de ce qui précéde que g est surjective.

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $\{X, NX, \dots, N^{n-1}X\}$ est libre.

5) En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

6) Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\widetilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \widetilde{N}e^{\widetilde{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8) Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^{\mu}$ et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$

où p est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ.

9) Montrer que $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

11) Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

12) Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes les lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la $i$ème ligne de X pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)

13) Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

14) En déduire que lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, p_2, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

D. Représentation Ae^A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\big((f - \lambda_i \, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}\big)$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$.

15) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i. En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

où $N_1, N_2, \dots, N_s$ sont des matrices nilpotentes.

16) Montrer que l'application $A \mapsto Ae^A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même est surjective.

FIN DU PROBLÈME

A 2015 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Un endomorphisme V de l'espace E est dit *symétrique défini positif* si pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g \rangle = \langle f, V(g) \rangle$ et si de plus, $\langle V(f), f \rangle > 0$ pour tout $f \in E$ non nul.

Les parties **A** *et* **B** *sont mutuellement indépendantes.*

A. Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E défini par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$V^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g \rangle = \langle f, V^*(g) \rangle$.

2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

B. Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x. On note également $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E\big(f(Z_n)\big)$.

5) Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |\frac{k}{n} - x| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer que :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big(f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) \Big)$$

et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de Heine.

On a donc établi le *théorème d'approximation de Weierstrass* sur le segment $[0,1]$: toute fonction continue sur $[0,1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de Weierstrass sur un segment quelconque $[a,b]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans G par :

$$\langle f, g \rangle_G = \int_0^{\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

On note $\|f\|_G = \sqrt{\langle f, f \rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $c_n \in G$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ le sous-espace vectoriel de G engendré par $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$. On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

8) Montrer que si p est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0,\pi]$ appartient à F_n.

9) Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit orthonormée. Déduire du théorème d'approximation de Weierstrass que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

10) Soit $f \in G$. Démontrer que $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si, de plus, la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g, montrer que $g = f$.

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on définit la fonction g_x sur $[0,\pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ de F_n. En déduire que pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2} \cos\big((2n+1)t\big).$$

12) Montrer que pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\Big) f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a :

$$V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos\big((2n+1)x\big).$$

D. Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$S \quad \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

On définit $\varphi_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule $\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\big((2n+1)t\big)$.

13) Montrer que pour tous $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $\langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle$.

14) Montrer que g est solution de l'équation différentielle S si et seulement si $g = \lambda \cdot V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$ et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\Big) \langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle$$

et

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

15) On suppose dans cette question que λ n'est *pas* égal au carré d'un entier impair. Montrer que la série :

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de S.

On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$.

16) Montrer que si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$ alors S a une infinité de solutions, puis exhiber l'une d'entre elles. Que peut-on dire si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$?

FIN DU PROBLÈME

A 2016 - MATH. I MP.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \implies A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

La partie A *n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.*

A Un exemple

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* $\geqslant 3$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;

- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k - 1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k + 1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.

5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +\infty$.

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

8. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

9. Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$

d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_k, j_k} \in]0, 1[$ et $A_{i_k, j_{k+1}} \in]0, 1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

10. En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k, j_k} = 1 & k \in \{1, 2, \dots, r\} \\ B_{i_k, j_{k+1}} = -1 & k \in \{1, 2, \dots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On dit qu'une matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet *un chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $M_{\sigma(1),1} M_{\sigma(2),2} \cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.

On démontre par récurrence sur n, et on *admet* le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p + q = n + 1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11. Montrer que A admet un chemin strictement positif.

On note σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} > 0$ et on pose $\lambda_0 = \min\limits_j (A_{\sigma(j),j})$ et $A_0 = \dfrac{1}{1 - \lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \dots, M_s$:

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

14. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf\limits_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles****.*

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A,D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_AP - PD_B\|^2$.

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est bistochastique et que

$$\|A - B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j}|\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

où $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)$ celles de B.

18. En déduire que

$$\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leqslant \|A - B\|^2$$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace probabilisé et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2. Pour tout X de V, on note $X \sim P_X$ si X suit la loi P_X. Pour tout couple (P_1, P_2) de lois, on pose

$$d^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X,Y \in V \\ X \sim P_1, Y \sim P_2}} \mathrm{E}(|X - Y|^2).$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels. On note P_1 la loi uniforme sur $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et P_2 la loi uniforme sur $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

19. Montrer que

$$d^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{(i)} - b_{(i)}|^2$$

où l'on a noté $a_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{(n)}$ et $b_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{(n)}$ les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ ré-ordonnées par ordre croissant. En déduire que pour toutes matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$, on a l'inégalité :

$$n\, d^2(P_1, P_2) \leqslant \|A - B\|^2.$$

Fin du problème

A2017 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude d'un endormorphisme d'un espace de fonctions numériques

---

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;

- $\mathcal{D}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments développables en série entière sur un voisinage de 0 ;

- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$$

et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules :

$$(\forall x \in I) \qquad \begin{cases} u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \,\mathrm{d}t \\ \\ v(f)(x) = f(0) + x \displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations.

A Préliminaires

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$, et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et par v.

4. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B Étude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.

7. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même ?

8. Vérifier que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Les normes M et N sont-elles équivalentes ?

9. Si $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C Étude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.

11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?

12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

Applications.

13. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan t$ et en déduire $u(\operatorname{argsh}'')$.

14. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (respectivement impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

D Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

16. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

17. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{t\in I} |f^{(n)}(t)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,

$$|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{2m_n W_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathcal{P}$.

18. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.

19. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? de v ? L'ensemble des valeurs propres de u (respectivement de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

Fin du problème

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le sujet, on considère des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}\cdot$ Si en outre $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **B**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

2. On fixe une base $\mathbf{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit $\mathbf{B}$ une base de E. Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- \mid -))$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a \mid z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$ (cet entier est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme B. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **A**.

11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k\, x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent

$\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, on a $\dim \mathcal{V}' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose,

$$H := \mathrm{Vect}(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : \ v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H, \ \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} : \ \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14. Montrer que
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \big\{a \otimes x \mid a \in L\big\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.

16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Démontrer que
$$\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20. Démontrer que

$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

et

$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

21. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^{\bullet}$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 21.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.*

23. On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. Conclure.

Fin du problème

A 2014 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2014

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On considère un espace réel E de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme notée $\| \;\|$ et complet pour cette norme. Si A est une partie de E, on note $\overline{A}$ son adhérence, $\mathring{A}$ son intérieur, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ sa frontière, et $d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|$ sa distance à un point $x \in E$. On note respectivement $B(x, r) = \{\, y \in E\,;\ \|y - x\| < r\}$ et $\overline{B}(x, r) = \{\, y \in E\,;\ \|y - x\| \leqslant r\}$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r.

Étant données deux parties A et B de E, et une application $f : A \to B$, on rappelle que $x \in E$ est un *point fixe* de f si c'est une solution de l'équation $x = f(x)$. L'application f est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$, c'est-à-dire si pour tous $x, y \in A$, il existe un réel $k < 1$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

On rappelle qu'une application lipschitzienne est continue.

Dorénavant et dans tout le problème, A désigne une partie fermée non vide de E.

A. Théorème du point fixe

Dans cette partie préliminaire, on établit le

Théorème (Picard)**.** *Toute application contractante $f : A \to A$ admet un unique point fixe $x \in A$.*

Soit donc $f : A \to A$ une application contractante.

1) Montrer que si f admet un point fixe x, celui-ci est unique.

Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) Conclure.

B. Invariance par homotopie

Soit $f : A \to E$ et $g : A \to E$ deux applications contractantes. On suppose que f et g sont *homotopes*, c'est-à-dire qu'il existe une application $h : A \times [0, 1] \to E$ telle que pour tout $x \in A$, on a $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$, et qui vérifie en outre les trois propriétés suivantes :

$\boxed{a}$ il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in A$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|h(x,t) - h(y,t)\| \leqslant k\|x - y\|\ ;$$

$\boxed{b}$ il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tous $t, u \in [0,1]$,

$$\|h(x,t) - h(x,u)\| \leqslant k'|t - u|\ ;$$

$\boxed{c}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \partial A$, on a $x \neq h(x,t)$.

On suppose en outre que f admet un point fixe dans A et on pose

$$T = \left\{t \in [0,1]\ ;\ \exists x \in A,\ x = h(x,t)\right\}.$$

4) Vérifier que T n'est pas vide.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T qui converge vers un réel $t \in [0,1]$. On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que pour tout entier naturel n, on a la relation $x_n = h(x_n, t_n)$.

5) Vérifier qu'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tous entiers naturels n et m, on a

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{k'}{1-k}\,|t_n - t_m|.$$

6) Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en déduire que T est fermée.

Soit encore $t \in T$ et $x \in A$ tels que $x = h(x,t)$.

7) Vérifier que $d(x, \partial A) > 0$.

Soit r et ε deux nombres réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leqslant \dfrac{(1-k)r}{k'}$ et $r < d(x, \partial A)$, et soit $u \in [0,1]$ tel que $|t - u| < \varepsilon$.

8) Montrer que pour tout $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$, on a $\|x - h(y,u))\| \leqslant r$.

9) En déduire, en utilisant le théorème de Picard ci-dessus, que l'application $y \mapsto h(y,u)$ possède un point fixe intérieur à A.

10) En déduire que T est un ouvert relatif à $[0,1]$. Conclure alors que g possède un unique point fixe intérieur à A (on pourra considérer une borne supérieure de T).

Une application. On ne suppose plus que l'application contractante $f : A \to E$ admet un point fixe, mais on fait les trois hypothèses suivantes :

$\boxed{d}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A ;

$\boxed{e}$ l'image $f(A)$ de A par f est bornée ;

$\boxed{f}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq tf(x)$.

11) Montrer que f possède un unique point fixe intérieur à A.

C. Étude de certains opérateurs à noyau

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et un réel $K_0 > 0$ vérifiant pour tous (t,u) et (t,v) dans $[a,b] \times D$,

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant K_0 |u - v|.$$

L'espace de Banach $C([a,b])$ des fonctions continues $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$.

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application F de $C([a,b])$ dans lui-même par la formule :

$$F(\varphi)(t) = \int_a^b K(t,x) f(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x$$

et on pose $\alpha = \sup\limits_{t\in[a,b]} \displaystyle\int_a^b |K(t,x)|\,\mathrm{d}x$.

12) Pour toutes fonctions $y, z \in C([a,b])$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, on a $y(t) \in D$ et $z(t) \in D$, démontrer l'inégalité

$$\|F(y) - F(z)\| \leqslant \alpha K_0 \|y - z\|.$$

Soit A une partie fermée et bornée de $C([a,b])$ contenant la fonction nulle dans son intérieur et telle que pour tous $\varphi \in A$ et $t \in [a,b]$, on a $\varphi(t) \in D$. On suppose en outre que $\alpha K_0 < 1$ et que pour tous $\varphi \in \partial A$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$.

13) Montrer que F admet un unique point fixe intérieur à A.

D. Une généralisation

Soit C une partie convexe fermée de E contenant A. On considère une application continue $f : A \to C$, *pas nécessairement contractante*, telle que

$\boxed{g}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A ;

$\boxed{h}$ l'ensemble $\overline{f(A)}$ est compact ;

$\boxed{i}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq t f(x)$.

On pose

$$X = \left\{x \in A\ ;\ \exists t \in [0,1]\ ;\ x = t f(x)\right\}.$$

14) Montrer que X est non vide et fermé. En déduire que la fonction $\mu : A \to [0,1]$ définie par la formule

$$\mu(x) = \frac{d(x, \partial A)}{d(x, \partial A) + d(x, X)}$$

est bien définie et continue. Déterminer $\mu(x)$ lorsque $x \in X$ et lorsque $x \in \partial A$.

On définit une fonction $g : C \to C$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \mu(x) f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C \setminus A. \end{cases}$$

15) Montrer que g est continue sur C et que $\overline{g(C)}$ est compact.

On admet le

Théorème (Schauder)**.** *Si C est une partie convexe fermée de E, toute application $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact possède au moins un point fixe.*

16) Conclure, à l'aide du théorème de Schauder, que f admet un point fixe intérieur à A.

E. Application aux intégrales de Fredholm

On considère dans cette partie l'espace de Banach $E = C([0,1])$ des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues muni de la norme $\|\varphi\|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$. On note également L^2 l'espace des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues muni de la norme $\|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

Soit $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose, pour tout $\varphi \in E$ et $t \in [0,1]$:

$$F(\varphi)(t) = h(t) + \int_0^1 K(t,x) g(x, \varphi(x)) \,\mathrm{d}x.$$

On fait les hypothèses suivantes :

$\boxed{j}$ pour tout réel $r \geqslant 0$, il existe $\mu_r \in L^2$ tel que $|y| \leqslant r$ implique $|g(x,y)| \leqslant \mu_r(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

$\boxed{k}$ la fonction K_t définie pour tout $t \in [0,1]$ par la formule $K_t(x) = K(t,x)$ est dans L^2, et l'application $t \mapsto K_t$ est continue de $[0,1]$ dans L^2.

On suppose en outre qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et toute solution φ de l'équation $\varphi(t) = \lambda F(\varphi)(t)$, on a $\|\varphi\|_0 \neq M$.

17) Déterminer pour chaque $\varphi \in E$, une constante c_φ telle que pour tous $t, u \in [0,1]$,

$$\begin{cases} |F(\varphi)(t)| \leqslant \|h\|_0 + c_\varphi \cdot \sup_{s\in[0,1]} \|K_s\|_2 \\ |F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leqslant |h(t) - h(u)| + c_\varphi \cdot \|K_t - K_u\|_2. \end{cases}$$

18) En déduire que F est une application de E dans E.

On note $A = \overline{B}(0, M)$ et on considère une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.

19) Montrer que si $\varphi_n \to \varphi$ dans E quand $n \to +\infty$, on a la convergence simple $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ sur $[0,1]$.

20) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $t, u \in [0,1]$, $|t - u| < \delta$ implique $|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \varepsilon$.

On rappelle que pour tout $\delta > 0$, il existe une famille finie $t_1, t_2, \ldots, t_N \in [0,1]$ telle que le segment $[0,1]$ soit inclus dans la réunion des intervalles $]\,t_i - \delta, t_i + \delta\,[$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

21) Montrer que si la suite $(F(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, alors elle converge dans E. En déduire que F est continue sur A.

22) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. Montrer que la suite $(F(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $[0,1]$ (on pourra commencer par établir la convergence simple sur une partie dense de $[0,1]$).

23) Conclure : F admet un point fixe de norme strictement inférieure à M.

FIN DU PROBLÈME

A 2015 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiens ».

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties **A**, **B** *et* **C** *sont mutuellement indépendantes.*

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{\|Mx\|\ ;\ x \in S^{n-1}\}.$$

2) Montrer que l'application qui à $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer en outre que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité $\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{\mathrm{op}}\, \|x - y\|$.

3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{\mathrm{op}}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{\mathrm{op}} \geqslant \max\{|M_{i,j}|\ ;\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

6) Etablir que :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leqslant 1$ pour tous i, j dans $\{1, \dots, n\}$.

7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{\mathrm{op}} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathsf{E}\big(\exp(tX)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a l'*inégalité d'Orlicz* :

$$\boxed{\mathsf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5}.$$

C. Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x - a\| \leqslant r\right\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

15) Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

16) Soit Λ un sous-ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précédente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que :

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$$

On admet l'existence d'une fonction μ, appelée *volume*, définie sur l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $r > 0$, $\mu\big(B_{a,r}\big) = r^n$.

(ii) Pour toute famille finie $K_1, \ldots, K_m$ de compacts de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints, on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu(K_i).$$

(iii) Pour tous compacts K, K' de $\mathbb{R}^n$, $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leqslant \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$.

17) Vérifier que les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1}, de cardinal majoré par 5^n, et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$$

D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$, indexées par $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $\big(M_{i,j}^{(n)}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \ldots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

19) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α-sous-gaussienne. En déduire que $\mathsf{E}\big(\exp(\gamma\|y\|^2)\big) \leqslant 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:

$$P\big(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}\big) \leqslant \big(5\, e^{-\gamma r^2}\big)^n.$$

20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question **18)**. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que $\|M^{(n)}a\| \geqslant r\sqrt{n}$. En déduire que :

$$P\big(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\big) \leqslant \big(25\, e^{-\gamma r^2}\big)^n.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2016 - MATH. II MP.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

A Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\, du \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du.$$

1. Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.
4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.
5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.
6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

7. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.
8. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} du$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.
9. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge.

10. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{k}}}\Big)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

11. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim\limits_{x\to 0} x\, f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

12. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

13. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

    En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que $A_2 \in S$, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

15. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} v(n) \mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) \mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$
Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \Big(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \Big) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

16. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que, pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x \to 0} x\,(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose
$$\Delta(\psi) = \lim_{x \to 0} x\,(L(\psi))(x).$$

17. Vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \ \|_\infty)$.

18. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

19. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\mathrm{e}}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]. \end{cases}$$

20. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

21. Si $A \in S$, que vaut $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k)$.

Fin du problème

A2019 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \; \|$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0 \; x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = \left(h_{j,k}^{(n)}\right)_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\widetilde{X}(t)\right)^2 dt$.

On note $\mathscr{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathscr{V}$ si et seulement si ${}^tX\, H_n\, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathscr{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathscr{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tXH_nX \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tXH_nX \leqslant \pi\|X\|^2$.

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : E \to E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.

11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \\
J_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1 - tx}\,\mathrm{d}t, \\
\Phi_n(x) &= \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x) && \text{pour tout } x > 0. \\
\Gamma(n) &= (n-1)! && \text{pour tout entier } n > 0. \\
\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t && \text{pour tous réels } \alpha > 0, \beta > 0.
\end{aligned}$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$x J_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x)=0$ et où l'on montrera que $c=\varphi(0)$.)

14) Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t.$$

15) Soit $\gamma\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0)=1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17) En déduire que pour tout $x\in\,]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,\mathrm{d}t.$$

18) En déduire que pour $n\geqslant 1$,

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\ \sup_{x\in\,]0,1[}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leqslant 2\omega_n \arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$.

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n\arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n\to+\infty$.

FIN DU PROBLÈME

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas X*, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\ k \in \{0, \ldots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $E(N_n)$ de la variable aléatoire N_n.

La partie D est indépendante des parties précédentes.

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n\ (X+1)^n,$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que
$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\,\frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Si α est un élément de $]0,1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

   Si α est un élément de $]1,+\infty[$, montrer de même que
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

4. Pour $x \in [2,+\infty[$, on pose
$$I(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{dt}}{\ln(t)}.$$
   Justifier, pour $x \in [2,+\infty[$, la relation
$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{dt}}{(\ln(t))^2}.$$
   Établir par ailleurs la relation
$$\int_2^x \frac{\mathrm{dt}}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(I(x)\right).$$
   En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler, sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.

   Justifier la formule :
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)\, x^n;$$
$$\forall x \in [-1,1], \qquad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R = n)\, x^n.$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

   Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que
$$G(1) = P(R \neq +\infty).$$

7. Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que
$$P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P(R = k)\ P(S_{n-k} = 0_d).$$

   En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} P(R = k)\ P(S_{n-k} = 0_d).$$

8. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x) = 1 + F(x)\ G(x).$$

   Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1^-, en discutant selon la valeur de $P(R \neq +\infty)$.

9. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\ x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

   L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que
$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A.$$

10. Montrer que la série $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $P(R \neq +\infty) = 1$.

11. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement
$$\Big(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leq k \leq i-1\}\Big).$$

    Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:
$$P(Y_i = 1) = P(R > i).$$

    En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i).$$

12. Conclure que

$$\frac{E(N_n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(R = +\infty).$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$. Par ailleurs, p est un élément de $]0, 1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = -1) = q.$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité :

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$

14. Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $G(x)$.

    Exprimer $P(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.

    Déterminer la loi de R.

15. On suppose que

$$p = q = \frac{1}{2}\cdot$$

Donner un équivalent simple de $P(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} = 1.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

16. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que

$$a_n \leq \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leq a_n\, B_{m-n} + a_0\,(B_m - B_{m-n}).$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \quad \text{et} \quad B_{m_n} - B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}.$$

18. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}.$$

En utilisant la question 17 pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ \ln(n)}.$$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvoretzky

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(S_k = 0_d)\, P(R > n-k).$$

Dans les questions 20 et 21, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$P(X = (0,1)) = P(X = (0,-1)) = P(X = (1,0)) = P(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}.$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$P(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2.$$

21. Donner un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin du problème

A2018 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'étudier quelques applications probabilistes du lemme de sous-additivité de Fekete et du théorème de Erdös-Szekeres.

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé. On note $P(A)$ la probabilité d'un événement A et on note $\mathrm{E}(X)$ l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

A. Préliminaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que pour toute variable aléatoire X réelle à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{E}(X) \leqslant m - 1 + n P(X \geqslant m).$$

2) À l'aide d'une comparaison entre une somme et une intégrale, montrer que

$$n \ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

En déduire l'inégalité

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \,;\, k \geqslant n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup(U_n).$$

3) Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on dit que v est *plus petite* que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est *plus grande* que v.

4) Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$$

5) Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et de $\overline{v}$.

6) Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites u, $\overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *sous-additive* si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$.

Dans le reste de cette partie on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

7) Soit m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

8) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}.$$

9) En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

C. Une application probabiliste

Soit x un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note Y_n la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

10) Montrer que si $P(X_1 < x) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n < x) = 1$ et que si $P(X_1 \geqslant x) > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

11) Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante :

$$\left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}$$

et en déduire l'inégalité

$$P(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x)P(Y_n \geqslant x).$$

12) Démontrer la convergence de la suite

$$\left(\left(P(Y_n \geqslant x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

Si r est un entier naturel non nul, on note $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_r)$ une liste de nombres réels de longueur r ; cette liste est *croissante* si $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_r$, *décroissante* si $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_r$. Une liste ℓ' de longueur $p \in \{1, \ldots, r\}$ est *extraite* de ℓ s'il existe p indices strictement croissants $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ dans $\{1, \ldots, r\}$ tels que $\ell' = (\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p})$.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{pq+1})$ une liste de longueur $pq + 1$ de nombres réels deux-à-deux distincts qui représentent les valeurs de $pq + 1$ jetons numérotés $1, 2, \ldots, pq + 1$.

On range successivement les jetons en piles de gauche à droite par le procédé suivant :

- le jeton n°1 de valeur a_1 débute la première pile ;
- *si* $a_2 > a_1$, alors on pose le jeton n°2 de valeur a_2 sur le jeton n°1 ; *sinon* on crée une nouvelle pile avec ce jeton n°2, située à droite de la première pile ;
- lors des étapes suivantes, disposant du jeton n°k de valeur a_k, on le dépose sur la première pile en partant de la gauche telle que a_k est supérieur à la valeur du jeton au sommet de la pile, *si* une telle pile existe ; *sinon* on crée une nouvelle pile avec ce jeton, située à droite des précédentes.

En suivant ce procédé avec tous les jetons, on obtient plusieurs piles de jetons, chaque pile ayant des valeurs rangées dans l'ordre croissant du bas vers le haut.

Par exemple, avec la liste

$$a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$$

dans cet ordre, on obtient de gauche à droite les trois piles suivantes :

10		
9	8	
7	6	
4	3	
1	2	5

13) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur le nombre s de piles, montrer qu'à l'issue du processus, pour tout jeton de valeur z de la dernière pile, il existe une liste $b = (b_1, \dots, b_s)$ de réels extraite de la liste a vérifiant :

- b est décroissante et de longueur s ;
- pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ème pile en partant de la gauche ;
- $b_s = z$.

Par exemple, avec la liste $a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$ on a une liste extraite $b = (7, 6, 5)$.

14) En déduire que la liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p+1$ *ou* une liste extraite décroissante de longueur $q+1$.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Chaque élément $\sigma \in S_n$ est noté par la liste de ses n images $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$.

Soit B une variable aléatoire à valeurs dans S_n de loi uniforme, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $P(B = \sigma) = 1/\mathrm{Card}(S_n)$. On définit la variable aléatoire A à valeurs dans S_n en posant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$A(\omega) = \big(B(\omega)(1), \dots, B(\omega)(n)\big).$$

On note également, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $A_k(\omega) = B(\omega)(k)$. Enfin, on considère les variables aléatoires réelles C_n et D_n définies par :

- C_n est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de A ;
- D_n est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de A.

15) Les variables aléatoires réelles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

16) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k)$ une liste croissante de longueur k d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$. On note A^s l'événement : « la liste $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_k})$ est croissante ». Montrer que $P(A^s) = \dfrac{1}{k!}$.

17) Démontrer que C_n et D_n ont la même loi. Démontrer alors, à l'aide du résultat de la question 14, que :

$$\mathrm{E}(C_n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

18) Démontrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P(C_n \geqslant k) \leqslant \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

19) Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement supérieur à 1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $k - 1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$. À l'aide du résultat de la question 2, déduire de la question précédente que

$$P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}.$$

20) En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \left(1 + n^{-1/4}\right) e + \varepsilon_n.$$

En conclure que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ existe et que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e$.

FIN DU PROBLÈME

A2019 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Comportement asymptotique de sommes de séries entières et application à l'équation d'Airy

---

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel. On considère la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par la série entière

$$S_{r,p}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

L'objectif, dans les parties A et B du problème, est d'établir l'équivalence suivante quand $x \to +\infty$:

$$S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^r\, e^x}{p}. \tag{$H_{r,p}$}$$

Cet énoncé est noté $(H_{r,p})$. Dans la partie C, on applique ce résultat à l'étude asymptotique d'une solution particulière de l'équation d'Airy.

1. **Question préliminaire**. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Qu'en est-il de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}$?

A Équivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r > 0$

On suppose dans cette partie que $p \geqslant 2$ et $r > 0$, et on se propose de montrer que les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^r}{n!} x^n.$$

2. Pour $x > 0$ fixé, étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\, \mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

En déduire que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on note t_x. Montrer que la suite finie $\big(u_n(x)\big)_{0 \leqslant n \leqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite infinie $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x.

L'ensemble $\{u_n(x)\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum égal à $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que $t_x - x - r$ tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$. (On pourra s'aider de la définition d'une limite.)

4. Montrer que pour tout entier relatif k, $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout x au voisinage de $+\infty$,
$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant n\, u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

5. En déduire que pour tout entier relatif k,
$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o(x^r e^x)$$
quand $x \to +\infty$. Montrer alors que
$$M_x = o(x^r e^x).$$
(On pourra d'abord démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.)

6. Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$
Pour tout nombre réel $x > 0$, comparer $S_{r,1}(zx)$ à la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n \Big(u_{n-1}(x) - u_n(x)\Big).$$
En déduire que pour tout x au voisinage de $+\infty$, $\Big|S_{r,1}(zx)\Big| \leqslant \dfrac{4\, M_x}{|1-z|}$ et conclure que lorsque $x \to +\infty$,
$$S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x).$$

7. On pose $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = p\, S_{r,p}(x)$$
et en déduire que les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents.

B Une démonstration probabiliste

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie.

Soit un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x = \frac{X_x}{x}$$

et on se propose de démontrer que $\mathbf{E}(Z_x^r) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

8. Pour tout réel $\alpha > 0$, montrer que $\mathbf{P}\Big(|X_x - x| > \alpha\, x^{2/3}\Big) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

9. Montrer que, pour tout réel $x > 1$, les variables aléatoires

$$A_x = \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}\, Z_x^r \quad \text{et} \quad B_x = \mathbf{1}_{(|Z_x - 1| \leqslant x^{-1/3})}\, Z_x^r$$

sont d'espérance finie et trouver les limites de $\mathbf{E}(A_x)$ et de $\mathbf{E}(B_x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Soit N un entier naturel strictement positif.

10. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la variable aléatoire

$$Y_{N,x} = \mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k)$$

est d'espérance finie et que

$$x^N\, \mathbf{P}\Big(X_x > x + x^{2/3} - N\Big) = \mathbf{E}(Y_{N,x}).$$

Déduire alors de la question 8 que $\mathbf{E}(Y_{N,x}) = o(x^N)$ quand $x \to +\infty$.

11. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que pour tout réel $x > 0$,

$$\mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})}\, X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, Y_{k,x}$$

et en déduire la limite de $\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}\, Z_x^N\Big)$ lorsque $x \to +\infty$.

12. Démontrer que $\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}\, Z_x^r\Big) \to 0$ quand $x \to +\infty$. En déduire que $\mathbf{E}(Z_x^r) \to 1$ quand $x \to +\infty$ et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

En combinant les résultats des deux parties précédentes, nous concluons à la validité de $(H_{r,p})$ pour tout entier naturel $p > 0$ et tout réel $r > 0$. Dans la suite du sujet, nous aurons besoin du résultat classique suivant, que nous admettrons :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

(i) la série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$;

(ii) les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes ;

(iii) il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $b_n > 0$.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Soit un entier naturel $p > 0$ et un nombre réel r.

13. En remarquant que pour tout réel $x > 0$,

$$S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!} x^{np},$$

déduire du lemme de comparaison asymptotique des séries entières que

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^p\, S_{r-p,p}(x).$$

En déduire que $(H_{r,p})$ implique $(H_{r-p,p})$ et conclure à la validité de $(H_{r,p})$.

C Application à l'équation d'Airy

L'équation différentielle d'Airy (Ai) est définie par

$$x''(t) = t\,x(t). \tag{Ai}$$

14. **Question préliminaire**. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n > 0$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \ln k + x \ln n - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$. Établir la convergence de la série $\sum(v_n - v_{n-1})$, et en déduire l'existence d'un réel $\Gamma(x) > 0$ vérifiant la *formule d'Euler* :

$$\prod_{k=0}^{n} (x+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x\, n!}{\Gamma(x)}.$$

15. Justifier qu'il existe une unique solution f de (Ai) sur $\mathbf{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

16. Expliciter une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pout tout réel t, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$.

17. Démontrer que $a_{3n} \sim \dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})\, n^{1/3}}{9^n\,(n!)^2}$ puis que $a_{3n} \sim n^{-1/6}\, \dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n} \dfrac{1}{(2n)!}$ lorsque $n \to +\infty$.

18. En déduire une constante C, que l'on exprimera à l'aide de $\Gamma(\frac{2}{3})$, telle que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} C\, t^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\, t^{3/2}\right).$$

FIN DU PROBLÈME

A2021 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème :

- Par convention $0^0 = 1$.

- Si i et j sont des entiers naturels tels que $i \leq j$, on note $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $i \leq k \leq j$.

- a et b sont des réels tels que $a < b$.

- Si x est un réel, on définit :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbf{Z}\,,\, k \leq x\} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z}\,,\, x \leq k\}$$

- p est un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

- ζ est la fonction de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\zeta(x) = (x + 1)\ln(x + 1).$$

- Φ est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

- $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p, ce que l'on note $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Résultats préliminaires

1 $\triangleright$ Rappeler la formule de Stirling. En déduire l'existence d'une suite réelle $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \epsilon_n).$$

2 $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Démontrer que :

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x \quad \text{et} \quad \lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x.$$

3 ▷ Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\mathrm{d}t$ converge.

4 ▷ Démontrer que :

$$\zeta(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Étude asymptotique d'une suite

Dans cette partie, si $n \in \mathbf{N}^*$, on note x_n le nombre entier $\lceil np - q \rceil$ et p_n le réel $P(X_n = x_n)$.

5 ▷ Justifier que p_n est le plus grand élément de $\{P(X_n = k)\,,\, k \in [\![0, n]\!]\}$.

6 ▷ Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - x_n) = +\infty$.

Établir alors :

$$\sqrt{n\,p\,q}\,p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\,p^{x_n}\,q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}\,x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}}.$$

7 ▷ Montrer que, pour tout entier $n > \max\left\{\dfrac{p}{q}, \dfrac{q}{p}\right\}$:

$$\frac{n^n\,p^{x_n}\,q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)}.$$

8 ▷ Montrer que la suite $\left(\sqrt{n\,p\,q}\,p_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

Convergence en loi

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\,p\,q}}(X_n - n\,p)$ et on définit les réels $\tau_{n,k}$ par la relation :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \tau_{n,k} = \frac{k - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}.$$

9 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la loi de Y_n et vérifier que Y_n est une variable aléatoire centrée réduite.

10 ▷ Justifier l'existence d'un élément $N \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\text{pour tout entier } n \geq N, \quad [a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n\,p\,q}} \leq b - a.$$

On définit les suites $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante : pour tout $n \in N^*$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}\, t + np \rfloor\,, \quad e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)}, \quad f_n(t) = \sqrt{n\,p\,q}\, P\big(Y_n = e_n(t)\big).$$

11 ▷ Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, e_n est une fonction en escalier croissante vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction e que l'on précisera.

12 ▷ Montrer que :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t,$$

puis vérifier que

$$P\big(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)\big) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

13 ▷ Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$f_n(\tau_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{p\,q\,n^2}{k\,(n-k)}}\, \frac{p^k\, q^{n-k}}{\big(\frac{k}{n}\big)^k \big(\frac{n-k}{n}\big)^{n-k}}\, \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_k)(1+\epsilon_{n-k})},$$

où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est la suite définie à la question 1.

14 ▷ Justifier que, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\sqrt{\frac{p\,q\,n^2}{k_n(t)\,(n-k_n(t))}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_{k_n(t)})(1+\epsilon_{n-k_n(t)})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

15 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $\max\left\{\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\right\} \times |\tau_{n,k}| < 1$:

$$\frac{p^k\, q^{n-k}}{\big(\frac{k}{n}\big)^k \big(\frac{n-k}{n}\big)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}.$$

16 ▷ Démontrer que :

$$\frac{p^{k_n(t)}\, q^{n-k_n(t)}}{\big(\frac{k_n(t)}{n}\big)^{k_n(t)} \big(\frac{n-k_n(t)}{n}\big)^{n-k_n(t)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

17 ▷ En conclure que :

$$\forall\, t \in [a,b],\ f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(t),$$

puis que :

$$\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t.$$

18 ▷ Déduire de tout ce qui précède que :

$$P\big(e_n(a) \le Y_n \le e_n(b)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t,$$

puis que :

$$P\big(a \le Y_n \le b\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t.$$

Applications

19 ▷ Montrer que :

$$\forall\, T \in \mathbf{R}_+^*,\ \int_{-T}^{T} \Phi(t)\mathrm{d}t \ge 1 - \frac{1}{T^2},$$

puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\mathrm{d}t$.

20 ▷ Les suites $\big(P(Y_n \le b)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\big(P(Y_n \ge a)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ? En préciser les limites éventuelles.

Généralisation

Soit φ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que φ' ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Z_n = \varphi \circ Y_n$.

21 ▷ Montrer que, si $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, il existe une unique fonction Ψ continue sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\text{pour tout } (\alpha,\beta) \in \overline{\mathbf{R}}^2,\ \text{si } \alpha \le \beta,\ \text{ alors } P(\alpha \le Z_n \le \beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\alpha^\beta \Psi(t)\mathrm{d}t,$$

où $\overline{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble constitué des réels, de $-\infty$ et de $+\infty$.

Que dire si l'on ne suppose plus $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$?

Fin du problème

A2023 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$ pouvant être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id_E$.

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov :
Soit le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t}\|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 ▻ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2 $\rhd$ On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 $\rhd$ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 $\rhd$ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1; r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1; r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup\limits_{\substack{x \in E_i \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 $\rhd$ Montrer que, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 $\rhd$ Montrer que, pour $i \in [\![1; r]\!]$, E_i est stable par a.

7 $\rhd$ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 $\rhd$ Montrer que : $a = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 $\rhd$ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 $\rhd$ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta_i} |\!|\!|_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |\!|\!| a_i - \lambda_i id_{E_i} |\!|\!|_i^k.$$

11 $\rhd$ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta} |\!|\!|_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 $\rhd$ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|\!|\!|.|\!|\!|_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|\!|\!|.|\!|\!|_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad |\!|\!| e^{tu_A} |\!|\!|_r \leqslant C |\!|\!| e^{tv_A} |\!|\!|_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & u(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

13 $\rhd$ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \iff \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 $\rhd$ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |\!|\!| e^{tu} |\!|\!|_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15 ▷ Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $q(x) = b(x, x)$.

16 ▷ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbf{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right. .$$

17 ▷ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18 ▷ Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19 ▷ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0, \; q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0).$$

20 ▻ En déduire l'existence de trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant C e^{-\frac{\beta}{2} t} \|x_0\|,$$

où $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Fin du problème

A2024 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0;1[$ fixé.

1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f\ :\ ]0\,;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{aligned} r\ :\ ]-\pi\,;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi;\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{\mathrm{i}\theta})^2}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0;\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g\ :\ ]-\pi;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto e^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3 ▷ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$\begin{aligned} h\ :\ ]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^x}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}. \end{aligned}$$

Calculer $h(0)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi;\pi[$.

4 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]0;\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}x\theta}\Big) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5 ▷ En déduire que :

$$\forall \theta \in]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\Big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\Big)^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7 ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0;1[$ fixé.

8 ▷ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

9 $\triangleright$ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\cdot$$

10 $\triangleright$ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\cdot$$

11 $\triangleright$ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}\cdot$$

12 $\triangleright$ En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0\,;\pi[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}\cdot$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 $\triangleright$ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

16 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

17 ▷ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E\Big(|S_n|\Big)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

19 ▷ Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 ▷ Montrer que :

$$E\Big(\cos(S+T)\Big) = E\Big(\cos(S)\Big)\,E\Big(\cos(T)\Big).$$

21 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$E\Big(\cos(tS_n)\Big) = \Big(\cos(t)\Big)^n.$$

22 ▷ Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \operatorname{signe}(a)\ b$$

où $\operatorname{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big).$$

23 ▷ Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$E\Big(|S_n|\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^n}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

25 ▷ Conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\Big((n-1)!\Big)^2}.$$

Fin du problème

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Notations et résultats admis

— Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.

— Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.

— On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles definies sur Ω. On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.

— Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

— Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(X = 1\right) = \mathbf{P}\left(X = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

— Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^0(\Omega)$, on note $\|X\|_p = \left(\mathbf{E}\left(|X|^p\right)\right)^{1/p}$. On admet que l'application $X \mapsto \|X\|_p$ est alors une norme sur $L^0(\Omega)$.

— Si $m \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [1, +\infty[$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on définit la quantité $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ par :

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

On admet que l'application $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto \|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ est une norme sur $\mathbf{R}^m$.

— On note $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbf{R}$ nulles à partir d'un certain rang. On admet alors que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$.

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathbf{E}\left(Y^q\right)\right)^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}\left(X^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^q\right) = 1$.

3 ▷ Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

4 ▷ Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}\,(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

5 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

6 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

7 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

8 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

9 ▷ On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

11 ▷ En déduire qu'il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

12 ▷ On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Dans les questions numérotées de 13 ▷ à 15 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

13 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4}$.

14 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \;\leq\; \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

15 ▷ Montrer qu'il existe $\widetilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

16 ▷ En déduire qu'il existe un réel α_p tel que

$$\alpha_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

17 ▷ Montrer que l'application φ définie sur $\left(L^0(\Omega)\right)^2$ par

$$\forall X, Y \in L^0(\Omega), \quad \varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$$

est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 ▷ Soit l'application $\psi : u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$. Montrer que ψ prend ses valeurs dans $L^0(\Omega)$, puis que ψ conserve le produit scalaire.

19 ▷ On note $R = \psi\left(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\right)$. Montrer que pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R.

Une deuxième conséquence

Dans cette partie, on suppose que n est une puissance de 2 : on écrit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^\star$.

20 ▷ Soit $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^k$. Montrer que

$$\alpha_1 n \left\|(a_1, \dots, a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i \right| \leq \beta_1 n \left\|(a_1, \dots, a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k}.$$

On pourra utiliser les questions 11 et 16.

21 ▷ En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \left\|x\right\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n}.$$

En ordonnant les n éléments de $\{-1,1\}^k$ de manière arbitraire, on pourra utiliser l'application T définie sur $\mathbf{R}^k$ par $T(a_1, \dots, a_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right)_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k}$.

FIN DU PROBLÈME

A2017 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sous-groupes compacts du groupe linéaire

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\varnothing$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, ..., a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, ..., \lambda_p$ dont la somme égale 1, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A à coefficients réels est notée A^T. La trace de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4. Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application ϕ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $\langle x, y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.

   Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)

   En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire.)

   Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

C Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, ...\Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$.

10. Montrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, ..., F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \varnothing$.

D Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup_{u\in G} \|u(x)\|$.

11. Montrer que N_G est bien définie, et que c'est une norme sur E.

12. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :

    - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;

    - pour tous x, y dans E avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

    Pour la deuxième propriété on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $||u(z)||$ est continue.

On considère un élément u de $L(E)$ et on suppose que K est stable par u, c'est-à-dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le nombre réel $\delta(K) = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \frac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit r un entier $\geqslant 1$, $u_1, u_2, ..., u_r$ des éléments de G et $u = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15. Montrer que $N_G\Big(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\Big) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G\Big(u_i(a)\Big)$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $N_G\Big(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\Big) = N_G\Big(u_j(a)\Big) + N_G\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\Big)$.

16. En déduire, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \ldots, r\}$.

18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même par la formule $\rho_A(M) = A^T M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A \mid A \in G\}$, $\Delta = \{A^T A \mid A \in G\}$ et $K = \mathrm{Conv}(\Delta)$.

19. Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$.

20. Montrer que Δ est un compact contenu dans S_n^{++} et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

21. Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN\ ;\ B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P.

22. Montrer que $g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.

Fin du problème

A2018 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racines carrées de matrices complexes : existence et calcul numérique

---

Dans ce problème, on étudie l'existence de racines carrées d'une matrice complexe, puis on introduit l'algorithme de Newton pour calculer numériquement l'une de ces racines carrées, avec des considérations sur la convergence et la stabilité de l'algorithme.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n. On appelle *racine carrée* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On note $\widetilde{\mathbb{C}}$ l'ensemble des nombres complexes non nuls qui ne sont pas des nombres réels négatifs.

A. Quelques exemples

1) Montrer que la matrice $A = I_2$ admet une infinité de racines carrées (on pourra utiliser la notion de symétrie). Lesquelles sont des polynômes en A ?

2) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées et qu'aucune d'entre elles n'est un polynôme en A.

Dans la question suivante, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle qui est *définie positive*, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.

3) Montrer que A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive.

(On pourra montrer que deux racines carrées de ce type possèdent les mêmes valeurs et sous-espaces propres.)

B. Existence et calcul d'une racine carrée

Dans cette partie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice *inversible* quelconque.

4) Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $U = (u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes triangulaires supérieures. On suppose que T est inversible. Montrer que l'équation $U^2 = T$ est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{cases}$$

Montrer que T étant donnée, on peut résoudre ce système en choisissant une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (On pourra considérer les parties réelles et imaginaires des $u_{i,i}$.)

5) En déduire que A admet une racine carrée. Si en outre, les valeurs propres de A appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$, montrer que A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

On admet qu'une telle racine carrée est unique et on la notera $\sqrt{A}$ dans toute la suite du problème.

C. Algorithme de Newton

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

et on admet que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $B(X, r)$ et $\overline{B}(X, r)$ les boules, respectivement ouverte et fermée, de centre $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et de rayon r.

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6) Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

On note m_A le polynôme minimal de A.

7) Montrer que la matrice $m_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

En déduire que s'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.

8) Réciproquement, si A et B ont au moins une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

(On pourra considérer une matrice de la forme XY^T où X et Y sont deux matrices colonnes bien choisies).

Soit $F : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par la formule $F(X) = X^2 - A$.

9) Montrer que la différentielle $\mathrm{d}F_X$ de F en $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{d}F_X(H) = XH + HX.$$

Déduire des deux questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible. Montrer que cette condition implique que X est inversible.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$. On pose $X^* = \sqrt{A}$ (la matrice $\sqrt{A}$ a été définie à la question 5).

On définit, sous réserve d'existence, une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$(\mathbf{N}) \begin{cases} X_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = X_k - (\mathrm{d}F_{X_k})^{-1}\big(F(X_k)\big). \end{cases}$$

Dans les questions suivantes, on étudie l'existence et la convergence de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

10) Montrer que $\mathrm{d}F_{X^*}$ est inversible et qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible pour tout $X \in \overline{B}(X^*, r)$.

Pour tout $Y \in \overline{B}(X^*, r)$ on pose $G(Y) = Y - (\mathrm{d}F_Y)^{-1}\big(F(Y)\big)$.

11) Calculer $G(X^*)$ et montrer que pour tout $H \in B(0, r)$,

$$G(X^* + H) - G(X^*) = (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

où

$$\big(\mathrm{d}F_{X^*+H}\big)^{-1} = \big(Id + (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1} \circ \mathrm{d}F_H\big)^{-1} \circ (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1}.$$

12) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout X de $B(X^*, r)$, $\|G(X) - X^*\| \leqslant C\|X - X^*\|^2$. (On pourra utiliser le résultat de la question 6.)

13) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X_0 \in B(X^*, \rho)$ la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bien définie et vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leqslant \frac{(\rho\sqrt{C})^{2^k}}{C}.$$

Que peut-on en conclure ?

D. Forme équivalente

Dans cette partie, on étudie deux algorithmes équivalents à celui de Newton. On rappelle que A désigne une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$. Soit U_0 et V_0 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Sous réserve d'existence, on note $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbf{I})\begin{cases} U_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ U_{k+1} = U_k + H_k \text{ où } H_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie} \\ \qquad U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2 \qquad\qquad \text{pour tout } k \geqslant 0 \end{cases}$$

et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbf{II})\begin{cases} V_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) \quad \text{pour tout } k \geqslant 0. \end{cases}$$

14) Si la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**N**) et $U_0 = X_0$, montrer que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et égale à $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Réciproquement si la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et $X_0 = U_0$, montrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**N**) et égale à $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On suppose dorénavant ces conditions vérifiées.

15) On suppose que $U_0 = V_0$ commute avec A. Montrer que la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**II**) et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = V_k$ commute avec A. (On pourra d'abord montrer que U_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ et considérer la matrice $G_k = \frac{1}{2}\left(U_k^{-1}A - U_k\right)$.)

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives, et qu'une telle matrice admet une unique racine carrée définie positive (question 3).

Dans la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive.

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (**II**) avec $V_0 = \mu I_n$ et $\mu > 0$. On fixe une matrice orthogonale P de sorte que $A = PDP^T$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, ordonnées par ordre croissant. On note $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs propres correspondants.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ quelconques.

16) Montrer que V_k est symétrique réelle définie positive de mêmes vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$ que A dont on notera $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n}$ les valeurs propres correspondantes. Trouver une relation entre $\lambda_{k+1,\ell}$ et $\lambda_{k,\ell}$.

17) Montrer que

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}.$$

18) Déterminer la limite de la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

E. Stabilité

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (**II**) avec $V_0 = \sqrt{A}$. Soit $\varepsilon > 0$ et i, j deux indices distincts de $\{1, \dots, n\}$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice orthogonale P définie dans la partie précédente et on pose $\Delta = \varepsilon C_i C_j^T$.

Soit $\widehat{V_0} = V_0 + \Delta$. La matrice $\widehat{V_1}$ est calculée par la relation (**II**) à partir de $\widehat{V_0}$ et on pose $\Delta_1 = \widehat{V_1} - V_1$. Ensuite $\widehat{V_2}$ est calculé à partir de $\widehat{V_1}$ par la relation (**II**), puis $\widehat{V_3}, \widehat{V_4} \dots$ de la même manière.

19) Montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} (V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} \\ \Delta_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} A\right). \end{cases}$$

20) Déterminer la valeur de $\eta \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{V_k} = \sqrt{A} + \eta^k \Delta.$$

21) On appelle *conditionnement* de A le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite. Que doit vérifier le conditionnement de A pour que la suite $(\widehat{V_k})_{k\geqslant 0}$ converge ?

FIN DU PROBLÈME

A2021 – MATH II MP

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul ;

— si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $[\![p, q]\!]$;

— si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;

— B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ;

— I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;

— $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;

— une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = P(x)$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $[M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne ;

— on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $|| \cdot ||$ et définie par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad ||M|| = \max \left\{ |[M]_{i,j}| \,, 1 \leq i, j \leq n \right\} \;;$$

— $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

— si $u = (u_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n-uplet est croissant si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(i \le j) \Longrightarrow (u_i \le u_j) ;$$

— si $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![1,n]\!] ; u_i = u_{i_0}\}$;

— enfin $\mathrm{Diag}\big((u_i)_{1 \le i \le n}\big)$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$.

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, \sigma \in B_n,\ \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\, \omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\mathrm{Diag}\big((d_i)_{1 \le i \le n}\big)\, \omega(\sigma) = \omega(\sigma)\, \mathrm{Diag}\big((d_{\sigma(i)})_{1 \le i \le n}\big).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

5 ▷ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega.$$

6 ▷ Pour tout $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \,\mathrm{Diag}\big((s'_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega',$$

avec Ω, $\Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n}$, $(s'_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

7 ▷ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \,\mathrm{Diag}\Big(\big(f(s'_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega' = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, S \in S_n(I),\ u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\Big(\big(\varphi(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)$ avec $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\mathrm{Tr} \circ u$.

8 ▷ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 ▷ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.

10 ▷ On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

11 ▷ Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ, alors les suites $\big(u(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ et $\big(v(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

12 ▷ On note $\Sigma = \Big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\,;\ {}^tX\,X = 1\Big\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min\big(\mathrm{Sp}(S)\big) = \min\big\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X\in\Sigma\big\} \text{ et } \max\big(\mathrm{Sp}(S)\big) = \max\big\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X\in\Sigma\big\}.$$

13 ▷ Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ, de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max\big\{\,|\lambda|\,;\ \lambda\in\mathrm{Sp}(M)\big\},$$

est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

Dans cette partie, à l'aide de la norme précédemment introduite, on démontre quelques résultats relatifs à la continuité des fonctions de matrices symétriques. On suppose désormais $S_n(\mathbf{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbf{R})$, associe son polynôme caractéristique.

On définit aussi l'application, notée $\mathrm{Sp}_\uparrow$, qui à toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, associe son spectre croissant (c'est-à-dire le n-uplet croissant des valeurs propres de S dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).

14 ▷ Démontrer que χ est continue.

On souhaite maintenant prouver que $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue. À cet effet, on introduit un élément M de $S_n(\mathbf{R})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M. Si $k\in\mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)$.

15 ▷ Démontrer que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence croissante.

16 $\triangleright$ Montrer que, si α est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge, alors : $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.

17 $\triangleright$ En déduire que $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue.

18 $\triangleright$ Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

19 $\triangleright$ Démontrer que, si $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

On démontre maintenant quelques résultats relatifs à la convexité des fonctions de matrices symétriques. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

20 $\triangleright$ On suppose ici que f est convexe sur I et que $S \in S_n(I)$. On note

$$\mathcal{U}_S = \left\{ {}^t\Omega\, S\, \Omega\, ;\, \Omega \in O_n(\mathbf{R}) \right\}.$$

Justifier que pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[U]_{k,k} \in I$.

Démontrer alors que :

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^{n} f\left([U]_{k,k}\right) ;\, U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S).$$

21 $\triangleright$ En déduire que, si f est convexe sur I, pour tout $(A, B) \in S_n(I)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$v(f)\big((1-t)\, A + t\, B\big) \leq (1-t)\, v(f)(A) + t\, v(f)(B).$$

On dit qu'une fonction ψ de $S_n(I)$ dans $\mathbf{R}$ est convexe sur $S_n(I)$ si elle vérifie la relation :

$$\forall\, (A, B) \in S_n(I)^2,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad \psi\big((1-t)A + tB\big) \leq (1-t)\psi(A) + t\psi(B).$$

22 $\triangleright$ Démontrer finalement que la fonction $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$ si, et seulement si, f est convexe sur I.

Fin du problème

A2023 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x\ \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \int_0^{\pi}(\alpha t^2+\beta t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t\in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t=0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \,\mathrm{d}t$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \,\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} \, du,$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}\cdot$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16 $\triangleright$ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de $]0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17 $\triangleright$ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 $\triangleright$ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 $\triangleright$ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20 ▹ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

21 ▹ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[, \ \ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T).$$

22 ▹ Existe-t-il une application h, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R}, \ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.
On désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G

- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets *distincts* de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe

- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la Figure 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1, 9]\!] \quad \text{et} \quad A = \Big\{\{1,2\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,9\}, \{2,8\}\Big\}$$

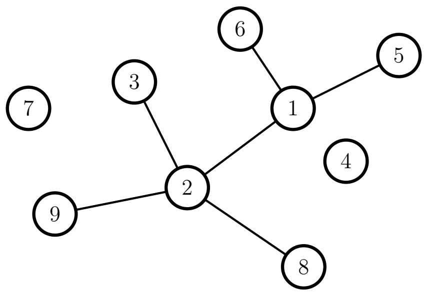


Figure 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \{s, s_1, s_2, \dots, s_d\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \Big\{ \{s, s_1\}, \{s, s_2\}, \dots, \{s, s_d\} \Big\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

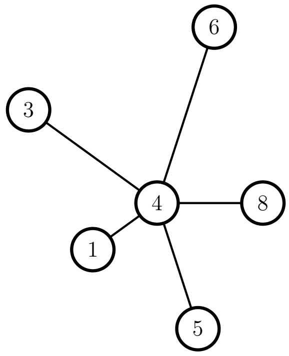


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est **inclus** dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une **copie** de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \qquad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la FIGURE 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi **indexation**) σ entre $[\![1, n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \Big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\Big\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\Big\{i, j\Big\} = \Big\{j, i\Big\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 $\triangleright$ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 $\triangleright$ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 $\triangleright$ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 $\triangleright$ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le **polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 $\triangleright$ Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

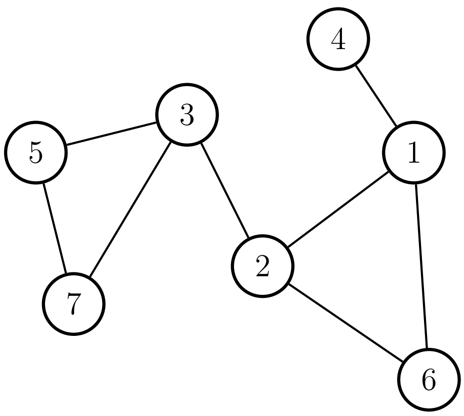
6 $\triangleright$ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

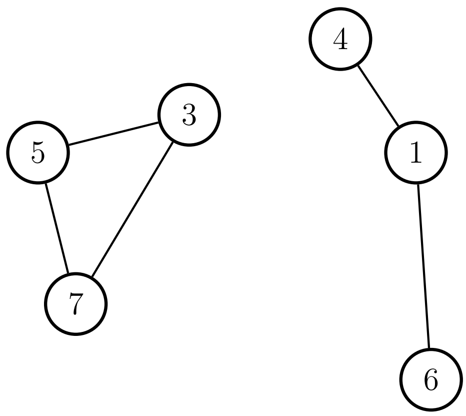
7 $\triangleright$ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:



(a) Un graphe G



(b) Le graphe $G \setminus 2$

FIGURE 3 – un graphe G, et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \Big\{\{s_1, s_2\}\Big\}$.

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

– N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

– Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$

– p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\{0, 1\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i,j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{i,j\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\{i,j\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0). \tag{1}$$

On *admet* l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P})$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\{i,j\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 ▷ Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\{G\})$ de l'événement élémentaire $\{G\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \mathrm{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

– si $p_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0

– si $t_n = \mathrm{o}(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 ▷ Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

12 ▷ Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\big(\mathbf{E}(X)\big)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset \Big(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$.

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 ▷ Montrer que si $p_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 ▷ Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 ▷ En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

– l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{ H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!] \Big\}$$

– pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \qquad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}.$$

17 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

18 ▷ Soit S_0' un ensemble *fixé* de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 ▷ Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 ▷ En déduire que si $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(n^{\omega_0}p_n\Big)=+\infty$.

21 $\triangleright$ Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}\mathbf{P}(H\cup H'\subset G)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Pour $k\in[\![0,s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k=\sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=k}}\mathbf{P}(H\cup H'\subset G).$$

22 $\triangleright$ Montrer que $\Sigma_0\leq\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2$.

23 $\triangleright$ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k\leq\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}c_0p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 $\triangleright$ Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1\leq q\leq r$, on a :

$$\binom{r}{q}r^{-q}\geq\frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q.$$

et en déduire que pour $k\in[\![1,s_0]\!]$, on a $\Sigma_k=\mathrm{o}\left(\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 $\triangleright$ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2}=0$ où $\mathbf{V}(X_n^0)$ désigne la variance de X_n^0.

26 $\triangleright$ Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 $\triangleright$ Retrouver le résultat de la question 16 $\triangleright$ et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin du problème

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté $[\![1, n]\!]$.

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $S_n(\mathbf{R})$, resp. $D_n(\mathbf{R})$, resp. $GL_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques, resp. diagonales, resp. inversibles) réelles de taille n, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne ;

— on note $\pi(M)$ le nombre de valeurs propres réelles strictement positives de M comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\pi(I_n) = n$;

— si $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $D \in D_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

— si f et g sont deux polynômes non simultanément nuls, on note $f \wedge g$ leur PGCD ;

— si f est un polynôme, on note également f sa fonction polynomiale associée ;

— on note $\sigma(f)$ le nombre de racines réelles de f appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$, comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\sigma(X^2(X-1)(X+1)) = 2$;

— on dit que le réel α est une **racine stable** de f si $\alpha \neq 0$ et $f(\alpha) = f(\alpha^{-1}) = 0$;

— si f est un polynôme de degré $m \in \mathbf{N}$ et s'écrit

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k,$$

on note f_0 son polynôme réciproque, défini par

$$f_0 = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} X^k;$$

— on note $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top$ la matrice colonne de taille n dont le premier coefficient est égal à 1 et les autres à 0 ;

— on note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les $n-1$ coefficients situés juste au-dessus de la diagonale, égaux à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = \delta_{i+1,j} \ \text{(symbole de Kronecker);}$$

— pour tout polynôme réel f on définit la matrice $J(f) \in S_n(\mathbf{R})$ par

$$J(f) = f_0(S)^\top f_0(S) - f(S)^\top f(S).$$

Dans ce problème p désigne un polynôme à coefficients réels, scindé sur $\mathbf{R}$ de degré n,

$$p = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_n \neq 0,$$

et on note $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ ses racines toutes réelles, comptées avec leurs multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir l'égalité $\sigma(p) = \pi(J(p))$ (critère de Schur-Cohn) dans le cas où $J(p)$ est inversible, puis de proposer une démarche générale permettant de compter les racines de p dans $]-1;1[$, lorsque la matrice $J(p)$ n'est pas inversible.

Ces résultats, généralisables aux polynômes à coefficients complexes, sont utiles dans l'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques.

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1 ▷ Montrer que p_0, le polynôme réciproque de p, vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad p_0(x) = x^n p(1/x)$$

et en déduire que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).$$

2 ▷ Montrer que $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Jusqu'à la fin de la partie **A.** on suppose que toutes les racines de p sont stables et d'ordre de multiplicité 1.

3 ▷ Justifier qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

Soit h le polynôme de degré n défini par $h(X) = Xp'$, où p' est le polynôme dérivé de p. On note h_0 et $(p')_0$ les polynômes réciproques respectifs de h et p'.

4 ▷ Montrer que $h = np - \lambda(p')_0$, puis que $h_0 = \lambda(np - Xp')$.

5 ▷ Vérifier que p' est scindé sur $\mathbf{R}$ puis montrer que $h \wedge h_0 = 1$ et en déduire que p' n'admet pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on note f_j le polynôme

$$f_j = a_n(1-\alpha_n X)\cdots(1-\alpha_{j+1}X)(X-\alpha_{j-1})\cdots(X-\alpha_1) = a_n \prod_{k=j+1}^{n}(1-\alpha_k X)\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)$$

avec, selon les conventions habituelles, $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{n}(1-\alpha_k X) = \prod_{k=1}^{0}(X-\alpha_k) = 1.$

6 ▷ Montrer que s'il existe deux entiers i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i \alpha_k = 1$, alors α_i est racine de chaque polynôme f_j, où $j \in [\![1, n]\!]$, et que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Jusqu'à la fin de la partie **B.** on suppose qu'aucune racine de p n'est stable.

On note E le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels dont les éventuels pôles sont des inverses de racines de p (on ne demande pas de justifier que E est un espace vectoriel). Les éléments de E sont donc les fractions rationnelles dont le dénominateur peut s'écrire comme produit fini, éventuellement égal à 1, de facteurs $(1 - \alpha_i X)$ où $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit la fraction rationnelle $g_j \in E$ par

$$g_j = \frac{f_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)}$$

et l'application P_j, qui à une fraction rationnelle $f \in E$ associe la fraction rationnelle

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

7 ▷ Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application P_j est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

8 ▷ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $g \in E$, calculer $P_j\left(\dfrac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right)$.

9 ▷ En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 ▷ Montrer que la famille $((S^\top)^i U)_{0\leq i\leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Les matrices S et U ont été définies dans la partie préliminaire du problème.

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices

$$B_j = S - \alpha_j I_n \qquad \text{et} \qquad C_j = I_n - \alpha_j\, S.$$

11 ▷ Démontrer que

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top (C_j^\top C_j - B_j^\top B_j) f_j(S).$$

Les polynômes $f_1, \ldots, f_n$ ont été définis dans le préambule de la partie **B**.

12 ▷ Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1-\alpha_j^2)UU^\top$.

13 ▷ On note D la matrice diagonale de taille n :

$$D = \mathrm{Diag}((1-{\alpha_j}^2)_{1\leq j\leq n})$$

et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de V est $V_j = f_j(S^\top)\, U$. Montrer que

$$J(p) = VDV^\top.$$

14 ▷ En déduire, à l'aide de la question 6, que si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\pi(M)$ désigne le cardinal de l'ensemble de ses valeurs propres strictement positives, comptées avec leurs multiplicités.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$ quand

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\} \qquad X^\top M X > 0.$$

On note $d(M)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_M)\}.$$

15 ▷ Soit deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A = P^\top BP$. Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

16 ▷ Pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ construire un sous-espace vectoriel F_M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. On a donc $d(M) \geq \pi(M)$.

17 ▷ On veut montrer que pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ on a $\pi(M) = d(M)$. Par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim G > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, montrer $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$, en déduire une contradiction et conclure.

18 ▷ Démontrer le **critère de Schur-Cohn** :

Si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable et $\sigma(p) = \pi(J(p))$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Montrer, à l'aide des questions 9 et 13, que si p n'admet pas de racine stable et si $J(p)$ n'est pas inversible alors il existe un polynôme q non nul à coefficients réels de degré au plus $n-1$ tel que $q(S^\top)\,U = 0_{n,1}$.

20 ▷ En déduire que la matrice $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

On suppose dans cette partie, comme on l'a fait aux questions 3 à 5, que toutes les racines de p sont stables et de multiplicité 1 et on note $h = Xp'$ (où p' est le polynôme dérivé de p) et h_0 le polynôme réciproque de h. On rappelle que, d'après la question 3, il existe un réel $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

21 ▷ Montrer que $J(h)$ est inversible.

22 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $r \in]1-\eta; 1[$, le polynôme $p(rX)$

est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines à l'intérieur de l'intervalle $]-1;1[$ et ne possède aucune racine stable.

Pour tout réel $r > 0$, on note $F(r) = J(p(rX))$.

23 ▷ Montrer que

$$\lim_{r \to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = n - \sigma(p).$$

24 ▷ Justifier que l'application $F : \mathbf{R}_+^* \to S_n(\mathbf{R})$ est dérivable et que

$$F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top (p'(S))^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S)S.$$

25 ▷ En déduire, à l'aide des résultats de la question 4, que

$$\frac{n}{2(r-1)} F(r) \underset{r \to 1}{=} J(h) + o(1).$$

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue.

26 ▷ En déduire que $\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$.

G. Méthode générale.

On se place dans le cas général, sans disposer d'information sur la stabilité et la multiplicité des racines de p, et on cherche à calculer $\sigma(p)$.

On construit les deux polynômes f et g vérifiant $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 ▷ Montrer que $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28 ▷ Proposer une méthode permettant de construire un nombre fini (éventuellement nul) de polynômes $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et de multiplicité 1, tels que $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. Exprimer $\sigma(p)$ à l'aide de $n, \deg g, \pi(J(g)), \ell, \pi(J(g))$ ainsi que $\pi(J(g_1')), \ldots, \pi(J(g_\ell'))$.

Fin du problème

A2022 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in \,]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée. En déduire que $t \mapsto (1 - tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}\cdot$$

3 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D, \ P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - z^n}\cdot$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

5 ▷ Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6 ▷ Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbf{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n} p_n x^n$.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, P(e^{-t+i\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \qquad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\, x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

9 ▷ Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}.$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\ ,$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 ▷ Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

11 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\, \varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + O\Big(\frac{1}{t^n}\Big) \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

12 ▷ Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}\cdot$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

Étant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, ainsi qu'un réel θ, les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbf{E}(\cos(\theta X)) + i\,\mathbf{E}(\sin(\theta X)).$$

13 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ.

Dans les questions 14 ▷ à 18 ▷, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in]0,1[$ arbitraire. On pose $q = 1-p$.

14 ▷ Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel θ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{p\,e^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}\cdot$$

15 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbf{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

16 ▷ Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$, indépendante de p, telle que

$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{N},\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = p\, i^k e^{i\theta}\, \frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}} \quad \text{et} \quad P_k(0) = 1.$$

17 ▷ En déduire qu'il existe une suite $(C_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs, indépendante de p, telle que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \left|\mathbf{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}\right| \leq \frac{C_k\, q}{p^k}.$$

18 ▷ En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de p tel que

$$\mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^4\Big) \leq \frac{K\, q}{p^4}.$$

Dans les questions 19 ▷ à 21 ▷, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

19 ▷ Montrer successivement que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie, et que

$$\mathbf{E}(Y^2) \leq (\mathbf{E}(Y^4))^{1/2} \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(|Y|^3) \leq \Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4}.$$

20 ▷ Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$\left|e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{|u|^3}{6}.$$

En déduire que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbf{E}(Y^2)\,\theta^2}{2}\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4}.$$

21 ▷ Conclure que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - \exp\Big(-\frac{\mathbf{E}(Y^2)\,\theta^2}{2}\Big)\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\,\mathbf{E}(Y^4).$$

F. Convergence vers une gaussienne

Étant donné un réel $t > 0$, on pose, suivant les notations de la partie **C**,

$$m_t := S_{1,1}(t) \quad \text{et} \quad \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et θ, on pose

$$h(t,\theta) = e^{-im_t\theta}\,\frac{P\Big(e^{-t}e^{i\theta}\Big)}{P(e^{-t})}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et u, on pose

$$\zeta(t,u) = \exp\left(i\,\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t,u) = \zeta(t,u)\,h\Big(t, \frac{u}{\sigma_t}\Big).$$

22 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - u_k|.$$

23 $\triangleright$ Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}(1 - e^{-kt})$, et on pose $Y_k = k(Z_k - \mathbf{E}(Z_k))$. Démontrer que

$$h(t,\theta) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21 $\triangleright$, l'inégalité

$$\Big|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\Big| \leq K^{3/4}|\theta|^3\, S_{3,3/4}(t) + K\,\theta^4\, S_{4,1}(t). \tag{2}$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question 18 $\triangleright$, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie **D**.

24 $\triangleright$ Montrer que $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}\,t^{3/2}}$ quand t tend vers 0^+. En déduire, pour tout réel u, que

$$j(t,u) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}.$$

25 $\triangleright$ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi],\ 1 - \cos\theta \geq \alpha\,\theta^2.$$

À l'aide de la question 9 $\triangleright$, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in \,]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$|h(t,\theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}.$$

26 $\triangleright$ Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

G. La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P(e^{-t}) \sim \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6t}\right)$ quand t tend vers 0^+.

27 ▷ En appliquant la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\,n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Fin du problème

A2022 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 \ . \tag{N_1}$$

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\big)^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \ . \tag{N_2}$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \ .$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ , \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_A'(t) = A\, e^{tA} = e^{tA}\, A \ .$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1}\, e^A\, P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A,B] = AB - BA \ .$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 ▷ Montrer que les matrices A et e^B commutent.

On définit une application

$$g \,:\, \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$
$$t \longmapsto g(t) = e^{t(A+B)}\, e^{-tB}.$$

2 ▷ Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}\ . \tag{1}$$

3 ▷ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 ▷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5 ▷ Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{A}{k}}\, e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right)^k = \exp(A+B)\ . \tag{2}$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right)\ \exp\left(\frac{B}{k}\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right).$$

6 ▷ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\ .$$

On introduit la fonction

$$h \,:\, \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$
$$t \longmapsto h(t) = e^{tA}e^{tB} - e^{t(A+B)}$$

7 ▷ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \text{ lorsque } k \to +\infty \; .$$

8 ▷ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit **groupe spécial linéaire** :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1 \big\} \; .$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son **algèbre de Lie** :

$$\mathcal{A}_G = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tM} \in G \big\} \; .$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 ▷ Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10 ▷ Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ En utilisant la partie 2, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 ▷ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto u(t) = e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 ▷ En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G,\ \forall B \in \mathcal{A}_G,\ [A,B] \in \mathcal{A}_G\ .$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est **tangente** à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé **espace tangent** à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 ▷ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta_M'(0)$.

16 ▷ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 ▷ Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 ▷ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_A(t) = e^{tA} = \big(v_{i,j}(t)\big)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ .$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}\big((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}\big) = \operatorname{Ker}\big((u-\lambda\,\mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\big) \ .$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.

19 ▷ Montrer que, si $\lim_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 ▷ Montrer que $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 ▷ En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\begin{aligned} P &\text{ est inversible,}\\ D &\text{ est diagonale,}\\ N &\text{ est nilpotente,}\\ ND &= DN,\\ A &= P(D+N)P^{-1},\\ \chi_A &= \chi_D. \end{aligned}$$

22 ▷ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O(t^p\, e^{\alpha t}) \text{ lorsque } \ t \to +\infty \ .$$

23 ▷ Étudier la réciproque de la question 19).

24 ▷ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tA}X = 0 \iff X = 0 .$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

et les sous-espaces $E_s = \mathrm{Ker}\,\big(P_s(A)\big)$, $E_i = \mathrm{Ker}\,\big(P_i(A)\big)$ et $E_n = \mathrm{Ker}\,\big(P_n(A)\big)$ de $E = \mathbf{C}^n$. *Les indices s, i, n signifient respectivement stable, instable et neutre.*

25 ▷ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \big\{X \in E \mid \lim_{t \to +\infty} e^{tA}X = 0\big\} .$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \big\{X \in E \mid \lim_{t \to -\infty} e^{tA}X = 0\big\}.$$

26 ▷ Montrer que

$$E_n = \big\{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^* \;\; \exists p \in \mathbf{N} \;\; \forall t \in \mathbf{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \leq C\,\big(1 + |t|\big)^p\big\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA}X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

Fin du problème

A2023 – MATH I MPI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$ pouvant être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id_E$.

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases},$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov :
Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases},$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t}\|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 ▻ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2 ▷ On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 ▷ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 ▷ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1;r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1,\ldots,x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 ▷ Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 ▷ Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7 $\rhd$ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 $\rhd$ Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 $\rhd$ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 $\rhd$ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta_i} |\!|\!|_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |\!|\!| a_i - \lambda_i id_{E_i} |\!|\!|_i^k.$$

11 $\rhd$ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta} |\!|\!|_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 $\rhd$ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|\!|\!| . |\!|\!|_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|\!|\!| . |\!|\!|_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{tu_A} |\!|\!|_r \leqslant C |\!|\!| e^{tv_A} |\!|\!|_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & u(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

13 $\rhd$ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 $\rhd$ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |\!|\!| e^{tu} |\!|\!|_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15 ▻ Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $q(x) = b(x, x)$.

16 ▻ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbf{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right. .$$

17 ▻ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18 ▻ Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19 ▻ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0, \ q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0).$$

20 ▻ En déduire l'existence de trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\frac{\beta}{2}t}\|x_0\|,$$

où $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Fin du problème

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0;1[$ fixé.

1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f\ :\ ]0\,;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{aligned} r\ :\ ]-\pi\,;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi;\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{\mathrm{i}\theta})^2}\ \mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0;\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g\ :\ ]-\pi;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto e^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3 ▷ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$h :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$$
$$t \longmapsto \frac{t^x}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}.$$

Calculer $h(0)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi;\pi[$.

4 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]0;\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}x\theta}\Big) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5 ▷ En déduire que :

$$\forall \theta \in]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\big)^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7 ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0;1[$ fixé.

8 ▷ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\cdot$$

10 ▷ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\cdot$$

11 ▷ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}\cdot$$

12 ▷ En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0\,;\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}\cdot$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\big(\cos(t)\big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15 ▷ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

16 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(t)\big)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

17 ▷ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E\Big(|S_n|\Big)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$P(X_1=-1) = P(X_1=1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

19 ▷ Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 ▷ Montrer que :

$$E\Big(\cos(S+T)\Big) = E\Big(\cos(S)\Big)\,E\Big(\cos(T)\Big).$$

21 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$E\Big(\cos(tS_n)\Big) = \Big(\cos(t)\Big)^n.$$

22 ▷ Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \text{signe}(a)\ b$$

où $\text{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big).$$

23 ▷ Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$E\Big(|S_n|\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^n}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

25 ▷ Conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\Big((n-1)!\Big)^2}.$$

Fin du problème

A2025 – MATH I MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Notations et résultats admis

— Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.

— Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.

— On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles definies sur Ω. On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.

— Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

— Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(X = 1\right) = \mathbf{P}\left(X = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

— Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^0(\Omega)$, on note $\|X\|_p = \left(\mathbf{E}\left(|X|^p\right)\right)^{1/p}$. On admet que l'application $X \mapsto \|X\|_p$ est alors une norme sur $L^0(\Omega)$.

— Si $m \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [1, +\infty[$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on définit la quantité $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ par :

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

On admet que l'application $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto \|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ est une norme sur $\mathbf{R}^m$.

— On note $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbf{R}$ nulles à partir d'un certain rang. On admet alors que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$.

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathbf{E}\left(Y^q\right)\right)^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}\left(X^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^q\right) = 1$.

3 ▷ Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

4 ▷ Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

5 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

6 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2}{2}\right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

7 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

8 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

9 ▷ On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^4\right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

11 ▷ En déduire qu'il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

12 ▷ On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Dans les questions numérotées de 13 ▷ à 15 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

13 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in \,]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4}$.

14 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

15 ▷ Montrer qu'il existe $\widetilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

16 ▷ En déduire qu'il existe un réel α_p tel que

$$\alpha_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

17 ▷ Montrer que l'application φ définie sur $(L^0(\Omega))^2$ par

$$\forall X, Y \in L^0(\Omega), \quad \varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$$

est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 ▷ Soit l'application $\psi : u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$. Montrer que ψ prend ses valeurs dans $L^0(\Omega)$, puis que ψ conserve le produit scalaire.

19 ▷ On note $R = \psi\left(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\right)$. Montrer que pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R.

Une deuxième conséquence

Dans cette partie, on suppose que n est une puissance de 2 : on écrit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^\star$.

20 ▷ Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}^k$. Montrer que

$$\alpha_1 n \left\|(a_1, \ldots, a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i \right| \leq \beta_1 n \left\|(a_1, \ldots, a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k}.$$

On pourra utiliser les questions 11 et 16.

21 ▷ En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \left\|x\right\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n}.$$

En ordonnant les n éléments de $\{-1,1\}^k$ de manière arbitraire, on pourra utiliser l'application T définie sur $\mathbf{R}^k$ par $T(a_1, \ldots, a_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right)_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k}$.

Fin du problème

A2023 – MATH II MPI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \ \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt) \ \mathrm{d}t = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \,\mathrm{d}t$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \,\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u} - 1}} \, \mathrm{d}u,$$

puis que

$$D_n \underset{n \to +\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b - a}{b + a}\cdot$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \; \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \, \rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16 $\triangleright$ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de $]0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17 $\triangleright$ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 $\triangleright$ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 $\triangleright$ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20 ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

21 ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T).$$

22 ▷ Existe-t-il une application h, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$

A2024 – MATH II MPI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.
On désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\operatorname{card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G

- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\left\{s, s'\right\}$ où s et s' sont des sommets *distincts* de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe

- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la Figure 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1, 9]\!] \quad \text{et} \quad A = \left\{\left\{1,2\right\},\left\{1,5\right\},\left\{1,6\right\},\left\{2,3\right\},\left\{2,9\right\},\left\{2,8\right\}\right\}$$

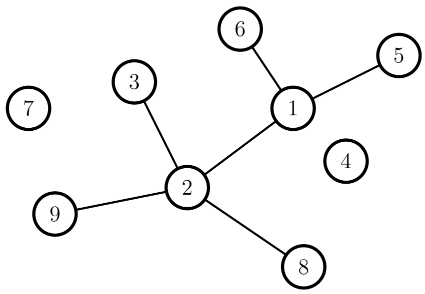


Figure 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \Big\{s, s_1, s_2, \dots, s_d\Big\}$ est de cardinal $d + 1$, et A est du type

$$A = \Big\{\big\{s, s_1\big\}, \big\{s, s_2\big\}, \dots, \big\{s, s_d\big\}\Big\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \Big\{1, 3, 4, 5, 6, 8\Big\}$.

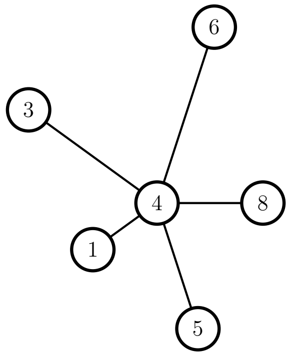


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est **inclus** dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$

- G' est une **copie** de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \qquad \Big\{s', t'\Big\} \in A' \iff \Big\{\sigma(s'), \sigma(t')\Big\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la FIGURE 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi **indexation**) σ entre $[\![1, n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \Big\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\Big\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\Big\{i, j\Big\} = \Big\{j, i\Big\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le **polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 ▷ Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

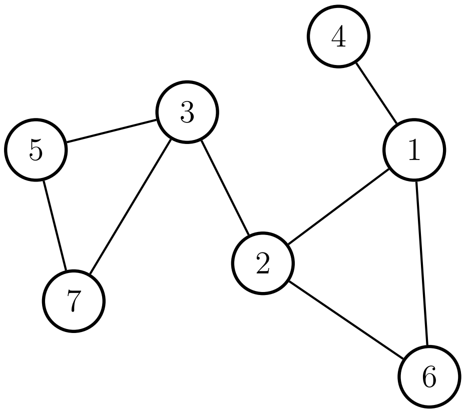
6 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

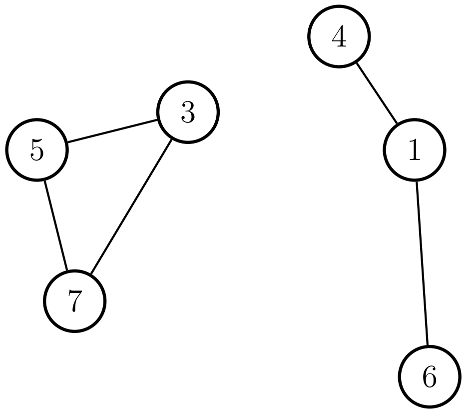
7 ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:



(a) Un graphe G



(b) Le graphe $G \setminus 2$

FIGURE 3 – un graphe G, et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \Big\{\{s_1, s_2\}\Big\}$.

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \backslash s_1} \times \chi_{G_2 \backslash s_2}$$

9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

– N l'entier $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

– Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$

– p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\left\{0, 1\right\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left\{i, j\right\} \in A \\ 0 & \text{si } \left\{i, j\right\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \left\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\right\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\left\{i, j\right\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0). \tag{1}$$

On *admet* l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\left(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n)\right)$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = \left(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P}\right)$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\left\{i, j\right\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 ▷ Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\left\{G\right\})$ de l'événement élémentaire $\left\{G\right\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \mathrm{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0

- si $t_n = \mathrm{o}(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 $\triangleright$ Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

12 $\triangleright$ Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\big(\mathbf{E}(X)\big)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset \Big(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$.

Section B - Une fonction de seuil

13 $\triangleright$ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 $\triangleright$ Montrer que si $p_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 $\triangleright$ Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 $\triangleright$ En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

– l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{ H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!] \Big\}$$

– pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \qquad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}.$$

17 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

18 ▷ Soit S_0' un ensemble *fixé* de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 ▷ Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 ▷ En déduire que si $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{\omega_0}p_n\right)=+\infty$.

21 $\triangleright$ Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}\mathbf{P}(H\cup H'\subset G)=\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2}p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Pour $k\in[\![0,s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k=\sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=k}}\mathbf{P}(H\cup H'\subset G).$$

22 $\triangleright$ Montrer que $\Sigma_0\leq\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2$.

23 $\triangleright$ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k\leq\sum_{H\in\mathcal{C}_0}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}c_0p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 $\triangleright$ Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1\leq q\leq r$, on a :

$$\binom{r}{q}r^{-q}\geq\frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q.$$

et en déduire que pour $k\in[\![1,s_0]\!]$, on a $\Sigma_k=\mathrm{o}\Big(\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2\Big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 $\triangleright$ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2}=0$ où $\mathbf{V}(X_n^0)$ désigne la variance de X_n^0.

26 $\triangleright$ Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 $\triangleright$ Retrouver le résultat de la question 16 $\triangleright$ et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin du problème

Proposition de corrigé

1 ▷ Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à M ; en notant $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a :

pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$ et donc $u(e_{\rho(j)}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,\rho(j)} e_i$.

Si on effectue le changement d'indice correspondant à la permutation ρ, on obtient :

pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_{\rho(j)}) = \sum_{i=1}^{n} m_{\rho(i),\rho(j)} e_{\rho(i)}$.

Or, la famille $(e_{\rho(i)})_{1 \leq i \leq n}$ forme une base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les matrices } M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } (m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ sont semblables}}$.

Si maintenant σ et σ' sont deux indexations de S et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, en notant $\rho = (\sigma')^{-1} \circ \sigma \in \mathcal{S}_n$:

$(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \iff \{\sigma'\big(\rho(i)\big), \sigma'\big(\rho(j)\big)\} \in A$;

soit $(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff (M_{G,\sigma'})_{\rho(i),\rho(j)} = 1$.

Comme les seules valeurs prises par une matrice du type $M_{G,\sigma}$ sont 1 et 0, on en déduit que les matrices $M_{G,\sigma}$ et $\big((M_{G,\sigma'})_{\rho(i),\rho(j)}\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ sont égales et comme cette dernière matrice est semblable à la matrice $M_{G,\sigma'}$ d'après l'encadré précédent :

$\boxed{\text{les matrices } M_{G,\sigma} \text{ et } M_{G,\sigma'} \text{ sont semblables}}$.

2 ▷ D'après la question précédente, le caractère diagonalisable est indépendant de l'indexation choisie. Dans tous les cas, en tant que matrice symétrique réelle :

$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable}}$.

3 ▷ Là encore, d'après la question **??**, deux matrice semblables ayant même rang, le rang d'une matrice d'adjacence ne dépend pas de l'indexation choisie.

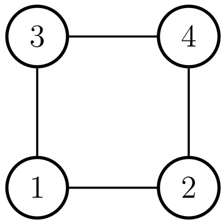
Si une matrice d'adjacence M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $n \geq 1$ est non nulle, alors $n \geq 2$ (car les termes diagonaux de M sont nuls) et il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $m_{i,j} = 1$. Comme M est symétrique, $m_{j,i} = 1$ alors que $m_{i,i} = 0$; les colonnes d'indices i et j de M ne sont pas liées et $\mathrm{rg}(M) \geq 2$:

$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1}}$.

4 ▷ Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe $G = ([\![1, n]\!], A)$ dont ses sommets non isolés forment le graphe de centre i et de branches $\big\{i, j_1\big\}, \big\{i, j_2\big\}, \dots, \big\{i, j_d\big\}$, alors les seules colonnes non nulles sont d'une part la colonne C_i d'indice i ayant $d + 1$ chiffres 1 et les colonnes d'indices $j_1, j_2, \dots, j_d$ toutes identiques avec un seul terme non nul situé en ligne i ; ces colonnes sont libres avec la colonne C_i si bien que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}(C_i, C_{j_1})$ et donc :

$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe dont ses sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2.}}$

La matrice $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2}}$, représente un carré



et n'est pas du type précédent.

5 ▷ On note $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$. Soit σ une indexation de S. Comme G' est une copie de G, il existe une bijection σ' de S dans S' telle que :
$\forall (s, t) \in S^2$, $(s, t) \in A \iff (\sigma'(s), \sigma'(t)) \in A'$. Alors :
$(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \iff \{\sigma'\big(\sigma(i)\big), \sigma'\big(\sigma(j)\big)\} \in A'$;
soit $(M_{G,\sigma})_{i,j} = 1 \iff (M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)} = 1$.

Comme les seules valeurs prises par une matrice du type $M_{G,\sigma}$ sont 1 et 0, on en déduit que les matrices $M_{G,\sigma}$ et $\Big((M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)}\Big)_{1\leq i,j\leq n}$ sont égales et ont donc même polynôme caractéristique ; mais d'après **??**, les matrices $\Big((M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)}\Big)_{1\leq i,j\leq n}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont donc même polynôme caractéristique :
$\boxed{\text{si } G' \text{ est une copie de } G, \text{ alors } \chi_G = \chi_{G'}}$.

6 ▷ On sait que $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(M)$ où M est la matrice d'adjacence du graphe considéré. Comme les coefficients de la diagonale de M sont nuls, $\boxed{a_{n-1} = 0}$.

Lorsqu'on développe le déterminant $\chi_G(X)$ par la formule

$$\chi_G(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

pour obtenir le coefficient de X^{n-2} il est nécessaire de choisir une permutation σ telle que $n-2$ valeurs de k donnent $\sigma(k) = k$ (pour obtenir les $n-2$ termes «en X») et deux valeurs de k telles que $\sigma(k) \neq k$. Ceci correspond obligatoirement à une transposition $\tau_{i,j}$ et le coefficient correspondant de X^{n-2} est alors $-a_{i,j}a_{j,i} = -a_{i,j}^2$ (le «$-$» étant la signature de la transposition).

Le coefficient $a_{i,j}^2$ est non nul (et vaut donc 1) si et seulement si $a_{i,j} = 1$ i.e. $\big\{i, j\big\} \in A$ et donc $\boxed{a_{n-2} = -|A|}$.

7 ▷ Soit $G = (S, A)$ une telle étoile et M sa matrice d'adjacence. On sait que $\operatorname{rg}(M) = 2$ et donc $\chi_G(X)$ est de la forme $\chi_G(X) = X^{n-2}(X^2 + aX + b)$.

Or, $a_{n-1} = 0$ et donc $a = 0$ et $b = a_{n-2} = -|A| = -d$ si bien que :
$\boxed{\chi_G(X) = X^{n-2}(X^2 - d)}$.

Si l'étoile étudiée est de centre j (en indexant les sommets par $[\![1,n]\!]$), en notant $i_1, i_2, \dots, i_d$ les sommets correspondant aux extrémités de l'étoile, la colonne C_j d'indice j de M est nulle sauf les termes d'indices $i_1, i_2, \dots, i_d$ valant 1.

Comme M est diagonalisable (symétrique réelle), on a $\dim\Big(\mathrm{Ker}(M)\Big) = n-2$.

D'ailleurs, en notant $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{Ker}(M)$ est engendré d'une part par les vecteurs e_k tels que le colonnes C_k de M soient nulles et d'autre part par les vecteurs $e_{i_1} - e_{i_j}$ pour $j \in [\![2,d]\!]$.

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles étant dans

$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}(C_j, e_j)$, ces vecteurs sont de la forme $\lambda C_j + \mu e_j$ et on trouve facilement que $C_j + \varepsilon\sqrt{d}e_j$ est un vecteur propre associé à $\varepsilon\sqrt{d}$. Comme les espaces propres associés à $\varepsilon\sqrt{d}$ sont de dimension 1, on obtient finalement :

> Les valeurs propres de M sont :
>
> – 0 d'espace propre associé $\mathrm{vect}(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_d\}} \cup \mathrm{vect}(e_{i_1} - e_{i_j})_{j\in[\![2,d]\!]}$
>
> – $\sqrt{d}$ d'espace propre associé $\mathrm{vect}(C_j + \sqrt{d}e_j)$
>
> – $-\sqrt{d}$ d'espace propre associé $\mathrm{vect}(C_j - \sqrt{d}e_j)$

8 ▷ On note $n_k = |S_k|$ pour $1 \leq k \leq 2$ et quitte à utiliser une indexation, on peut supposer que les n_1 (resp. n_2) premiers (resp. derniers) sommets de G sont ceux de S_1 (resp. S_2) et que le $n_1{}^{\text{e}}$ (resp. $(n_1+1)^{\text{e}}$) sommet est s_1 (resp. s_2).

En notant M_1 (resp. M_2) la matrice d'adjacence du graphe G_1 (resp. G_2), on a :

$$\chi_G(X) = \left|\begin{array}{c|c} \Big[XI_{n_1} - M_1\Big] & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} & \Big[XI_{n_2} - M_2\Big] \end{array}\right|$$

Par multilinéarité, on obtient :

$\chi_G(X) =$

$$\left|\begin{array}{c|c} [XI_{n_1}-M_1] & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&0\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & [XI_{n_2}-M_2]\end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}&0\\ [M_1'] & \vdots\\ &0\\ &0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&-1\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & [XI_{n_2}-M_2]\end{array}\right|$$

Le premier déterminant est triangulaire par blocs et donne $\chi_{M_1}\chi_{M_2}$ et M_1' est obtenue à partir de $XI_{n_1}-M_1$ en supprimant sa dernière colonne ; on utilise encore la multilinéarité pour le second déterminant :

$\chi_G(X) =$

$$\chi_{M_1}\chi_{M_2} + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}&0\\ [M_1'] & \vdots\\ &0\\ &0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&-1\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & [XI_{n_2}-M_2]\end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}&0\\ [M_1'] & \vdots\\ &0\\ &0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0&-1\\ 0&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&\\ 0&\\ \vdots & [M_2']\\ 0&\end{matrix}\end{array}\right|$$

Cette fois, M_2' est obtenue à partir de $XI_{n_2}-M_2$ en supprimant sa première colonne.

Le premier déterminant triangulaire par blocs donne 0 car le déterminant supérieur gauche est nul (une colonne de 0). On développe finalement le dernier déterminant par rapport à la n_1e colonne puis encore par rapport à la n_1e colonne ((n_1+1)e colonne initiale) :

$$\chi_G(X) = \chi_{M_1}\chi_{M_2} + \left|\begin{array}{c|c} [M_1'] & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -1&0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&\\ \vdots & [M_2'']\\ 0&\end{matrix}\end{array}\right| = \chi_{M_1}\chi_{M_2} - \left|\begin{array}{c|c} [M_1''] & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix} & [M_2'']\end{array}\right|$$

où M_1'' et M_2'' sont les matrices d'adjacence de $G_1 \setminus s_1$ et de $G_2 \setminus s_2$ respectivement.

Finalement : $\boxed{\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X)\chi_{G_2}(X) - \chi_{G_1\setminus s_1}(X)\chi_{G_2\setminus s_2}(X)}$.

9 ▷ On utilise la formule de la question précédente avec s_1 et s_2 les centres des deux étoiles :

$\chi_G(X) = X^{d_1-1}(X^2-d_1)X^{d_2-1}(X^2-d_2) - X^{d_1}X^{d_2}$ (pour une étoile à d branches privée de son centre, il n'y a plus d'arêtes et son polynôme caractéristique est X^d).

On obtient $\chi_G(X) = X^{d_1+d_2-2}\Big((X^2-d_1)(X^2-d_2)-X^2\Big)$:

$\boxed{\chi_G(X) = X^{d_1+d_2-2}\Big(X^4-(d_1+d_2+1)X^2+d_1d_2\Big)}$.

Comme la matrice d'adjacence est symétrique réelle donc diagonalisable,

on a «$m_0 = d_0$» donc la dimension du noyau de cette matrice est d_1+d_2-2 (car $d_1d_2 \neq 0$) :

$\boxed{\begin{array}{l}\text{le rang de la matrice d'adjacence de la double étoile étudiée est :}\\ d_1+d_2+2-d_1+d_2-2=4.\end{array}}$

10 ▷ Comme G possède a arêtes, et donc que les $N-a$ autres arêtes sont inexistantes, on a : $\boxed{\{G\} = \bigcap_{\{i,j\}\in A}(X_{\{i,j\}}=1)\bigcap_{\{i,j\}\notin A}(X_{\{i,j\}}=0)}$ et $\boxed{\mathbf{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}}$.

On a $\mathbf{P}(\Omega_n) = \sum_{G\in\Omega_n}\mathbf{P}(\{G\})$.

Si on partitionne Ω_n par la famille $\Omega_n^{(k)}$ des graphes ayant k arêtes, on obtient, d'après l'encadré précédent :

$\mathbf{P}(\Omega_n) = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p_n^k q_n^{N-k}$ (le coefficient $\binom{N}{k}$ correspondant aux possibilités de choix des k arêtes parmi les N arêtes potentielles).

Par la formule du binôme, on obtient : $\boxed{\mathbf{P}(\Omega_n) = (p_n+q_n)^N = 1^N = 1}$.

11 ▷ Comme X est à valeurs dans $\mathbf{N}$, par l'inégalité de Markov :

$\boxed{\mathbf{P}(X>0) = \mathbf{P}(X\geq 1) \leq \mathbf{E}(X)}$.

12 ▷ L'événement $(X=0)$ est inclus dans l'événement $\Big(|X-\mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$ et donc :

$\boxed{\mathbf{P}(X=0) \leq \mathbf{P}\Big(|X-\mathbf{E}(X)|\geq \mathbf{E}(X)\Big) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2}}$ par Bienaymé-Tchebychev.

13 ▷ $\boxed{A_n \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(N,p_n)}$.

14 ▷ D'après la question 11 ▷, $0 \leq \mathbf{P}(A_n>0) \leq \mathbf{E}(A_n) = Np_n = \dfrac{n(n-1)}{2}p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}n^2p_n$ qui a pour limite 0. Par encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(A_n>0)=0}$.

15 ▷ D'après la question 12 ▷, (on a bien $\mathbf{E}(A_n) = Np_n \neq 0$) :

$$0 \leq 1 - \mathbf{P}(A_n > 0) = \mathbf{P}(A_n = 0) \leq \frac{\mathbf{V}(A_n)}{\big(\mathbf{E}(A_n)\big)^2} = \frac{Np_nq_n}{N^2p_n^2} = \frac{2(1-p_n)}{n(n-1)p_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2p_n} \text{ qui}$$

a pour limite 0. Par encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1}$.

16 ▷ D'après les deux questions précédentes :

$$\boxed{\text{la propriété «posséder au moins une arête» a pour fonction de seuil } \left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geq 2}.}$$

17 ▷ Comme X_H suit une loi de Bernoulli, $\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = \mathbf{P}(H \subset G)$;
or, $(H \subset G) = \displaystyle\bigcap_{\{i,j\}\in A_H} (X_{\{i,j\}} = 1)$ et par indépendance des $X_{\{i,j\}}$:

$$\boxed{\mathbf{E}(X_H) = \prod_{\{i,j\}\in A_H} \mathbf{P}(X_{\{i,j\}} = 1) = p_n^{a_H}}.$$

18 ▷ On a $\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{C}_0) = \binom{n}{s_0} c_0}$ car après avoir choisi les s_0 sommets d'un élément de $\mathcal{C}_0$, il suffit d'en faire des copies pour obtenir les éléments de $\mathcal{C}_0$ associés à ces sommets.

Une copie de G_0 menant avant tout à une bijection de S_0 dans un ensemble de sommets de même cardinal, et comme il y a $s_0!$ telles bijections :

$\boxed{\text{il y a au plus } s_0! \text{ copies isomorphes à } G_0 : c_0 \leq s_0!}$.

Comme il y a $\binom{n}{s_0}$ choix possibles d'ensemble de sommets pour tout graphe dans $\mathcal{C}_0$, on a donc : $\operatorname{card}(\mathcal{C}_0) \leq \binom{n}{s_0} s_0! = n(n-1)\cdots(n-s_0+1)$ et donc $\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{C}_0) \leq n^{s_0}}$.

19 ▷ On a tout simplement $\boxed{X_n^0 = \sum_{H\in\mathcal{C}_0} X_H}$.

Comme X_H suit une loi de Bernoulli, $\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = \mathbf{P}(H \subset G)$ et donc :

$$\boxed{\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \mathbf{E}(X_H) = \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G)}.$$

On obtient, d'après la question 17 ▷ : $\boxed{\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H\in\mathcal{C}_0} p_n^{a_0} = \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) p_n^{a_0} \leq n^{s_0} p_n^{a_0}}$.

20 ▷ Soit $H_0 \subset G_0$ tel que $\omega_0 = \dfrac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$.

On note aussi $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des copies de H_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1,n]\!]$, et Y_n^0 la variable aléatoire égale au nombre de copies de H_0 contenus dans G

Puisqu'une copie de G_0 donne a fortiori une copie de H_0, on a $X_n^0 \leq Y_n^0$ et donc $\mathbf{E}(X_n^0) \leq \mathbf{E}(Y_n^0)$

D'après les questions 11 ▷ et 19 ▷, $\boxed{\mathbf{P}(X_n^0 > 0) \leq \mathbf{E}(X_n^0) \leq \mathbf{E}(Y_n^0) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}}$.

On a $n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = (n^{\omega_0} p_n)^{a_{H_0}} = \mathrm{o}(1)$ Comme $0 \leq \mathbf{P}(X_n^0 > 0) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}$, il en résulte par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0}$.

21 ▷ D'après la question 19 ▷, $X_n^0 = \sum\limits_{H\in\mathcal{C}_0} X_H$. On a donc :

$$(X_n^0)^2 = \left(\sum_{H\in\mathcal{C}_0} X_H\right)^2 = \left(\sum_{H\in\mathcal{C}_0} X_H\right)\left(\sum_{H'\in\mathcal{C}_0} X_{H'}\right) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} X_H X_{H'}.$$

Donc, $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum\limits_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{E}(X_H X_{H'})$.

Or, $X_H X_{H'}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$\mathbf{P}(X_H = 1, X_{H'} = 1) = \mathbf{P}(H \subset G, H' \subset G) = \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)$ et donc :

$\mathbf{E}(X_H X_{H'}) = \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)$ si bien que : $\boxed{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum\limits_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)}$.

Mais $\mathbf{P}(H \cup H' \subset G) = p_n^{a_{H\cup H'}} = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$ car $a_H = a_{H'} = a_0$ si H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$. Finalement : $\boxed{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum\limits_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$.

22 ▷ Si $s_{H\cap H'} = 0$, les événements $H \subset G$ et $H' \subset G$ sont indépendants

$(\mathbf{P}(H \subset G, H' \subset G) = p_n^{2a_0} = p_n^{a_0} p_n^{a_0} = \mathbf{P}(H \subset G)\mathbf{P}(H' \subset G)$ si H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$ avec $a_{H\cap H'} = 0)$.

On obtient : $\Sigma_0 = \sum\limits_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2 \\ s_{H\cap H'}=0}} \mathbf{P}(H \subset G)\mathbf{P}(H' \subset G)$ et donc :

$$\Sigma_0 \leq \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H \subset G)\mathbf{P}(H' \subset G) = \left(\sum_{H\in\mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G)\right)\left(\sum_{H'\in\mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H' \subset G)\right) \text{ soit}$$

$\boxed{\Sigma_0 \leq \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2}$.

23 ▷ On a $\Sigma_k = \sum\limits_{H\in\mathcal{C}_0} \left(\sum\limits_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbf{P}(H \cup H' \subset G)\right)$.

Or, $\mathbf{P}(H \cup H' \subset G) = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$ car H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$.

Par définition de ω_0, on a $\omega_0 \leq \dfrac{s_{H\cap H'}}{a_{H\cap H'}}$ si H et H' sont dans $\mathcal{C}_0$ avec $a_{H\cap H'} \geq 1$.

On obtient $\mathbf{P}(H \cup H' \subset G) \leq p_n^{2a_0 - \frac{s_{H\cap H'}}{\omega_0}} = p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$ si $s_{H\cap H'} = k$.

Il en résulte que $\Sigma_k \leq \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \left(\sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0^2 \\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \right)$.

Mais, $\operatorname{card}\Big(\big\{H' \in \mathcal{C}_0^2 \mid s_{H\cap H'} = k\big\}\Big) = \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0$.

En effet, on choisit k sommets parmi les s_0 sommets de H pour former l'intersection $H \cap H'$, puis les $n_0 - k$ autres sommets de H' parmi les sommets n'appartenant pas à H et on effectue toutes les copies de G_0 avec les sommets obtenus.

Finalement : $\boxed{\Sigma_k \leq \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}} \leq \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} n_0! p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}}$.

24 ▷ On a $\displaystyle\binom{r}{q} r^{-q} = \frac{r(r-1)\cdots(r-q+1)}{r^q q!} = \frac{1(1-\frac{1}{r})\cdots(1-\frac{q-1}{r})}{q!}$.

Or, si $0 \leq k \leq q-1$, $\displaystyle\frac{k}{r} \leq \frac{q-1}{r} \leq \frac{q-1}{q}$ car $r \geq q$.

On obtient $\boxed{\displaystyle\binom{r}{q} r^{-q} \geq \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q}$.

Notons $\varepsilon_n = n^{-\omega_0} p_n^{-1}$; donc on a $\lim \varepsilon_n = 0$. On a alors :

$0 \leq \Sigma_k \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}_0)\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}} = \operatorname{card}(\mathcal{C}_0)\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}} n^k$.

On obtient : $0 \leq \Sigma_k \leq c_1 \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) p_n^{2a_0} n^{s_0-k} c_0 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega(G_0)}} n^k$ où c_1 est une constante indépendante de n.

On a vu à la question 19 ▷ que $\mathbf{E}(X_n^0) = \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) p_n^{a_0}$.

On obtient : $0 \leq \Sigma_k \leq c_1 \mathbf{E}(X_n^0) p_n^{a_0} n^{s_0} c_0 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega(G_0)}}$.

D'après la question 24 ▷, $n^{s_0} \leq c_2 \binom{n}{s_0}$ où c_2 est une constante. On obtient :

$0 \leq \Sigma_k \leq c_1 c_2 \mathbf{E}(X_n^0) p_n^{a_0} c_0 \binom{n}{s_0} \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega(G_0)}} = c_1 c_2 \mathbf{E}(X_n^0) p_n^{a_0} \operatorname{card}(\mathcal{C}_0) \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}}$ d'après la question 18 ▷.

Et enfin, d'après la question 18 ▷, $0 \leq \Sigma_k \leq c_1 c_2 \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}}$.

Ainsi, $\displaystyle 0 \leq \frac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} \leq c_1 c_2 \varepsilon_n^{\frac{k}{\omega_0}}$ si bien que par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = 0$:

$\boxed{\Sigma_k = \mathrm{o}\Big(\big(\mathbf{E}(X_n^0)\big)^2\Big)}$.

25 ▷ On a $\displaystyle\frac{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = \sum_{k=0}^{a_0} \frac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = \frac{\Sigma_0}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} + \sum_{k=1}^{a_0} \frac{\Sigma_k}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} \leq 1 + \mathrm{o}(1)$ d'après

les questions 22 $\triangleright$ et 24 $\triangleright$.

Il en résulte que $\dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2} = \dfrac{\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right) - \left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2}{\left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2} \leq \mathrm{o}(1)$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2} = 0}$.

26 $\triangleright$ D'après les questions 25 $\triangleright$ et 12 $\triangleright$ et par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 = 0) = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 1}$.

La question 20 $\triangleright$ et l'encadré précédent montrent que :
$\boxed{(k^{-\omega_0})_{k\geq 2} \text{ est une fonction de seuil pour la propriété } \mathcal{P}_n}$.

27 $\triangleright$ Il s'agit tout simplement de déterminer ω_0 où G_0 est une étoile à d branches.

Si un sous-graphe H de G_0 ne contient pas le centre de l'étoile, on a $a_H = 0$ et il est facile de constater que si H contient le centre de l'étoile, $\dfrac{s_H}{a_H}$ est minimum pour $H = G_0$.

Ainsi, $\omega_0 = \dfrac{d+1}{d}$ et :

$(k^{-\frac{d+1}{d}})_{k\geq 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété :
«contenir une copie de l'étoile à d branches».

Remarque : pour $d = 1$, on retrouve bien le résultat de la question 16 $\triangleright$ car un segment est une étoile à une branche.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté $[\![1, n]\!]$.

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $S_n(\mathbf{R})$, resp. $D_n(\mathbf{R})$, resp. $GL_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques, resp. diagonales, resp. inversibles) réelles de taille n, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne ;

— on note $\pi(M)$ le nombre de valeurs propres réelles strictement positives de M comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\pi(I_n) = n$;

— si $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $\operatorname{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $D \in D_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

— si f et g sont deux polynômes non simultanément nuls, on note $f \wedge g$ leur PGCD ;

— si f est un polynôme, on note également f sa fonction polynomiale associée ;

— on note $\sigma(f)$ le nombre de racines réelles de f appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$, comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\sigma(X^2(X-1)(X+1)) = 2$;

— on dit que le réel α est une **racine stable** de f si $\alpha \neq 0$ et $f(\alpha) = f(\alpha^{-1}) = 0$;

— si f est un polynôme de degré $m \in \mathbf{N}$ et s'écrit

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k,$$

on note f_0 son polynôme réciproque, défini par

$$f_0 = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} X^k;$$

— on note $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top$ la matrice colonne de taille n dont le premier coefficient est égal à 1 et les autres à 0 ;

— on note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les $n-1$ coefficients situés juste au-dessus de la diagonale, égaux à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = \delta_{i+1,j} \ \text{(symbole de Kronecker);}$$

— pour tout polynôme réel f on définit la matrice $J(f) \in S_n(\mathbf{R})$ par

$$J(f) = f_0(S)^\top f_0(S) - f(S)^\top f(S).$$

Dans ce problème p désigne un polynôme à coefficients réels, scindé sur $\mathbf{R}$ de degré n,

$$p = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_n \neq 0,$$

et on note $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ ses racines toutes réelles, comptées avec leurs multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir l'égalité $\sigma(p) = \pi(J(p))$ (critère de Schur-Cohn) dans le cas où $J(p)$ est inversible, puis de proposer une démarche générale permettant de compter les racines de p dans $]-1;1[$, lorsque la matrice $J(p)$ n'est pas inversible.

Ces résultats, généralisables aux polynômes à coefficients complexes, sont utiles dans l'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques.

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1 ▷ Montrer que p_0, le polynôme réciproque de p, vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad p_0(x) = x^n p(1/x)$$

et en déduire que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).$$

2 ▷ Montrer que $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Jusqu'à la fin de la partie **A.** on suppose que toutes les racines de p sont stables et d'ordre de multiplicité 1.

3 ▷ Justifier qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

Soit h le polynôme de degré n défini par $h(X) = Xp'$, où p' est le polynôme dérivé de p. On note h_0 et $(p')_0$ les polynômes réciproques respectifs de h et p'.

4 ▷ Montrer que $h = np - \lambda(p')_0$, puis que $h_0 = \lambda(np - Xp')$.

5 ▷ Vérifier que p' est scindé sur $\mathbf{R}$ puis montrer que $h \wedge h_0 = 1$ et en déduire que p' n'admet pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on note f_j le polynôme

$$f_j = a_n(1-\alpha_n X)\cdots(1-\alpha_{j+1}X)(X-\alpha_{j-1})\cdots(X-\alpha_1) = a_n \prod_{k=j+1}^{n}(1-\alpha_k X)\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)$$

avec, selon les conventions habituelles, $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{n}(1-\alpha_k X) = \prod_{k=1}^{0}(X-\alpha_k) = 1.$

6 ▷ Montrer que s'il existe deux entiers i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i\alpha_k = 1$, alors α_i est racine de chaque polynôme f_j, où $j \in [\![1, n]\!]$, et que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Jusqu'à la fin de la partie **B.** on suppose qu'aucune racine de p n'est stable.

On note E le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels dont les éventuels pôles sont des inverses de racines de p (on ne demande pas de justifier que E est un espace vectoriel). Les éléments de E sont donc les fractions rationnelles dont le dénominateur peut s'écrire comme produit fini, éventuellement égal à 1, de facteurs $(1 - \alpha_i X)$ où $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit la fraction rationnelle $g_j \in E$ par

$$g_j = \frac{f_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)}$$

et l'application P_j, qui à une fraction rationnelle $f \in E$ associe la fraction rationnelle

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

7 ▷ Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application P_j est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

8 $\triangleright$ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $g \in E$, calculer $P_j\left(\dfrac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right)$.

9 $\triangleright$ En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 $\triangleright$ Montrer que la famille $((S^\top)^i U)_{0 \le i \le n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Les matrices S et U ont été définies dans la partie préliminaire du problème.

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices

$$B_j = S - \alpha_j I_n \qquad \text{et} \qquad C_j = I_n - \alpha_j\, S.$$

11 $\triangleright$ Démontrer que

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top (C_j^\top C_j - B_j^\top B_j) f_j(S).$$

Les polynômes $f_1, \ldots, f_n$ ont été définis dans le préambule de la partie **B**.

12 $\triangleright$ Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1-\alpha_j^2) U U^\top$.

13 $\triangleright$ On note D la matrice diagonale de taille n :

$$D = \mathrm{Diag}((1-{\alpha_j}^2)_{1 \le j \le n})$$

et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de V est $V_j = f_j(S^\top)\, U$. Montrer que

$$J(p) = V D V^\top.$$

14 $\triangleright$ En déduire, à l'aide de la question 6, que si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\pi(M)$ désigne le cardinal de l'ensemble de ses valeurs propres strictement positives, comptées avec leurs multiplicités.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$ quand

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\} \qquad X^\top M X > 0.$$

On note $d(M)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_M)\}.$$

15 ▷ Soit deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A = P^\top BP$. Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

16 ▷ Pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ construire un sous-espace vectoriel F_M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. On a donc $d(M) \geq \pi(M)$.

17 ▷ On veut montrer que pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ on a $\pi(M) = d(M)$. Par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim G > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, montrer $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$, en déduire une contradiction et conclure.

18 ▷ Démontrer le **critère de Schur-Cohn** :

Si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable et $\sigma(p) = \pi(J(p))$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Montrer, à l'aide des questions 9 et 13, que si p n'admet pas de racine stable et si $J(p)$ n'est pas inversible alors il existe un polynôme q non nul à coefficients réels de degré au plus $n-1$ tel que $q(S^\top)\,U = 0_{n,1}$.

20 ▷ En déduire que la matrice $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

On suppose dans cette partie, comme on l'a fait aux questions 3 à 5, que toutes les racines de p sont stables et de multiplicité 1 et on note $h = Xp'$ (où p' est le polynôme dérivé de p) et h_0 le polynôme réciproque de h. On rappelle que, d'après la question 3, il existe un réel $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

21 ▷ Montrer que $J(h)$ est inversible.

22 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $r \in]1-\eta; 1[$, le polynôme $p(rX)$

est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines à l'intérieur de l'intervalle $]-1;1[$ et ne possède aucune racine stable.

Pour tout réel $r > 0$, on note $F(r) = J(p(rX))$.

23 $\triangleright$ Montrer que

$$\lim_{r\to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \sigma(p).$$

24 $\triangleright$ Justifier que l'application $F : \mathbf{R}_+^* \to S_n(\mathbf{R})$ est dérivable et que

$$F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top (p'(S))^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S)S.$$

25 $\triangleright$ En déduire, à l'aide des résultats de la question 4, que

$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r\to 1}{=} J(h) + o(1).$$

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue.

26 $\triangleright$ En déduire que $\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$.

G. Méthode générale.

On se place dans le cas général, sans disposer d'information sur la stabilité et la multiplicité des racines de p, et on cherche à calculer $\sigma(p)$.

On construit les deux polynômes f et g vérifiant $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 $\triangleright$ Montrer que $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28 $\triangleright$ Proposer une méthode permettant de construire un nombre fini (éventuellement nul) de polynômes $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et de multiplicité 1, tels que $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. Exprimer $\sigma(p)$ à l'aide de $n, \deg g, \pi(J(g)), \ell, \pi(J(g))$ ainsi que $\pi(J(g_1^{'})), \ldots, \pi(J(g_\ell^{'}))$.

Fin du problème