

- XIV. fonctions à valeurs vectorielles
 XV. équations différentielles linéaires
 XVI. calcul différentiel

XIV fonctions à valeurs vectorielles.

1/ Dérivation

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un K -espace vectoriel normé ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On fixe $f: I \rightarrow E$

Définition. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\frac{1}{t-a}(f(t)-f(a))$ admet une limite finie lorsque $t \rightarrow a$ avec $t \neq a$

Cette limite est appelée « vecteur dérivé » de f en a et se note $f'(a)$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On peut considérer pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i(t)$ la i -ème coordonnée de $f(t)$ dans $\mathcal{B}$. On a

$$f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) e_k = \sum_{k=1}^n e_k^*(f(t)) e_k$$

On a aussi: $\tilde{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in K^n$

Prop 1. $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ est dérivable en } a \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, f_k \text{ est dérivable en } a \end{cases}$

De plus $f'(a) = \sum_{k=1}^n f'_k(t) e_k$ et $\tilde{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$

Prop 2. f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un DL $\pm(a)$ en a , i.e. $f(x) \approx_a \alpha + \beta(x-a) + o(x-a) = \alpha + \beta \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$ avec $\|\varepsilon(x)\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Dans ce cas, il y a unicité de α, β et $\alpha = f(a)$, $\beta = f'(a)$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$ et f' est la fonction dérivée définie sur I à valeurs dans E

Appl. Supposons f dérivable sur I . Montrer que f' vérifie le TVI

On introduit $T = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$

T convexe? Soit $(x, y) \in T$, $(x, y), (x', y') \in T$

Soit $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda(x, y) + (1-\lambda)(x', y') \in T$

Alors $\lambda(x, y) + (1-\lambda)(x', y') = (\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y')$

$x' < y' \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)x' < \lambda y + (1-\lambda)y' \Leftrightarrow \lambda(x-y) + (1-\lambda)(x'-y') < 0$

Donc $\lambda(x, y) \in T$.

T est donc convexe, en particulier convexe par arcs.

Soit $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

φ est continue sur T par opérations (f continue et les polynômes à plusieurs variables sont continus, le dénominateur ne s'annule pas)

Ainsi $\varphi(T)$ est convexe par arcs dans $\mathbb{R}$ (donc c'est un intervalle de $\mathbb{R}$)

Par le cours de 1^{ère} année et car f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists c \in]x, y[, \varphi(x, y) = f'(c)$$

Ainsi $\varphi(T) \subseteq f'(I)$

Montrons que $f'(I) \subseteq \varphi(T)$ (cela suffit)

Soit $\alpha \in f'(I)$, il existe $a \in I$ tel que $\alpha = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(a, x)$

En particulier $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a, a + \frac{1}{n}) \in \varphi(T)$

d'où le résultat

Soit $I =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = x^2 \exp(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$

Soit $x \neq 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = x e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ au module}$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

De plus f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I , soit par opérations et $f'(x) = 2xe - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$f'(I) = f'(I \setminus \{0\}) \cup \{f'(0)\} = f'(I \setminus \{0\}) \cup \{0\}$

$$|f'(x)| = |2xe - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}| \geq |1 - 12x| \geq 1 - 12|x| \geq \frac{1}{2}$$

donc $f'(I \setminus \{0\}) \subseteq B_0(0, \frac{1}{2})^c = \mathbb{C} \setminus B_0(0, \frac{1}{2})$

Montrons par l'absurde que $f'(I)$ n'est pas convexe par arcs.

$0 \in f'(I)$ et $f'(t_0) \in f'(I \setminus \{0\}) \subseteq f'(I)$

Si $f'(I)$ est convexe par arcs, il existe $\gamma: [0, 1] \rightarrow f'(I)$

continue tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = f'(t_0)$

$|x|$ est continue par composition et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par le TVI, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $|x(t_0)| = 1/4$

absurde car $|x(t_0)| = 0$ et $|x(t_0)| \geq 1/2$

Soit $a < b$.

Soit $f: [a, b] \rightarrow E$ une K -ev euclidien continue sur $[a, b]$, dér.

sur $]a, b[$

Tq: $\exists c \in]a, b[: \|f(b) - f(a)\| \leq (b-a) \|f'(c)\|$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E . Soit $t \in [a, b]$, alors

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i \text{ où } f_i(t) = \langle f(t), e_i \rangle, f_i \text{ dérivable sur }]a, b[$$

Soit $g(t) = \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle$

$$= \langle \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i, f(b) - f(a) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n f_i(t) \langle e_i, f(b) - f(a) \rangle$$

g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

De plus, g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc on applique l'égalité des accroissements finis, d'où $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} (\langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle)$$

$$= \frac{\|f(b)-f(a)\|^2}{b-a}$$

$$g'(c) = \sum_{i=1}^n f'_i(c) \langle e_i, f(b) - f(a) \rangle = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle$$

$$\text{donc } \|f(b) - f(a)\| \cdot (b-a) < \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle$$

$$\leq (b-a) \|f'(c)\| \cdot \|f(b) - f(a)\|$$

Si $f(a) = f(b)$, c'est évident

$$\text{Si } f(a) \neq f(b), \underbrace{\|f(b) - f(a)\|}_{>0} \leq (b-a) \|f'(c)\|$$

On peut aussi définir la dérivabilité à gauche / à droite en un point

Opérations sur les fonctions dérivables sur I

$\lambda f + \mu g$, ($\lambda, \mu \in K$, combinaison linéaire)

et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

$\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimension finie

$f \in \mathcal{F}(I, E)$ avec f dérivable sur I .

Alors $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur I et $\mathcal{L}(f)' = \mathcal{L}(f')$

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables à valeurs dans une K -algèbre (commutative) de dimension finie et

$$(f_1 \dots f_n)' = \sum_{i=1}^n f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n$$

Soit $\mathcal{B}: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire avec E, F, G de dimension finie,

$f: I \rightarrow E, g: I \rightarrow F$ dérivables sur I

Alors $\mathcal{B}(f, g)$ est dérivable et $\mathcal{B}(f, g)' = \mathcal{B}(f', g) + \mathcal{B}(f, g')$

Soit $\mathcal{U}: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ n -linéaire,

$f_1: I \rightarrow E_1, \dots, f_n: I \rightarrow E_n$ dérivables sur I

Alors $\mathcal{U}(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable et:

$$\mathcal{U}(f_1, \dots, f_n)' = \sum_{i=1}^n \mathcal{U}(f_1, \dots, f_{i-1}', \dots, f_n)$$

Si f est une fonction à 2 variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

et $\varphi: I \rightarrow \Omega$ est dérivable sur I

$t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

Par le cours de MP21, on peut dire que $t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ notée $f \circ \varphi$ est dérivable sur I , et

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi_1'(t) \partial_1 f(\varphi(t)) + \varphi_2'(t) \partial_2 f(\varphi(t))$$

Cas de $\mathcal{L}(f)$: $\varepsilon(h)h$ où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

f éval en a

$$\mathcal{L}(f(a+h)) = \mathcal{L}(f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h)$$

$$= \mathcal{L}(f(a)) + \mathcal{L}(f'(a)h) + \mathcal{L}(\varepsilon(h)h)$$

donc $\mathcal{L}(f)$ admet un d.l d'ordre 1 en $a \rightarrow 0$ par continuité

donc $\mathcal{L}(f)$ est dérivable en a et

$$\mathcal{L}(f)'|_a = \mathcal{L}(f'(a)) \text{ d'où } \mathcal{L}(f)' = \mathcal{L}(f')$$

Cas multilinéaire:

$$\text{Soit } k \in \{1, \dots, n\}. f_k(a+h) = f_k(a) + f'_k(a)h + o(h)$$

$$\mathcal{U}(f_1(a+h), \dots, f_n(a+h)) = \mathcal{U}(f_1(a) + f'_1(a)h + \varepsilon_1(h)h, \dots, f_n(a) + f'_n(a)h + \varepsilon_n(h)h)$$

$$= \mathcal{U}(f_1(a), \dots, f_n(a)) + \sum_{k=1}^n \mathcal{U}(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), f'_k(a)h, f_{k+1}(a), \dots, f_n(a)) + o(h)$$

$$+ h(\mathcal{U}(\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \mathcal{U}(\alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) + \dots + \mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_n))$$

$$+ h(\mathcal{U}(\varepsilon_1(h), \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \mathcal{U}(\alpha_1, \varepsilon_2(h), \alpha_3, \dots, \alpha_n) + \dots + \mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \varepsilon_n(h)))$$

+ $o(h)$

$$\text{Par continuité: } \mathcal{U}(f_1(a+h), \dots, f_n(a+h)) = \mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + h \sum_{i=1}^n \mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_n) + o(h)$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $f: I \rightarrow E$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$

sur I si il existe une suite de fonctions $(\varphi_0, \dots, \varphi_k)$ dérivables

sur I et φ_k continue sur I telle que

$$f = \varphi_0, \varphi_0' = \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}' = \varphi_k$$

Dans ce cas, $f^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_k$ et on a tous les résultats de PP11 encore valables

Au programme: Formule de Leibniz

$$\mathcal{B}(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

Théorèmes Limite de la Dérivée:

Version « seulement dérivable »

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \text{ii) } f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ \text{iii) } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est dérivable sur } [a, b] \text{ et } f'(a) = l$$

Version $\mathcal{C}^1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \text{ii) } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]a, b[\\ \text{iii) } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b] \text{ et } f'(a) = l$$

Version $\mathcal{C}^k$

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } f \text{ continue sur } [a, b] \\ \text{ii) } f \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur }]a, b[\\ \text{iii) } \forall p \in [0, k], f^{(p)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_p \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } [a, b] \text{ et } \forall p \in [0, k], f^{(p)}(a) = l_p$$

Application: Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

et soit $B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

On a: $\forall \theta \in \mathbb{R}, A(\theta) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $B(\theta) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

A, B sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car $\theta \mapsto A(\theta)$, $\theta \mapsto B(\theta)$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$

$$A'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}, A^{(n)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{n\pi}{2}) & -\sin(\theta + \frac{n\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{n\pi}{2}) & \cos(\theta + \frac{n\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

donc pour $B^{(n)}(\theta)$

$$\text{Rq: } A(\theta)A'(\theta) = A'(\theta)A(\theta) \text{ mais } B(\theta)B'(\theta) \neq B'(\theta)B(\theta)$$

Soit $\varphi: t \mapsto \|f(t)\|^2$. Alors φ est dérivable par opérations (le produit scalaire est bilinéaire et $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$)

$$\varphi'(t) = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle = 2\langle f'(t), f(t) \rangle$$

Si $f(t) \neq 0 \forall t \in I$, Alors $\varphi: t \mapsto \|f(t)\|^2$ est dérivable et

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(\sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}) = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle}{\sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}} = \frac{2\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}$$

Si $\|f(t)\| = C$:

$$\|f(t)\|^2 = C^2 \text{ et } \langle f'(t), f(t) \rangle = 0 \text{ d'où } f(t) \perp f'(t)$$

Soit $\pi: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application dérivable sur I .

$t \mapsto \pi(t)^T$ est dérivable ($\cdot^T$ est linéaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sur I et

$$(t \mapsto \pi(t)^T)' = t \mapsto (\pi(t)')^T$$

$$t \mapsto \det(\pi(t)) \text{? Soit } t \in I, \pi(t) = [C_1(t) | \dots | C_n(t)]$$

$$C_j \text{ est dérivable sur } I \text{ car } (C_j(t))_i = \pi(t)_{ij}$$

$\det_{\mathbb{C}}$ est multilinéaire par rapport aux $C_1, \dots, C_n$

donc $\det(\pi) = \det_{\mathbb{C}}(C_1, \dots, C_n)$ est dérivable et

$$(\det(\pi))'(t) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathbb{C}}(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n)$$

EXPONENTIELLE MATRICIELLE

def. Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 1$. On définit

$$\exp(tA) \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

Cette série entière est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$ car

$$\left\| \frac{A^k}{k!} t^k \right\| = \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \leq \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = \frac{(\|t\| \|A\|)^k}{k!}$$

Idem pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(tf) \stackrel{\text{DEF}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!} t^k$

prop. Si $A = PBP^{-1}$, Alors $A^k = PB^kP^{-1}$, d'où $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$

prop. Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$

avec:

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \ddots \\ (0) & \ddots & \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & (0) \\ (0) & \ddots \\ (0) & \ddots & e^{\lambda_m} \end{pmatrix} \text{ si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \ddots \\ (0) & \ddots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

rem. Si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = \{\lambda'_1, \dots, \lambda'_r\}$ avec les λ'_i 2 à 2 $\neq$

Par la théorie de l'interpolation (cf. polynômes de Lagrange)

il existe $Q \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ tel que $\forall i \in [1, r], Q(\lambda'_i) = e^{\lambda'_i}$

donc, $\forall j \in [1, m], Q(\lambda_j) = e^{\lambda_j}$

$$\text{d'où } Q(D) = \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & (0) \\ (0) & \ddots \\ (0) & \ddots & Q(\lambda_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & (0) \\ (0) & \ddots \\ (0) & \ddots & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } Q(A) = PQ(D)P^{-1} = \exp(A)$$

⚠ Les coefficients de Q dépendent des λ_i donc de A

(cas diagonalisable) prop. Il existe $Q_A \in \mathbb{C}_{r-1}[X] \subseteq \mathbb{C}_m[X]$ tel que $\exp(A) = Q_A(A)$

prop. $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$

preuve par trigonalisation

prop. $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$

preuve. $\exp(A)$ est une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$

$\Rightarrow$ Assure la convergence normale puis la continuité.

prop. $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et sa dérivée est $t \mapsto A \exp(tA)$

preuve. $\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$ est une série entière en t dont le rayon de convergence vaut $+\infty$. Donc $t \mapsto \exp(tA)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$\text{De plus } \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

$$= A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = A \exp(tA)$$

prop. Si $[A, B] = 0$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$

Soit E un K -ev. de dimension finie.
Soit $I = [a, b]$ avec $a < b$. Soit $f: I \rightarrow E$

On définit $f \in \mathcal{E}_{pm}^6$, $\int_a^b f(t) dt$ etc. comme au TP21

Linéarité: Si $\mathcal{L}: E \rightarrow F$ est linéaire:

$$\mathcal{L}\left(\int_a^b f(t) dt\right) = \int_a^b \mathcal{L} \circ f(t) dt$$

Relation de Charles:

$$\sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t) dt = \int_{a_0}^{a_n} f(t) dt$$

Inégalité triangulaire:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Le théorème sur les sommes de Riemann est encore valable:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Théorème Fondamental de l'Analyse: Si f est continue sur I et si $a \in I$, Alors

$$F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est dérivable et } F'(x) = f(x)$$

Rq: F est la « primitive de f qui s'annule en a »

Théorème des Accroissements Finis: Si f est $\mathcal{C}^1$ sur I un intervalle

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(a + t(b-a)) dt \times (b-a)$$

Si $\|f'\|$ est majorée par M sur I , Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M|b-a|$$

Toutes les formules de Taylor sont encore valables

Appli. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$

1. Montrer que $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \in \overline{\text{Conv}(f'([a, b]))}$

$$f(x(1)) - f(x(0)) = \int_0^1 f'(x(t)) x'(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma f'$$

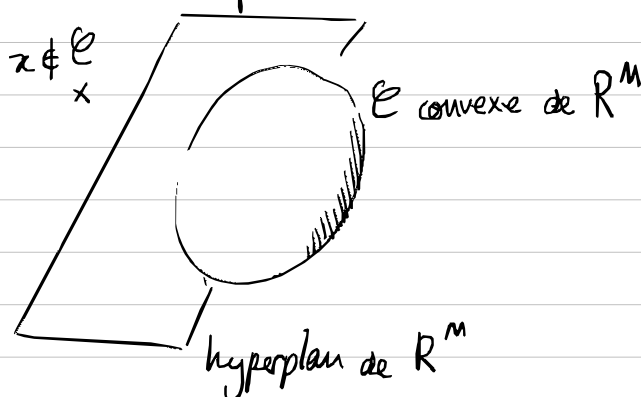
$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b-a} &= \int_0^1 f'(x(t)) dt \text{ avec } x(t) = a + t(b-a) \\ &= (1-t)a + tb \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

On pose $\lambda_i = \frac{1}{n}$ de sorte que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$
 $\in [0, 1]$

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'\left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{\in \text{Conv}(f'([a, b]))} = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{\rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a}} + \underbrace{\frac{1}{n} f'(x(1))}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{n} f'(x(0))}_{\rightarrow 0}$$

d'où $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \in \overline{\text{Conv}(f'([a, b]))}$

2. Théorème de Séparation des Convexes



Soit E un convexe de $\mathbb{R}^m$. Soit $x \in E \setminus E$

Alors il existe $\varphi \in (\mathbb{R}^m)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(x_0) < \lambda_0 \text{ et } \forall x \in E, \varphi(x) > \lambda_0$$

i.e. l'hyperplan affine qui sépare l'espace en deux demi-espaces a pour équation $\varphi(x) = \lambda_0$

Soit $\varphi \in (\mathbb{R}^m)^*$

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dérivable sur $[a, b]$. Soit $g = \varphi \circ f$. Alors g est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $g' = \varphi \circ f'$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b-a} = \varphi\left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right) = \varphi(x_0) \text{ avec } x_0 = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

On pose $\mathcal{C} = \overline{\text{Conv}(f'([a, b]))}$. $\mathcal{C}$ est convexe et fermé

Supposons que $x_0 \notin \mathcal{C}$.

Par le théorème, $\varphi \in (\mathbb{R}^m)^*$ vérifie: $\varphi(x_0) < \lambda_0$ et $\forall x \in \mathcal{C}, \varphi(x) > \lambda_0$.

donc $\frac{g(b) - g(a)}{b-a} < \lambda_0$. g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

Par THAF dans $\mathbb{R}$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$

Or $g'(c) = \varphi \circ \underbrace{f'(c)}_{\in \mathcal{C}} > \lambda_0$ d'où une contradiction et $x_0 \in \mathcal{C}$

Equations Differentielles Lineaires

Cadre: $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K -ev de dimension finie.
 I un intervalle de $\mathbb{R}$
 Soit $a: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$
 $b: I \rightarrow E$
 $t \mapsto b(t)$ continue

Une equation differentielle lineaire est de la forme

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \text{ avec } x: I \rightarrow E \text{ derivable et } a(t) \cdot x \text{ et } a(t) \cdot x'(t) \text{ (} x(t) \text{)}$$

ex3. Exemple d'equation differentielle lineaire (EDL) scalaire d'ordre 2 homogene non resolue en y' sur $\mathbb{R}$: $(1+\sin(t))y' - \cos(t)y = 0$

sur un intervalle I sur lequel $1+\sin(t)$ ne s'annule pas, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_I$ est une droite vectorielle.

$$1+\sin(t) = 0 \text{ equivalent a } t \in \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

On pose donc $I_k =]\frac{3\pi}{2} - 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2(k+1)\pi[$ et on fixe $k \in \mathbb{Z}$.
 On resout sur I_k :

$$(E) \Leftrightarrow y' - a(t)y = 0 \text{ avec } a(t) = \frac{\cos t}{1+\sin t}$$

Une primitive de a sur I_k est A avec $A(t) = \ln(1+\sin(t)) + C_k$

$$\text{d'où } \mathcal{S}_{I_k} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{A(t)}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto 1+\sin(t))$$

Probleme de raccordement pour $\mathcal{S}_I$ avec I maximal.

$$\text{Soit } k \in \mathbb{Z} \quad I_{k-1} =]\frac{3\pi}{2} - 2(k-1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[\\ I_k =]\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2(k+1)\pi[$$

Etude au $t_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ du raccordement de

$$y_{k-1}(t) = \sqrt{k-1} \cdot (1+\sin t), \quad y_k(t) = \sqrt{k} \cdot (1+\sin t)$$

Analyse: y_{k-1} prolongeable par continuite en t_k ? idem pour y_k ?

Si c'est le cas, on a continuite et derivabilite de la prolonge.

$$\lim_{t \rightarrow t_k} (y_{k-1}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_k} (\sqrt{k-1} \cdot (1+\sin t)) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_k} (y_k(t)) = \lim_{t \rightarrow t_k} (\sqrt{k} \cdot (1+\sin t)) = 0$$

$$\text{On pose donc } y(t) = \begin{cases} y_{k-1}(t) & \text{si } t \in I_{k-1} \\ 0 & \text{si } t = t_k \\ y_k(t) & \text{si } t \in I_k \end{cases}$$

Derivabilite de y en t_k : y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_{k-1} et sur I_k

donc sur $I_{k-1} \cup \{t_k\} \cup I_k = I_{k-1} \cup I_k \cup \{t_k\} = I_k$

$$y \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I_k \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_k} y'(t) = \lim_{t \rightarrow t_k} y'(t) = \lim_{t \rightarrow t_k} \sqrt{k-1} \cos(t) = 0$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow t_k} y'(t) = \lim_{t \rightarrow t_k} \sqrt{k} \cos(t) = 0$$

Par le theoreme « limite de la derivee », y est $\mathcal{C}^1$ sur I_k .

Synthese: Sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \begin{cases} \sqrt{k} \cdot (1+\sin t) & \text{si } t \in I_k \\ 0 & \text{si } t = t_k \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2. Resoudre: $(t^2+t)y'' + (t-1)y' - y = 0$ sur I maximal.

EDL d'ordre 2 homogene a coefficients non constants non resolue en y' .

$$t^2+t=0 \text{ equivalent a } t \in \{0, -1\}$$

Soit I un intervalle tel que $\{0, -1\} \cap I = \emptyset$

Sur I , on verra que l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des solutions est un plan vectoriel (cf theoreme de Cauchy - lineaire)

Methode de resolution de Liouville

On cherche une solution particuliere

On la cherche polynomiale.

Analyse: P solution de E avec $P \neq 0$ de degre n

$$P(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[t] \text{ avec } a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Par unicite du coefficient dominant: $n(n-1)a_n + n a_{n-1} - a_n = 0$

avec $a_n \neq 0$ donc $n-1$

Synthese: On cherche P sous la forme $X + \alpha$

$$P \text{ solution de } (E) \text{ si } (t^2+t) \cdot 0 + (t-1) \cdot 1 - t - \alpha = 0$$

$$\text{Donc } t \mapsto t-1 \text{ est solution.}$$

On cherche la solution y generale sous la forme

$$y(t) = (t-1) \cdot z(t) \text{ avec } z \text{ deux fois derivable sur } I.$$

et on va trouver une EDL en z

z est derivable par produit et

$$y'(t) = (t-1)z'(t) + z(t)$$

$$y''(t) = (t-1)z''(t) + 2z'(t)$$

y est solution de E sur I ssi

$$(t^2+t)((t-1)z''(t) + 2z'(t)) + (t-1)((t-1)z'(t) + z(t)) - (t-1)z(t) = 0$$

$$\text{ssi } (t^2+t)(t-1)z''(t) + (2t^2+t-1)z'(t) + (t-1)z(t) = 0$$

$$\text{ssi } (t^2+t)(t-1)z''(t) + (2t^2+t-1)z'(t) + (t-1)z(t) = 0, \quad z = z'$$

$$\text{ssi } t(t^2-1)z'(t) + (3t^2-1)z(t) = 0 \quad (E')$$

On se place sur $J \subseteq I$ tel que $J \cap \{-1, 0, 1\} = \emptyset$

$$z'(t) = \frac{3t^2+1}{t(t^2-1)} z(t) \text{ avec } a(t) = \frac{3t^2+1}{t(t^2-1)} = \frac{3}{t-1} + \frac{1}{t+1}$$

$$\text{d'où } z(t) = K \frac{|t|}{(t-1)^2(t+1)^2} = K \frac{|t|}{(t^2-1)^2}$$

Sur J : $|t| = t$ ou $-t$. Quitte a poser $\tilde{K} = K$ ou $\tilde{K} = -K$,

tout entier!! On a: $z(t) = K \frac{t}{(t^2-1)^2}$

$$\text{i.e. } z'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{K_1}{t^2-1} \right) \text{ d'où } z(t) = \frac{K_1}{t^2-1} + K_2$$

$$\text{Sur } J: \mathcal{S}_J = \left\{ t \mapsto \frac{K_1}{t^2-1} + K_2(t-1) \mid K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(t \mapsto \frac{1}{t^2-1}, t \mapsto t-1 \right)$$

Recollement: En fait, $t \mapsto \frac{N}{t+1} + \mu(t-1)$ est derivable sur

$$J' = I \setminus \{-1\}$$

$$\text{Recollement en } -1: \frac{1}{t+1} \xrightarrow{t \rightarrow -1^+} +\infty$$

$$\frac{1}{t+1} \text{ a une limite finie en } -1^+ \text{ssi } A=0$$

$$\text{Donc } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto t-1)$$

3) Resoudre: $y'' - xy = 0$ sur I maximal. (E)

Analyse: Supposons que (E) posside une solution y developpable en serie entiere avec un rayon de convergence $\rho > 0$

$$\text{Soit } y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \rho > 0$$

$$\text{Sur }]-\rho, \rho[; y \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ et } y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

y solution de (E) sur $]-\rho, \rho[$ ssi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$a_2 x^2 + \dots = 0 \text{ (par unicite des coefficients sur } I \neq \emptyset)$$

$$\text{et } \forall n \geq 1, a_{n+2} (n+2)(n+1) = a_{n-1}$$

$$\text{Ainsi: } \begin{cases} a_2 = 0 \\ \forall n \geq 1, a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} (*)$$

Synthese: On cherche deux solutions lineairement independantes y_1, y_2

Prevenons $a_0 = 1, a_1 = 0$, de sorte que $a_2 = 0$ et (a_n) donnee par (*).

Cela donne: $y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On veut determiner son rayon de convergence ρ_1 .

Par recurrence, tous les termes d'indices $3m+1, 3m+2$ valent 0.

En revanche, les termes en $3m$ sont tous $\neq 0$.

$$\text{Ainsi } y_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{3m} x^{3m}$$

Si $x=0$: sa convergence

$$\text{Si } x \neq 0: \text{ on pose } a_m(x) = a_{3m} x^{3m}$$

$$\left| \frac{a_{m+1}(x)}{a_m(x)} \right| = \frac{a_{3m+3} x^{3m+3}}{a_{3m} x^{3m}} = \frac{x^3}{(3m+3)(3m+2)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Par la regle de d'Alembert sur les series, $\sum a_{3m} x^{3m}$ converge.

Donc $\rho_1 = +\infty$ et y_1 solution sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Idem avec } \hat{a}_0 = 0, \hat{a}_1 = 1, \hat{a}_2 = 0: y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n+1} x^{3n+1}$$

Par le theoreme de Cauchy lineaire, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est un plan vectoriel. Reste a

voir que (y_1, y_2) est libre pour en deduire que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(y_1, y_2)$

$$\text{Soit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$$

$$\text{Pour } x=0: \alpha_1 + 0 = 0$$

$$\text{Et } \alpha_1 y_1'(0) + \alpha_2 y_2'(0) = 0 \text{ donc } \alpha_1 \hat{a}_1 + \alpha_2 \hat{a}_2 = 0 \text{ d'où } \alpha_2 = 0$$

Fin des applications.

$$\text{Soit } A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$$

$$\text{Soit } B: I \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$$

$$\text{On note } (E) \text{ l'equation } x' = A(t)x + B(t)$$

Rem: On parle de systeme differentiel lineaire. On conserve le vocabulaire

(homogene, homogene associee, principe de superposition, probleme de Cauchy...)

prop 1 (Règle de dérivation intégrale d'un problème de Cauchy)

$$\Uparrow \varphi \text{ est solution de } (E) \text{ avec } \varphi(t_0) = x_0$$

$$\Downarrow \varphi \text{ est continue sur } I \text{ et } \forall t \in I, \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^t b(s)ds$$

preuve $\Rightarrow$ derivable implique continue

$$\text{On pose } \tilde{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^t b(s)ds$$

$$\tilde{\varphi} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ (operateurs)} \text{ et } \tilde{\varphi}'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

$$\text{d'où } \tilde{\varphi}' = \varphi' \text{ donc } \tilde{\varphi} = \varphi + A \text{ avec } A \in \mathbb{R} \text{ sur } I$$

$$\text{De plus } \tilde{\varphi}(t_0) = x_0 = \varphi(t_0) \text{ d'où } \tilde{\varphi} = \varphi \text{ sur } I$$

$$\Leftarrow \text{On a } \varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ par operations et on verifie que } \varphi' = a(t)\varphi + b(t) \text{ et } \varphi(t_0) = x_0. \square$$

Représentation d'une equation differentielle scalaire d'ordre n

$$\text{On se donne } a_0, \dots, a_{n-1}: I \rightarrow \mathcal{L}(E) \text{ et } b: I \rightarrow K$$

Une equation differentielle lineaire scalaire est de la forme

$$(E_n): x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} + b(t)$$

$$\text{En tant que systeme differentiel lineaire, on pose } X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

x est solution de $(E_n) \Leftrightarrow X$ derivable sur I et:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$$

Rq Ça marche en remplaçant K par E tant que $\dim E < \infty$

Structure de l'ensemble des solutions

Thm 2 (Theoreme de Cauchy - lineaire)

1) Soit $(E): x' = a(t) \cdot x + b(t)$ avec a, b continus sur I .

$$\text{Soit } x_0 \in E, t_0 \in I$$

Il existe une unique solution φ de (E) tel que $\varphi(t_0) = x_0$.

2) Idem pour la forme matricielle.

$$3) \text{ Soit } (E_n): x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \cdot x^{(k)}(t) + b(t) \text{ avec } a_0, \dots, a_{n-1}, b \text{ continus}$$

$$\text{sur } I \text{ a valeurs dans } K. \text{ Soit } t_0 \in I$$

$$\text{Soit } x_0, \dots, x_{n-1} \in K. \text{ Soit } t_0 \in I$$

$$\text{Il existe une unique solution } \varphi \text{ de } (E_n) \text{ tel que } \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \varphi(t_0) = x_k$$

preuve vu plus tard

Cor Si on note $\mathcal{Y}_{(E)}$ l'espace vectoriel des solutions de l'equation homogene associee

$$\text{a } (E) \text{ Alors } \mathcal{Y}_{(E)} \xrightarrow{x \mapsto x(t_0)} E \text{ est un isomorphisme}$$

$$\text{En particulier } \dim \mathcal{Y}_{(E)} = \dim E$$

Une base de $\mathcal{Y}_{(E)}$ est appelee un « systeme fondamental de solutions de $(E_{(n)})$ »

exple $x'' + \omega^2 x = 0$: $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ est un systeme fondamental de solutions

Dans le cas general, l'ensemble $\mathcal{Y}$ des solutions est un sous-espace affine

de dimension n , de direction $\mathcal{Y}_{(E)}$, et passant par une solution particuliere φ_p

$$\text{i.e. } \mathcal{Y} = \varphi_p + \mathcal{Y}_{(E)}$$

$$\text{Le cas homogene a coefficients constants revient a } \begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On a une matrice solution:

$$R \mapsto \mathcal{M}_n(K)$$

$$\text{Soit } \varphi: t \mapsto \exp(tA). \text{ On voit que } \varphi \text{ est derivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi'(t) = A\varphi(t)$$

$$\text{avec } \varphi(0) = I_n$$

φ est solution « matrice carre » avec une condition initiale modifiee:

$$\text{Si on pose } X(t) = \exp(tA) X_0, \text{ on a } X'(t) = A \exp(tA) X_0 = A X(t) \text{ et } X(0) = X_0$$

Pour le meme probleme avec $X(t_0) = X_0$, l'unique solution est alors

$$\exp((t-t_0)A) X_0$$

Cas particulier de l'ordre 2

$$\text{Soit } (E_2): x'' = A(t)x \text{ avec } x \in \mathcal{M}_{2,1}(K) \text{ et } A(t) \in \mathcal{M}_2(K)$$

Soit (φ_1, φ_2) un systeme fondamental de solutions.

On definit la courbure de ce systeme par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \omega(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{pmatrix}} \quad \left. \begin{matrix} \text{Analogie de l'alternant} \\ \text{de l'alternant} \end{matrix} \right\}$$

On a ω derivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \omega'(t) = \varphi_1'(t)\varphi_2'(t) + \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t)$$

$$\text{On suppose que } (E_2) \text{ correspond a } x'' = a_2(t)x(t) + a_1(t)x'(t)$$

$$\text{et } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2(t) & a_1(t) \end{bmatrix} \text{ d'où } \varphi_1'(t) = a_2(t)\varphi_1(t) + a_1(t)\varphi_1'(t)$$

$$\varphi_2''(t) = a_2(t)\varphi_2(t) + a_1(t)\varphi_2'(t)$$

Calcul différentiel et Optimisation

I/ Fonctions différentiable (difféable) et fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev normé de dimension finie $m \geq 2$

Soit Ω un ouvert de E , soit F un $\mathbb{R}$ -ev normé de dimension finie n .

On étudie $f: \Omega \rightarrow F$ une fonction définie sur Ω .

rem Les notions de limite, de continuité, de négativité et d'équivalence ne dépendent pas du choix de la $\|\cdot\|$ ou la $\|\cdot\|$.
La divergence sera étudiée beaucoup plus fréquente qu'à une variable.
On peut faire toute sorte de développements asymétriques à n variables à partir de ceux à une variable.

exple Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$. Dls de f_A en 0

$$f_A(h) = (A+h)^3 = A^3 + 3A^2h + 3A(Ah) + (Ah)^2 + 3A(A^2h) + 3A(Ah)^2 + (Ah)^3$$

$$= A^3 + \underbrace{3A^2h + 3A(Ah)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{(Ah)^2 + 3A(A^2h) + 3A(Ah)^2}_{\text{ordre 2}} + o(\|h\|^3)$$

def Soit $a \in \Omega$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe $\mathcal{D}f_a \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = \mathcal{D}f_a(h) + o(\|h\|)$$

On peut vérifier qu'un tel DL est unique, et donc que $\mathcal{D}f_a$ est unique et on le note $df(a)$. On l'appelle la différentielle de f en a .

rem $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire. On note alors $df(a) \cdot h$ au lieu de $df(a)(h)$.

rem Si f est différentiable en a , on a: $f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|)$

def Soit v un vecteur non nul de E . On dit que f admet une dérivée en a selon v si $\gamma: t \mapsto a + tv$ est dérivable en 0.
Dans ce cas, $\gamma'(0)$ se note $D_v f$ si $f \in F$. On a alors

$$f(a + t\gamma'(0)) = f(a) + t D_v f + o(t)$$

rem Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On peut confondre:

$$f: \Omega \subseteq E \rightarrow F \quad \text{et} \quad \tilde{f}: \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow F \quad \text{avec} \quad \tilde{\Omega} = \{x_1, \dots, x_n\} \mapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$$

def La n -ème dérivée partielle de f en a existe si $D_{e_i} f$ existe. On la note alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$.

prop 1 Si f est différentiable en a , alors:

- (i) f est continue en a .
- (ii) $\forall v \in E, \exists \gamma$, $D_v f(a)$ existe et $D_v f(a) = df(a) \cdot v$.
- (iii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a) \cdot e_i$.

De plus $df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \cdot e_i$

prop 2 Soit $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = a$.

Si f est différentiable en a , alors

$$f \circ \gamma \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } (f \circ \gamma)'(0) = df(a) \cdot \gamma'(0)$$

prop 3 Soit $f_1, \dots, f_p$ définies sur Ω à valeurs dans $F_1, \dots, F_p$ respectivement.
Soit $f: \Omega \rightarrow F$ avec $F = F_1 \times \dots \times F_p$.
Alors f est différentiable en a si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, f_i est différentiable en a et dans ce cas:

$$df(a) \cdot h = (df_1(a) \cdot h_1, \dots, df_p(a) \cdot h_p)$$

preuve Par unicité du DL.

appl 1 Soit $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$

• $f(0,0) = 0$

• $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) = \frac{1}{n^2 m^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{m^2} \rightarrow 0$ alors que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \rightarrow (0,0)$

Donc f n'est pas continue en 0.

Si $\gamma: t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, soit $t \rightarrow 0$

$$f(\gamma(t)) = f(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}) = \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow 0$$

Donc $D_{\gamma'(0)} f$ existe et vaut b/a si $a \neq 0$, b si $a = 0$.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ existent mais ne sont pas continus.

appl 2 Soit $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f différentiable en $(0,0)$?

Soit $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = r^2 (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) = C(\theta) \cdot r^2$$

d'où $f(x,y) = C(\theta) \cdot r^2$ et $C(\theta) = \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)$

$$\text{donc } f(x,y) = \|x\|_2^2 C(\theta) \text{ avec } \theta = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2} \rightarrow 0$$

Encore mieux avec $\varepsilon(0,0) = 0$ bien que $\varepsilon(x,y) \rightarrow 0$ si $(x,y) \rightarrow (0,0)$

Ainsi f est différentiable en $(0,0)$ et $df(0) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

appl 3 Soit $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f continue en $(0,0)$? En polaire:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r^2 \cdot 1 = r^2 \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow 0$$

Or $f(0,0) = 0$, d'où f continue en 0.

f non différentiable en 0? Raisonnons par l'absurde. Si f était différentiable en 0, alors toutes les dérivées directionnelles en (0) existeraient.

$$\text{Soit alors } \gamma = (\cos(\theta), \sin(\theta)). \text{ Alors } D_{\gamma} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(\theta) t^2}{t} = C(\theta) t \rightarrow 0$$

$$\text{d'où } D_{\gamma} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} C(\theta) t^2 = C(\theta) t \rightarrow 0$$

De plus $D_{\gamma} f(0) = df(0) \cdot \gamma$ avec $df(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$$= (\alpha \beta) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ indépendants de } \theta$$

On a donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall \theta \in \mathbb{R}, C(\theta) = \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta)$

- $\theta = \pi/2$: $1 = \beta$

- $\theta = \pi/2$ dans la dérivée membre/membre: $0 = \beta$ contradiction

Ainsi f n'est pas différentiable en 0.

appl 4 Soit $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Différentiable en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\phi_p(A+H) = (A+H)^p = \prod_{i=1}^p (A + H) = \prod_{i=1}^p (A^{i-1} H + I) = \prod_{i=1}^p (I + A^{i-1} H)$$

On $\|A^{i-1} H\| \leq \|A\|^{i-1} \|H\| \leq \|A\|^{i-1} \|H\|$ Binôme de Newton / Version non commutative

$$= \|A\|^{i-1} \frac{\varepsilon^i}{i!} \|H\|^i \leq \frac{\|A\|^{i-1} \varepsilon^i}{i!} \|H\|^i$$

$$\text{donc } A^{i-1} H^i \leq \frac{\|A\|^{i-1} \varepsilon^i}{i!} \|H\|^i$$

$$\text{d'où } (A+H)^p = A^p + \sum_{i=1}^p A^{i-1} H + \frac{\varepsilon^2}{2} A^{i-1} H^2 + \dots + A^{i-1} H^i$$

$$= (A + \sum_{i=1}^p A^{i-1} H A^{i-1}) + o(H) \text{ lorsque } H \rightarrow 0$$

$$= \mathcal{D}_A(H) \text{ avec } \mathcal{D}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

donc ϕ est différentiable en A et $d\phi(A) \cdot H = \sum_{i=1}^p A^{i-1} H A^{i-1}$

$$\text{Soit } p=1 \text{ Soit } \phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \Gamma \mapsto \Gamma^{-1}$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (note Ω)

Soit $A \in \Omega$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(A) \subseteq \Omega$

Soit alors H tel que $A+H \in \Omega$

$$(A+H)^{-1} = (A(I_n + A^{-1}H))^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1}$$

$$\text{Si } \phi \text{ est différentiable en } I_n \text{, alors } (I_n + A^{-1}H)^{-1} = I_n + d\phi(I_n)(A^{-1}H) + o(H)$$

$$\phi(A+H) = A^{-1} + [d\phi(I_n)(A^{-1}H)] \cdot A^{-1} + o(H)$$

$$\text{d'où } \phi \text{ est différentiable en } A \text{ et } d\phi(A) \cdot H = [d\phi(I_n)(A^{-1}H)] A^{-1}$$

$$(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k = I_n - (A^{-1}H) + \frac{1}{2} (A^{-1}H)^2 - \dots$$

$$\text{d'où } (I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k = I_n - A^{-1}H + \frac{1}{2} (A^{-1}H)^2 - \dots$$

$$= I_n - A^{-1}H + o(H) \quad \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k \right] A^{-1} = O((\|H\|)^2)$$

d'où ϕ différentiable en I_n , donc en A .

$$\text{et } d\phi(A) \cdot H = [d\phi(I_n)(A^{-1}H)] A^{-1} = -A^{-1}H A^{-1} \quad \left(\text{propre de } A \right)$$

appl 5 exp $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ différentiable en 0?

$$\exp(I_n + H) = \exp(I_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} H^k = I_n + H + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} H^k$$

$$= I_n + H + o(H)$$

On $H \mapsto H \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc exp est différentiable en 0.

et $d\exp(0) = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $R[A] = \mathbb{R}_n[A] = \text{Vect}\{A^0, \dots, A^{n-1}\}$ d'où finie

Soit $H \in R[A]$ au voisinage de 0 Théorème de Cayley-Hamilton

$$\exp(A+H) = \exp(A) \exp(H) = \exp(A) \left(\exp(H) + o(H) \right)$$

$$= \exp(A) + d\exp(A) \cdot H + o(H)$$

On montre que dans le cas général sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $d\exp(A) \cdot H = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} A^k H A^k$

appl 6 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \int_0^t p(s) ds$. f différentiable en $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

$$f(P+H) = \int_0^1 ((P+H)(t))^3 dt$$

$$= \int_0^1 (P(t)^3 + 3P(t)^2 H(t) + 3P(t) H(t)^2 + H(t)^3) dt$$

$$= \int_0^1 P(t)^3 dt + 3 \int_0^1 P(t)^2 H(t) dt + 3 \int_0^1 P(t) H(t)^2 dt + \int_0^1 H(t)^3 dt$$

On montre $\|P\|_2 = (\int_0^1 P(t)^2 dt)^{1/2}$ et $\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$

$$\left| \int_0^1 P(t) H(t)^2 dt \right| \leq \|P\|_\infty \|H\|_2^2 \leq \|P\|_\infty \|H\|_2^2$$

$$\text{donc } \int_0^1 P(t) H(t)^2 dt = O(\|H\|_2^2) = O(\|H\|_2^2)$$

$$\left| \int_0^1 H(t)^3 dt \right| \leq \|H\|_\infty \|H\|_2^2 \text{ donc } \int_0^1 H(t)^3 dt = o(\|H\|_2^2) = o(\|H\|_2^2)$$

De plus $\phi: H \mapsto \int_0^1 P(t)^2 H(t) dt \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ et

$$f(P+H) = f(P) + \phi(H) + o(H) \text{ d'où } f \text{ différentiable en } P \text{ et}$$

$$df(P) \cdot H = 3 \int_0^1 P(t)^2 H(t) dt$$

appl 7 Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Ω est un ouvert du $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2 $\mathbb{C}$ normé par $\|\cdot\|$.

Soit $z_0 \in \Omega$, soit h tel que $z_0 + h \in \Omega$

$$f(z_0+h) = \frac{1}{z_0+h} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1+h/z_0} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{z_0}\right)^n = \frac{1}{z_0} \left(\frac{h}{z_0} + o(h)\right)$$

$$= \frac{1}{z_0^2} h + o(h)$$

Or $h \mapsto -\frac{1}{z_0^2} h \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ donc f est différentiable en z_0 et

$$df(z_0) \cdot h = -\frac{1}{z_0^2} h$$

Soit $g: \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{z}$

$$g(z_0+h) = \frac{1}{z_0+h} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1+h/z_0} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{z_0}\right)^n = \frac{1}{z_0} \left(\frac{h}{z_0} + o(h)\right)$$

$$= g(z_0) + g'(z_0) h + o(h)$$

g est différentiable en 0 et $dg(z_0) \cdot h = -\frac{1}{z_0^2} h$

def Soit $f: \Omega \rightarrow F$ définie sur Ω . On dit que f est différentiable sur Ω si f est différentiable au tout point de Ω . Dans ce cas la différentielle de f est définie par

$$df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

exple Si f est constante sur Ω , alors $df = 0$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

La réciproque est fautive (il est suffisant d'être convexe par arcs...)

Si f est linéaire sur E , alors df est constante et $df = f$

$$\text{Ex effet } f(a+h) = f(a) + \frac{f(h)}{\|h\|} \|h\|$$

def Si E est euclidien et $F = \mathbb{R}$, on définit le gradient comme étant l'unique forme linéaire (c'est Théorème de représentation de Riesz) ∇f vérifiant:

$$\forall a \in \Omega, \exists \nabla f_a \in E, \forall h \in E, df(a) \cdot h = \langle \nabla f_a, h \rangle$$

On la notera ∇f « vecteur »

def Si $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^m$, on définit la matrice Jacobienne de f en $a \in \Omega$ par:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}$$

où $f: x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ différentiable en a

prop 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si f est dérivable en a et dans ce cas: $df(a) \cdot h = f'(a) \cdot h$

prop 2 Si E est euclidien, soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la ps

Si de plus $F = \mathbb{R}$

$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle \text{ avec } \nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

Si $E = \mathbb{R}^m$ canoniquement euclidien,

$$J_{\nabla f}(a) = \begin{bmatrix} \nabla f(a) \\ \vdots \\ \nabla f(a) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

prop 3 Soit B_m la base canonique de $\mathbb{R}^m$, B_n la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$, Alors:

$$J_{\nabla f}(a) = J_f(a)$$

Si bien que $df(a) \cdot h$ correspond dans les bases canoniques à $J_f(a) \cdot h$

rem Notation différentielle infinitésimale:

$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ Alors } df(x,y) \cdot (h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) h_2$$

$$\text{Alors } dz \cdot (h_1, h_2) = h_1 dz + h_2 dy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) = 2xy$$

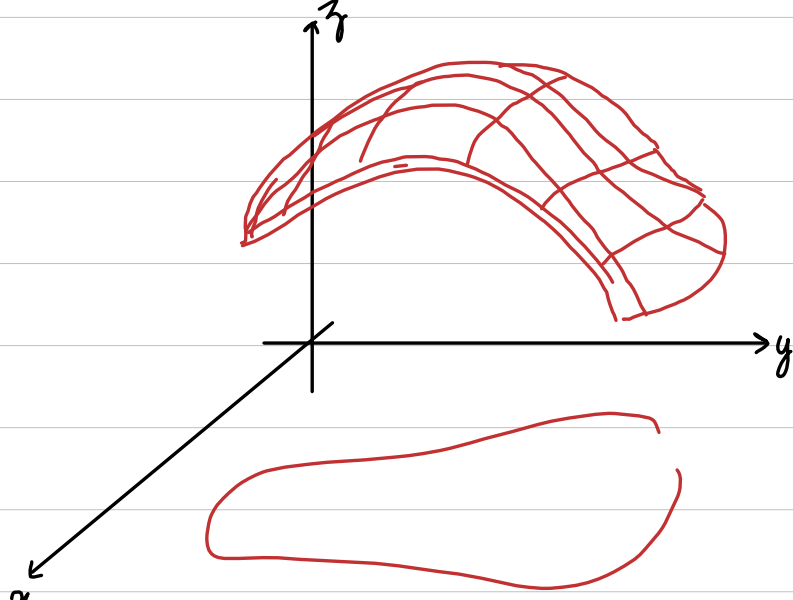
$$\text{Alors } df(x,y) = 2xy dz + x^2 dy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) = x^2$$

Alors $df(x,y) = 2xy dz + x^2 dy$ On se permet d'écrire ça en $\mathbb{C}$

Optimisation

Dans un K -evm, on a deux types de fonctions :

- les parties définies paramétriquement (par exemple, $[x, y]$ dans E est défini par $\{(1-\theta)x + \theta y : \theta \in [0, 1]\}$, ou encore pour $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$)



- les parties définies implicitement (par exemple pour $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, la partie $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Omega : g(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\} = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \Omega : g_i(x) = 0_{\mathbb{R}}\}$
« hypersurface »
définie implicitement

def. (Vecteurs tangents et espaces tangents)

Soit $X \subseteq E$. Soit $v \in E$. On dit que v est tangent à X en x si

il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$, γ dérivable en 0 et $\gamma'(0) = v$. On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents.

rem. On montre que $T_x X$ contient 0 et si $v \in T_x X$, alors : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda v \in T_x X$

thm 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $X = f^{-1}(\{0\})$ (hypersurface implicite)

Si $df(x) \neq 0$, Alors $T_x X = \ker(df(x))$

appli 2 Déterminer $T_{I_m}(\mathcal{O}_m(\mathbb{R}))$
Analyse note T

Soit $\Pi \in T$. Il existe $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ $\gamma(0) = I_m$ et $\gamma'(0) = \Pi$

$$\gamma(t)^T \gamma(t) = I_m \text{ donc } \gamma'(0)^T \gamma(0) + \gamma(0)^T \gamma'(0) = 0$$

$$\text{d'où } \Pi^T = -\Pi \text{ et } \Pi \in \mathcal{A}_m^s(\mathbb{R})$$

Synthèse On pose $\gamma(t) = \exp(t\Pi)$

On a donc $T_{I_m}(\mathcal{O}_m(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_m^s(\mathbb{R})$

rem Dans les hypothèses de thm 1, si $df \neq 0$ alors $T_x X = \ker(df(x))$

$$\text{avec } df(x) \cdot h = \langle \nabla f(x) | h \rangle \text{ donc } \ker(df(x)) = \nabla f(x)^\perp$$

$$\text{donc } T_x X = \nabla f(x)^\perp$$

def Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subseteq E$. On dit que f admet un maximum (global) sur A si :

$$\exists \Pi \in \mathbb{R}, (\forall x \in A, f(x) \leq \Pi) \text{ et } (\exists x_0 \in A, f(x_0) = \Pi) \quad (*)$$

Dans ce cas Π est unique et s'appelle « le maximum de f sur A »

(on note $\max_{x \in A} f(x)$)

(*) s'écrit aussi : $\exists x_0 \in A, \forall x \in A, f(x) \leq f(x_0)$. Dans ce cas le maximum de f sur A est $f(x_0)$ mais x_0 n'est pas unique.

Idem avec le minimum global sur A , puis l'extremum sur A .

Si on fixe $x_0 \in A$, on dit que f admet un maximum local si dans un voisinage V de x_0 , on a : $\forall x \in V, f(x) \leq f(x_0)$.

$$\text{i.e. } \exists \varepsilon > 0, \forall x \in B_0(x_0, \varepsilon) \cap A, f(x) \leq f(x_0)$$

Idem avec le minimum local / extremum local en x_0 .

thm 2 On considère $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω , différentiable en

$x_0 \in \Omega$. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $df(x_0) = 0$.

def On dit que x_0 est un point critique de f si f est différentiable en x_0 et $df(x_0) = 0$

thm 3 Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert Ω . Soit $X \subseteq \Omega$ si $f|_X$ admet un extremum local en $x_0 \in X$ et que f est différentiable en x_0 , alors :

$$\forall v \in T_{x_0} X, df(x_0) \cdot v = 0 \quad \text{i.e. } T_{x_0}(X) \subseteq \ker(df(x_0))$$

Si de plus X est l'hypersurface $g^{-1}(\{0\})$ avec $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$dg(x_0) \neq 0$, Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, df(x_0) = \lambda dg(x_0)$$

« multiplicateur de Lagrange »

thm 4 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \Omega$ tel que f admet un extremum local en x_0 .

Alors x_0 est un point critique de f et :

- Si $f(x_0)$ est un maximum local : $H_f(x_0) \in S_m^+(\mathbb{R})$

- Si $f(x_0)$ est un minimum local : $H_f(x_0) \in S_m^-(\mathbb{R})$

oubli : Ω doit être un ouvert de $\mathbb{R}^m$!

thm 5 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit x_0 un point critique de f .

- Si $H_f(x_0) \in S_m^+(\mathbb{R})$: $f(x_0)$ est un minimum local

- Si $H_f(x_0) \in S_m^-(\mathbb{R})$: $f(x_0)$ est un maximum local

cor 6 Notations de Hesse : $S_0 = H_f(x_0) = \begin{bmatrix} r_0 & s_0 \\ s_0 & t_0 \end{bmatrix}$

$$\text{avec } s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0), r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \text{ et } t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0)$$

Dans ce cas :

- Si $r_0 > 0$ et $\det(S_0) > 0$, Alors f admet un minimum local strict en x_0

- Si $r_0 < 0$ et $\det(S_0) > 0$, Alors f admet un maximum local strict en x_0 .

$$y'' - y = f$$

Solution générale de l'éq. homogène: $y(t) = N_1(t)e^{+t} + N_2(t)e^{-t}$
 ($x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}$) système fondamental de solution

$$\text{On impose } N_1'(x)e^x + N_2'(x)e^{-x} = 0$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= N_1'(t)e^t + N_1(t)e^t + N_2'(t)e^{-t} - N_2(t)e^{-t} \\ &= N_1(t)e^t - N_2(t)e^{-t} \end{aligned}$$

$$y''(t) = N_1'(t)e^t + N_1(t)e^t - N_2'(t)e^{-t} + N_2(t)e^{-t}$$

$$y''(t) - y(t) = f(t)$$